Stupne nekonzistentnosti

Ladislav Kvasz
Akademie věd České Republiky, Praha

Abstract: Several mathematical theories, as for instance Newton's theory of fluxions and fluents, Frege's theory of the foundations of arithmetic, or Peano's theory of natural numbers were first formulated in a logically inconsistent form. Only after some period of time consistent formulations of these theories were found. The paper analyzes several historical cases of this "initial inconsistency". It suggests distinguishing three kinds of inconsistency according to the "distance" of the proposed inconsistent theory from its consistent variant. These three kinds correspond to whether re-formulations, relativizations or re-codings are needed for turning the inconsistent theory into a consistent one.

Keywords: inconsistency, theory of fluctions, non-standard analysis.

Nekonzistentnosť je logický fenomén, ku ktorému možno pristupovať z rôznych hľadísk. Vedľa snáh o vytvorenie parakonzistentných logík je možné jav nekonzistentnosti skúmať aj z historického hľadiska. Nové matematické teórie sa často rodia ako nekonzistentné, ale napriek nekonzistentnosti sa v ich rámci podarí odvodiť rad pozoruhodných výsledkov. Po kratšej či dlhšej dobe od odhalenia logickej nekonzistentnosti určitej teórie sa podarí vytvoriť jej logicky konzistentnú verziu, v rámci ktorej je možné odvodiť spravidla rovnaké tvrdenia ako v pôvodnej nekonzistentnej teórii. Klasickým príkladom je *diferenciálny a integrálny počet* vytvorený Newtonom a Leibnizom. Trvalo vyše sto rokov, kým sa Cauchymu a Weierstrassovi podarilo predložiť logicky konzistentnú verziu tejto teórie, pričom väčšina viet dokázaných Newtonom a Leibnizom v rámci ich nekonzistentnej varianty diferenciálneho a integrálneho počtu sa ukázala ako správna aj z pohľadu konzistentnej teórie.

Keď logici komentujú túto epizódu, zdôrazňujú logickú nedostatočnosť pôvodnej, Newtonovej či Leibnizovej verzie. Napríklad A. W.

Moore v knihe *The Infinite* píše: „*Napriek všetkej svojej hĺbke a kráse je uvedená argumentácia, ako sme videli, fundamentálne chybná. Zakladá sa na pojme nekonečne malého rozdielu (ktorý nie je celkom nič, ale ani celkom niečo) a tento pojem je zásadne nekoherentný*“ (Moore 1990, 63). Takýto postoj má za následok, že za vedecky (a filozoficky) relevantné sa považujú až konzistentné formulácie diferenciálneho a integrálneho počtu pochádzajúce od Cauchyho a Weierstrassa. Rozboru základných pojmov Cauchyho a Weierstrassovej teórie sa venuje náležitá pozornosť, kým rozbor Newtonových a Leibnizových textov sa redukuje na úroveň *historických kuriozít*, ktoré si nezasluhujú hlbšiu analýzu. Tým, že sa ukázala ich nekonzistentnosť, sa zdá byť všetko povedané. Snažiť sa o filozofickú analýzu nekonzistentnej teórie nemá zmysel.

Som presvedčený, že tento názor je mylný. Samozrejme, v rámci nekonzistentnej teórie je (prostriedkami našej formálnej logiky) možné odvodiť prakticky čokoľvek, ale väčšina výsledkov, ku ktorým dospeli Newton a Leibniz pomocou svojich „logicky nekonzistentných“ teórií, sa ukázala byť správna. Keby sme vybrali náhodný systém nekonzistentných axióm, asi by sa nepodarilo zabezpečiť, aby sme systematicky odvodzovali iba „správne“ výsledky. Problém je, že odvodzovanie, ktoré Newton a Leibniz používali, nebolo čisto logickým odvodzovaním (a oni to ani netvrdili), ale išlo o kontextovo viazané odvodzovacie pravidlá. Ak je to naozaj tak, potom ani logická nekonzistentnosť nie je v ich prípade takým zásadným problémom, akým sa javí zo súčasného hľadiska. Mne nejde o obhajobu nekonzistentných teórií. Logická konzistentnosť je základom matematiky a nechcem ju spochybňovať. Snažím sa len porozumieť, ako možno v rámci logicky nekonzistentnej teórie odvodzovať takmer výlučne správne teorémy. Samozrejme, nie vždy sa to darilo, ale omyly boli zriedkavejšie, než by sme mohli očakávať. Nekonzistentné teórie, napríklad Newtonov a Leibnizov diferenciálny a integrálny počet či Eulerova analýza nekonečne malých veličín, mali napriek nekonzistentnosti veľký metodologický, logický a epistemologický význam. Preto je nutné podrobiť ich serióznej filozofickej analýze a nie ich odbaviť ako *historické kuriozity*.

Mojim cieľom je v rámci širokého pojmu logickej nekonzistentnosti zaviesť ***tri užšie pojmy nekonzistentnosti***, ktoré vznikajú tak, že sa určia transformácie, ktoré sú potrebné na to, aby sa teória stala konzistentnou. V prípade týchto troch pojmov nekonzistentnosti pôjde teda o nekonzistentné teórie, ktoré sú prevoditeľné na konzistentné teórie pomocou špecifických transformácií. Chcem určiť mieru nekonzistentnosti teórie tak, že opíšem, aké radikálne zmeny v jej jazyku treba urobiť na to, aby sa teória stala konzistentnou. Verím, že uvedené rozlíšenia prinesú nové argumenty do diskusie, ktorá sa vedie vo filozofii matematiky o Eulerovej variante diferenciálneho a integrálneho počtu, založenej na používaní nekonečne malých veličín. V priebehu 19. storočia boli nekonečne malé veličiny považované za nelegitímne objekty; Eulerova teória bola preto považovaná za nekonzistentnú teóriu a bola nahradená Cauchyho a Weierstrassovou teóriou limít.

Keď Abraham Robinson objavil neštandardnú analýzu, považoval ju za ospravedlnenie Eulerovej teórie. Robinson bol presvedčený, že ukázal, že Eulerova teória *nebola nekonzistentná*, ako si mysleli matematici 19. storočia, keďže pojmu nekonečne malej veličiny je možné dať presný zmysel. Niektorí filozofi však toto presvedčenie odmietajú. Tvrdia, že Robinson vo svojej konštrukcii nekonečne malých veličín použil nástroje, ktoré boli Eulerovi nedostupné, a teda jeho konštrukcia neukazuje oprávnenosť *Eulerových* úvah. Tak A. W. Moore v citovanej práci píše:

> Nemecký logik Abraham Robinson (1918–1974) vynašiel to, čo je známe ako neštandardná analýza, a tým nakoniec dal zmysel pojmu nekonečne malej veličiny, väčšej ako 0, ale menšej ako ľubovoľné konečné číslo. Ale použil pritom logické postupy a techniky, ktoré siahajú ďaleko za možnosti matematikov sedemnásteho storočia. Bolo by preto anachronizmom chápať jeho prácu ako ospravedlnenie ich úsilia. Neukázala, že pojem nekonečne malej veličiny, ako jej rozumeli ***oni***, bol koherentný. (Moore 1990, 69)

Moore tu robí pozoruhodný argumentačný ťah; ťah, ktorý je dostatočne typický.[1] Keď sa ukáže, že príslušná teória *nie je* nekonzistentná – za akú bola považovaná doposiaľ –, prechádza od objektívneho fak-

---

1 Podobný ťah urobil Kuhn pri diskusii o einsteinovskej revolúcii vo fyzike, keď sa snažil diskvalifikovať argument, že newtonovská mechanika je limitným prípadom einsteinovskej mechaniky pri rýchlosti svetla rastúcej do nekonečna. Formálnu rekonštrukciu starej teórie (newtonovskej mechaniky či eulerovskej teórie nekonečne malých veličín) v rámci novšej teórie (einsteinovskej mechaniky či robinsonovskej neštandardnej analýzy) uvedení autori odmietajú s poukazom na to, že pojmy použité pri formálnej rekonštrukcii nie sú pojmami starej teórie. Tento argument by bol platný, keby pojmy boli rozhodujúce pri budovaní teórií. Vedľa pojmov však existuje formálny rámec teórie, ktorý zachytáva dôležitejšie štruktúry, než je pojmová stavba.

tu nekonzistentnosti teórie do subjektívnej roviny toho, ako tejto teórii *rozumeli či nerozumeli* matematici určitého obdobia. To je ale z hľadiska filozofickej analýzy irelevantné. Spôsob, akým teórii rozumeli v určitom období, je vecou histórie vedy a nie filozofie. Takto Moore príslušnú teóriu odsúva z roviny filozofickej analýzy do roviny histórie. Síce už nie ako *historickú kuriozitu* (ako sa odsúvali nekonzistentné teórie), ale ako *psychologický aspekt* porozumenia teórii.

Aby sme sa mohli pustiť do analýzy nekonzistentných teórií, musíme si v prvom rade ujasniť, čo budeme na nich analyzovať. Domnievam sa, že okrem „*nezaujímavých*" nekonzistentných teórií možno vyčleniť tri druhy nekonzistentných teórií, ktoré sú nekonzistentné „*zaujímavým spôsobom*" (t. j. obsahujú konzistentné „jadro", ktoré je nekonzistentným spôsobom uchopené).

1 Pojem re-formulačne nekonzistentnej teórie

Teóriu nazveme ***re-formulačne nekonzistentnou*** ak je logicky nekonzistentná, ale pomocou *re-formulácie* ju možno spraviť konzistentnou.[2] Re-formulačnú nekonzistentnosť tak možno považovať za omyl či chybu autora, keďže všetky prostriedky pre vytvorenie konzistentnej verzie príslušnej teórie už mal k dispozícii. Zdá sa, že autor re-formulačne nekonzistentnej teórie v dôsledku nešťastnej formulácie predpokladov, definícií či argumentov sa dostal do rozporu.[3] Tento typ nekonzistentnosti nie je prekvapivý. Bolo ho nutné zaviesť iba preto,

---

2 Pojem ***re-formulácie*** som zaviedol v knihe *Patterns of Change* (Kvasz 2008) ako takú zmenu teórie, pri ktorej sa nemení konceptuálny rámec, v ktorom je teória formulovaná, ale korigujú sa určité propozície. Príkladom *re-formulácie* bol objav planéty Neptún. Tento objav nezmenil pojem planéty, ale zmenil odpoveď na otázku, koľko planét má slnečná sústava. Preto je to *re-formulácia* písaná s pomlčkou. Pôvodná formulácia („*Slnečná sústava má 7 planét*.") a nová formulácia („*Slnečná sústava má 8 planét*.") sa logicky vylučujú (tým sa *re-formulácia* líši od *reformulácie* písanej bez pomlčky, keď sa ten istý obsah vyjadrí pomocou iných slov).

3 Jav príbuzný re-formulačnej nekonzistentnosti sa vyskytol v euklidovskej geometrii pri „dôkazoch" piateho postulátu. Poznáme vyše 6 rôznych „dôkazov" tohto postulátu, o ktorých súčasníci, alebo príslušníci nasledujúcej generácie, zistili, že sú kruhové – ich autor skryto predpokladal to, čo tvrdil. Dôležité však je, že k odhaleniu cirkularity „dôkazu" došlo v rovnakom konceptuálnom rámci ako bol ten, v ktorom bol „dôkaz" sformulovaný (podobne ako konzistentná verzia re-formulačne nekonzistentnej teó-

aby voči nemu vynikli dva ďalšie typy, ktorých zavedenie je vlastným cieľom state. V mnohých prípadoch, a verím, že Newtonov či Fregeho prípad patria medzi ne, v dobe formulácie teórie ***nebolo možné vytvoriť logicky konzistentnú teóriu***, lebo konceptuálne rámce, v ktorých títo autori pracovali, neobsahovali prostriedky umožňujúce konzistentne vyjadriť obsahy, o ktorých vyjadrenie sa usilovali.

Príkladom re-formulačne nekonzistentnej (mini-) teórie je Cauchyho veta o spojitosti limity postupnosti spojitých funkcií. Cauchy, jeden z tvorcov striktných základov matematickej analýzy, dokázal chybné tvrdenie, že konvergentná postupnosť spojitých funkcií je spojitá. Pojmom re-formulačnej nekonzistentnosti chcem zvýrazniť skutočnosť, že Cauchy bol tvorcom konceptuálneho rámca, v ktorom bolo možné sformulovať korektnú verziu uvedeného tvrdenia. Od korektnej teórie tak Cauchyho delila re-formulácia. V tom sa Cauchyho teória líši od Newtonovej či od Eulerovej, ktoré od korektnej teórie oddeľuje prestavba celého konceptuálneho rámca matematickej analýzy. V prípade re-formulačne nekonzistentných teórií je potrebné analyzovať formulácie jednotlivých definícií, tvrdení a dôkazov, lebo je to práve táto rovina, v ktorej nastáva problém. Takáto epistemologická analýza by sa mohla pokúsiť odhaliť príčinu vzniku nekonzistentnosti.

a. Cauchyho veta o spojitosti limity postupnosti spojitých funkcií

Cauchy definuje spojitosť funkcie slovami: „*funkcia f(x) je* ***spojitá*** *vzhľadom k x medzi danými hranicami, ak medzi týmito hranicami nekonečne malý prírastok [a] neznámej [x] bude mať vždy za následok nekonečne malý prírastok [f(x + a) – f(x)] samotnej funkcie*“ (Cauchy 1821, 26).[4] Na tejto definícii je zaujímavé, že nedefinuje spojitosť v bode, ale hneď pre celý interval (pre *x* medzi danými hranicami). Prv ako uvediem vetu o spojitosti limity postupnosti spojitých funkcií, uvediem tri Cauchyho definície (Cauchy 1821, 6n.): definíciu premennej: „*Veličinu nazývame* ***premennou,*** *ak ju je možné uvažovať ako schopnú prijať postupne mnoho rôznych hodnôt. Takúto veličinu spravidla označujeme písmenom z konca abece-*

rie bola podaná v tom istom konceptuálnom rámci ako bola sformulovaná nekonzistentná verzia).

4 Do textu definície som vložil v hranatých zátvorkách formálne vyjadrenie prírastku, veličiny a prírastku funkcie, ktoré Cauchy uvádza v texte tesne pred citovanou definíciou.

dy.“; definíciu limity: *„Keď hodnoty postupne pripisované určitej premennej sa neobmedzene (indefinitely) blížia k určitej pevnej hodnote takým spôsobom, že nakoniec sa od nej líšia tak málo ako len chceme, táto pevná hodnota sa nazýva* ***limitou*** *všetkých ostatných hodnôt.*“; a definíciu nekonečne malej veličiny: *„Keď postupné číselné hodnoty premennej klesajú nekonečne (indefinitely) takým spôsobom, že klesnú pod ľubovoľné dané číslo, táto premenná sa stáva tým, čo nazývame* ***nekonečne malou veličinou****. Premená tohto druhu má nulu za svoju limitu.“*

Teraz už môžeme vysloviť príslušné tvrdenie: *„Keď jednotlivé členy radu (1)*

(1) $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$

sú funkciami tej istej premennej x, spojité vzhľadom k tejto premennej v okolí určitej hodnoty, pre ktorú rad konverguje, súčtom radu je opäť spojitá funkcia x v okolí tejto hodnoty“ (Ibid., 90).

Veta v tejto podobe neplatí. Prvý, kto Cauchyho vetu kritizoval, bol Niels Henrik Abel v práci Abel (1826). Ako protipríklad možno uviesť Fourierov rad funkcie, definovanej predpismi:

$f(x) = +1$ pre $0 < x < \pi$,
$f(x) = 0$ pre $x = 0$,
$f(x) = -1$ pre $-\pi < x < 0$.

Táto funkcia je zrejme nespojitá v bode $x = 0$, avšak jej Fourierov rad je[5]

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots\right\}$$

Máme tu príklad nekonečného radu tvoreného funkciami premennej x, ktoré sú spojité v okolí $x = 0$, avšak súčtom radu je funkcia, ktorá nie je spojitá.

b. Zavedenie pojmu rovnomernej spojitosti

V čom je problém s Cauchyho vetou možno nájsť vysvetlené v učebniciach matematickej analýzy. V prípade funkcionálnych radov je potrebné rozlíšiť dva druhy konvergencie – bodovú a rovnomernú. Cauchyho definícia vystihuje konvergenciu bodovú, avšak k tomu, aby

[5] Odvodenie tohto vzťahu možno nájsť v mnohých učebniciach, napríklad v Courant (1927, 517).

súčet radu spojitých funkcií bola opäť spojitá funkcia, bodová konvergencia nestačí, nutné je požadovať konvergenciu rovnomernú. Asi nemá zmysel uvádzať technické detaily teórie funkcionálnych radov; tie možno nájsť vo väčšine učebníc matematickej analýzy. Podobne nemá zmysel filozofický text zaťažovať históriou pojmu rovnomernej konvergencie; tú možno nájsť napríklad v stati Lützen (1999). Podstatné však je uvedomiť si, že oba pojmy – pojem bodovej ako aj pojem rovnomernej konvergencie je možné zaviesť v tom istom pojmovom rámci. Re-formuláciou Cauchyho definície limity je možné dostať definíciu rovnomernej konvergencie. Už v jazykovom rámci Cauchyho teórie ***bolo možné*** definovať pojem rovnomernej konvergencie a vysloviť Cauchyho vetu v konzistentnej forme. Teraz ma nezaujíma, prečo Cauchy nerozlišoval medzi bodovou a rovnomernou konvergenciou. To je (inak veľmi zaujímavá) otázka, ktorú prenechám historikom matematiky. Ide mi tu výhradne o skutočnosť, že Cauchyho nekonzistentnú teóriu delila od konzistentnej teórie obyčajná re-formulácia.[6]

c. Pojem re-formulačne nekonzistentnej teórie a jeho filozofické dôsledky

Krátko potom, ako Abraham Robinson objavil neštandardnú analýzu, Imre Lakatos napísal (ale nepublikoval) stať s názvom *Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics* (Lakatos 1966). V nej Lakatos vyslovil názor, že Cauchy sa nedopustil žiadnej chyby, ale používal iný pojem kontinua – nearchimedovské kontinuum, v ktorom existujú aj nekonečne malé veličiny. Aj keď sa tento názor nestal dominantným, existuje stály prúd literatúry argumentujúcej v prospech tejto alternatívy (napríklad Laugwitz 1987, Katz – Katz 2011). Podľa mňa je snaha vyložiť Cau-

---

6 Ide mi tu o možnosť formulácie korektnej teórie v jazykovom rámci, ktorý používal Cauchy. Uznávam, že keď máme jasne vymedzený pojem rovnomernej konvergencie, je ľahšie ho definovať v Cauchyho jazykovom rámci. Je možné, že na to, aby bolo možné tento pojem objaviť, bolo nevyhnutné Cauchyho rámec opustiť a že v Cauchyho jazykovom rámci je príslušná definícia neprirodzená. Túto epistemologickú otázku však teraz nechávam bokom a k problému pristupujem z logického hľadiska. Z logického hľadiska je podstatné, že v príslušnom jazykovom rámci je možné sformulovať definíciu pojmu rovnomernej konvergencie. Či je možné k tejto definícii dospieť prostriedkami daného rámca, to je otázka, ktorou sa na tomto mieste nezaoberám.

chyho vetu prostriedkami neštandardnej analýzy neadekvátna, lebo Cauchyho teória je iba re-formulačne nekonzistentná, a preto je *jednoduchšie* (v zmysle, v akom pojem jednoduchosti používa Poincaré) interpretovať Cauchyho teóriu na pozadí archimedovského kontinua ako teóriu s jednou malou nekonzistentnosťou. Je nepravdepodobné, že by Cauchy skutočne používal nearchimedovské kontinuum a tento fakt by sa na takmer 400 stránkach jeho diela prejavil iba na jednom jediném mieste – na dôkaze vety o spojitosti súčtu funkcionálneho radu.

2 Pojem objektačnej nekonzistentnosti

Teóriu nazvem ***objektačne nekonzistentnou***, ak je logicky nekonzistentná, nie je možné ju urobiť konzistentnou pomocou re-formulácie, a vytvorenie konzistentnej varianty teórie vyžaduje nový konceptuálny rámec, t.j. *objektáciu*.[7] Podobne ako re-formulačne nekonzistentnú teóriu možno spraviť konzistentnou pomocou re-formulácie, v prípade objektačne nekonzistentnej teórie tento proces vyžaduje objektáciu. Príkladom takejto teórie je Leibnizov a Newtonov diferenciálny a integrálny počet. Newton a Leibniz používali pri svojich dôkazoch postupy, ktoré sú logicky nekonzistentné. Keď tvrdím, že ich teórie sú *objektačne nekonzistentné*, chcem zvýrazniť, že nekonzistentnosť, ktorá sa v nich vyskytla, je síce rádovo väčšia ako re-formulačná nekonzistentnosť, ale na druhej strane je podstatne menšia než prínos týchto teórií. Newton a Leibniz sú tvorcami nového ***reprezentačného nástroja***:[8] objavili pojem

[7] Pojmu ***objektácie*** (v anglickej verzii *relativization*) je venovaná druhá kapitola knihy *Patterns of Change*. Nie je možné stručne vysvetliť tento typ zmien, ale pri určitom zjednodušení si objektácie možno predstaviť ako vytvorenie *odstupu* (či *nadhľadu*), teda schopnosť pozrieť sa na určitú oblasť zvonka. Tým sa niečo, v čom sme ponorení, mení v predmet, ktorý (v predstave) držíme pred sebou ako objekt. Príkladom objektácie je vznik perspektivistického maliarstva v renesancii alebo vznik substitúcie v algebre.

[8] Kým objektácie sa viažu na konceptuálny rámec určitej teórie, re-prezentácie predstavujú ešte zásadnejšie zmeny jazyka matematiky. V *Patterns of Change* je reprezentáciám (v anglickej verzii *recoding*) venovaná prvá kapitola. Keď Newton a Leibniz vytvorili nový reprezentačný nástroj, vytvorili nové univerzum objektov – univerzum funkcií, funkcionálnych priestorov, atď. Toto univerzum je možné konceptualizovať rôznymi spôsobmi a objektácie predstavujú prechody medzi jednotlivými konceptualizáciami. Hlavné objektácie v dejinách matematickej analýzy sa spájajú s menami ako Euler, Lagrange, Cauchy, Riemann či Fréchet. Ale všetky tieto, ako aj

funkcie, zaviedli rozlíšenie funkcie a *argumentu*, zaviedli pojem *derivácie* a objavili *vzťah medzi derivovaním a integrovaním*. Tým zásadne zmenili celú matematiku. To, že pojmové ukotvenie týchto epochálnych inovácií bolo nekonzistentné, nie je dôležité. Od konzistentnej verzie diferenciálneho a integrálneho počtu Newtona a Leibniza delilo iba niekoľko objektácií.

a. Newtonova a Leibnizova varianta diferenciálneho a integrálneho počtu

Ako ilustráciu Newtonovej metódy výpočtu derivácie vezmeme pasáž z *Metódy postupností a fluxií*, (citovanú podľa Fauvel – Gray 1987, 385; dôraz LK):

> *Momenty fluentných veličín (to jest, ich nekonečne* [indefinitely] *malých častí, pridávaním ktorých narastajú v priebehu každého nekonečne* [infinitely] *malého úseku času) sú ako ich rýchlosti toku. Preto keď moment ľubovoľnej konkrétnej* [fluenty], *povedzme x, je vyjadrený ako súčin jej rýchlosti $\dot{x}$ a nekonečne malého množstva o (teda ako $\dot{x}o$), tak momenty ostatných, v, y, z* […] *budú vyjadrené ako $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$,* […] *vidíme, že $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ a $\dot{z}o$ sú k sebe navzájom* [v rovnakých pomeroch] *ako $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ a $\dot{z}$.*
>
> *Teraz, keďže momenty (povedzme $\dot{x}o$ a $\dot{y}o$) fluentných veličín (x a y) sú nekonečne* [infinitely] *malé prírastky, o ktoré tieto veličiny vzrastú počas každého nekonečne* [infinitely] *malého intervalu času, z toho plynie, že veličiny x a y počas ľubovoľného nekonečne malého intervalu času nadobudnú hodnoty $x + \dot{x}o$ a $y + \dot{y}o$. V dôsledku toho rovnica, ktorá vyjadruje vzťah fluentných veličín v každom okamihu, bude vyjadrovať tento vzťah rovnako medzi $x + \dot{x}o$ a $y + \dot{y}o$ ako medzi veličinami x a y; a teda $x + \dot{x}o$ a $y + \dot{y}o$ môžu byť dosadené na miesta posledných veličín, x a y, v uvedenej rovnici.*
>
> *Uvažujme teda rovnicu $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ a dosaďme $x + \dot{x}o$ na miesto x a $y + \dot{y}o$ na miesto y: tým vznikne*
>
> $$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0.$$

mnohé ďalšie konceptualizácie, sa týkajú tej istej re-prezentácie, toho istého univerza. Preto sú objektácie rádovo menšími zmenami jazyka ako je re-prezentácia a preto to, že teórie Newtona a Leibniza, sa „dajú dať do poriadku“ pomocou objektácie znamená, že ich chyba je rádovo menšia ako to, čo prinášajú.

Teraz, na základe predpokladu je $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, a keď tieto členy odstránime a zvyšok vydelíme o, ostane

$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^2 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^2 = 0.$

Ale ďalej, keďže o je podľa predpokladu nekonečne malé, aby dokázalo vyjadriť momenty veličín, členy, ktoré ju obsahujú ako faktor, budú ekvivalentné s ničím vo vzťahu k ostatným. Preto ich vynechám a ostáva

$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$

Môžeme si všimnúť, že členy neobsahujúce o vždy vymiznú, rovnako ako tie, ktoré sú násobené o vo viac než prvej mocnine; a že zvyšné členy po vydelení o budú mať vždy tvar, aký majú mať podľa pravidla. To je, čo som chcel ukázať.

Z rovnice, ktorú uvádza Newton ako poslednú, možno ľahko odvodiť deriváciu veličiny y (t. j. implicitnej funkcie) v tvare, ako sme na to zvyknutí dnes: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \dot{y}/\dot{x} = (3x^2 - 2ax + ay)/(3y^2 - ax)$.

b. Berkeleyho kritika

V citáte z Newtona som zvýraznil dve pasáže, ktoré sú relevantné z hľadiska ďalšieho vývinu. Roku 1734, sedem rokov po Newtonovej smrti, vydáva George Berkeley svoj slávny spis *The Analyst or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*, v ktorom predkladá prenikavú a vtipnú kritiku Newtonovej teórie fluxií a fluent. Berkeleyho cieľom bolo ukázať, že matematická analýza, na ktorej spočíva celá moderná prírodoveda, nemá o nič pevnejší základ než náboženstvo so svojimi anjelmi a zázrakmi. Jadro Berkeleyho kritiky spočíva v tom, že s veličinou *o* Newton najprv pracuje, akoby bola rôzna od nuly (to je nutné k tomu, aby sa ňou dalo deliť), ale vzápätí ju položí rovnú nule (keď zanedbá diferenciály vyšších rádov). Podľa Berkeleyho, určitá veličina je buď rovná nule, ale potom je rovná nule počas celého výpočtu a teda ňou nemožno deliť, alebo sa nule nerovná, ale potom sa jej nerovná ani na konci výpočtu, a preto nemožno zanedbať jej vyššie mocniny. To, že matematici napriek týmto chybám dospeli k správnym výsledkom, vysvetľuje Berkeley vtipne ako *kompenzáciu chýb*: výpočty matematikov sú chybné, ale matematická analýza používa chyby vždy vo dvojiciach, takže sa v priebehu výpočtu kompenzujú a dajú správny výsledok. Správnosť výsledku nie je dôsledkom správneho postupu, ale len náhodnej skutočnosti, že chyby sa navzájom zrušia. Preto výsledky matematickej analýzy nie sú o nič spoľahlivejšie ako zázraky či zjavenie.

c. Vytvorenie striktných základov diferenciálneho a integrálneho počtu

Je zaujímavé, že cesta, na ktorej matematici dospeli k logicky konzistentnej stavbe diferenciálneho a integrálneho počtu, v istom zmysle sleduje hlavnú myšlienku Berkeleyho (ironicky mieneného) výkladu správnosti výsledkov matematickej analýzy ako kompenzácie chýb. Matematici prestali deriváciu chápať ako podiel dvoch diferenciálov (či momentov) a pojali ju ako nedeliteľný výraz. Inak povedané, napevno spárovali výrazy presne tak, ako to opísal Berkeley, a pre tieto „zlepence“ vytvorili exaktný kalkul. Takže namiesto toho, aby (ako Newton) pracovali s nezávislými momentami veličín a robili s nimi operácie, „ktorých chyby sa po dvoch navzájom vykompenzujú“, pracovali iba s podielom dvoch momentov, teda s celkom, ktorý už mal chyby od začiatku „vykompenzované“. To bola základná myšlienka Lagrangea, ktorý výraz $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ považoval za kompaktný výraz, ktorého hodnota sa určuje metódami matematickej analýzy. Pritom Lagrange odmietol akýkoľvek limitný prechod a pre prácu s výrazmi typu $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ chcel vytvoriť pravidlá algebraického typu.

Lagrangeova koncepcia sa nakoniec nepresadila a ako úspešná sa ukázala až koncepcia Cauchyho, ktorá preberá Lagrangeovu myšlienku spojiť diferenciály do nedeliteľných výrazov, avšak pre určenie hodnoty týchto výrazov používa limitný prechod. Cauchyho verzia diferenciálneho a integrálneho počtu je tak vybudovaná z rovnakých zložiek ako Newtonova, iba sú tieto zložky skombinované iným spôsobom. Kým Newton najprv pre každú jednotlivú veličinu vytvoril pomocou limitného prechodu jej moment, a potom sa pokúša tieto momenty navzájom kombinovať, Cauchy najskôr (využijúc Lagrangeovu myšlienku, siahajúcu svojimi koreňmi až k Berkeleymu) veličiny skombinuje do určitých pevných kombinácií a potom (na rozdiel od Lagrangea, ktorý limitný prechod odmietal) prejde s týmito kombináciami k limite. To je zásadná zmena. Newton chcel deriváciu pojať ako ***podiel limitných hodnôt (t. j. momentov) veličín***, ale nebol schopný povedať, čo sa čím delí. Svoje predstavy zhrnul *v teórii prvých a posledných pomerov*, ktorú Berkeley parodoval, keď limitné hodnoty veličín, ktoré tvoria príslušný podiel, nazval duchmi zomrelých veličín. Cauchy vo svojej teórii hľadá ***limitu podielu konečných hodnôt*** a chápe ju *nie* ako hodnotu, ktorú výraz nadobúda pre limitné hodnoty veličín, ale ako hodnotu, ktorú v limite nadobúda výraz ako celok.

Zdá sa, že rozdiely medzi Newtonovým, Lagrangeovým a Cauchyho pojatím matematickej analýzy spočívajú v *objektácii*, čiže sú to *rozdiely vo forme jazyka*.[9] Newtonovo pojatie matematickej analýzy možno vyložiť ako pojatie založené na ***perspektivistickej forme***, kým Lagrangeovo pojatie je založené na ***kompozitívnej forme*** a Cauchyho teória je založená na ***interpretatívnej forme***. Bolo teda potrebné uskutočniť celý rad objektácií, aby vznikol konceptuálny rámec, v ktorom bolo možné Newtonove výpočty a argumenty konzistentne vyložiť.

d. Pojem objektačne nekonzistentnej teórie a jeho filozofické dôsledky

Keď prijmeme fakt, že existujú teórie, ako napríklad Newtonova teória fluxií a fluent, ktoré umožňujú pomocou heuristických schém usudzovania objaviť mnoho dôležitých poznatkov, ale z logického hľadiska sú nekonzistentné (t. j. protivník ako Berkeley je schopný pomocou tých istých pravidiel dospieť k paradoxným výsledkom), pričom v jazykovom rámci, v ktorom sú sformulované, ich nie je možné sformulovať v konzistentnej podobe, vrhá to nové svetlo na filozofické koncepcie vývinu vedy.

Na jednej strane to ukazuje neadekvátnosť *popperovského falzifikacionizmu*. Keby bol Newton falzifikacionistom, matematická analýza by asi nikdy nevznikla. Newton vedel, že to, čo robí, má mnohé nedostatky, ale našťastie sa nenechal odradiť a vytvoril teóriu, ktorá prešla postupnosťou štyroch objektácií, až vznikol konceptuálny rámec, v ktorom je možné Newtonove myšlienky konzistentne vyložiť. Teda to, že vedci často ignorujú fakty, ktoré odporujú ich teórii, nemusí byť prejavom samoľúbosti či iracionality. Môžu si, rovnako ako Newton, na jednej strane uvedomovať, že to, čo sledujú (u Newtona to bola nová re-prezentácia), má zásadne väčší význam než to, čo ich teóriu vyvracia. Na druhej strane môžu cítiť, že vzhľadom na stupeň rozvoja discip-

[9] Objektácie sú v Patterns of Change opísané ako zmeny formy jazyka. Existuje osem foriem: perspektivistická, projektívna, koordinatívna, kompozitívna, interpretatívna, integratívna, konštitutívna a konceptuálna.

líny nemá zmysel pokúšať sa rozpory riešiť, lebo v jazykovom rámci, ktorý je k dispozícii, to nie je možné (t. j. že ich teória je objektačne nekonzistentná, a teda pokusy riešiť problém pomocou re-formulácií nemajú šancu). Výrokov, ktoré dokladajú uvedomovanie si tejto situácie, je v dejinách mnoho, stačí spomenúť d'Alembertove slová „*Choďte ďalej, viera sa dostaví!*".

Na druhej strane prijatie vyššie uvedeného faktu spochybňuje predstavu vedeckej teórie ako súboru propozícií uzavretých vzhľadom k logickému vyplývaniu. Tento druh abstrakcie, ktorý je pre potreby matematickej logiky plne adekvátny, epistemológii a metodológii vedy nevyhovuje. Jav objektačnej nekonzistentnosti je významný tým, že takto nekonzistentnú teóriu nemožno ľahko urobiť konzistentnou (t. j. nejde o reformulačnú nekonzistentnosť). Nekonzistentnosť je súčasťou teórie počas dlhého obdobia (objektácie sú zmeny, ktorých stabilizácia si vyžaduje viaceré desaťročia). Ale aj napriek tejto nekonzistentnosti teória nesie v sebe jadro, ktoré sa vďaka ***vnútornému rozvoju samotnej nekonzistentnej teórie*** (t. j. bez zásahu zvonka) dá konzistentne sformulovať.

3 Pojem re-prezentačnej nekonzistentnosti

Teóriu nazvem ***re-prezentačne nekonzistentnou***, ak je logicky nekonzistentná, nie je re-formulačne ani objektačne nekonzistentná, ale pomocou re-prezentácie ju možno spraviť logicky konzistentnou. Príkladom takejto teórie je Eulerova teória nekonečne malých veličín. Táto teória je omnoho „divokejšia" než Newtonova teória fluxií a fluent. Eulerovu teóriu nebolo možné spraviť konzistentnou pomocou objektácií. Cauchyho záchrana Newtonovej teórie spočívala práve v eliminovaní nekonečne malých veličín, čo pre Eulerovu teóriu nie je schodná cesta (povedané Berkeleyho slovami, Euler sa nestaral o to, aby sa chyby v jeho teórii vyskytovali v dvojiciach). Až keď Robinson, využívajúc nástroje úplne inej re-prezentácie (teórie množín), vytvoril model nekonečne malých veličín, ukázal, že Eulerovej teórii je možné dať logicky konzistentnú podobu. Teda na rozdiel od Cauchyho, ktorý sa pohyboval v rámci diferenciálneho a integrálneho počtu (teda v rámci tej istej re-prezentácie ako Newton), Robinson opúšťa Eulerov reprezentačný nástroj a konzistentnosť Eulerovej teórie dokazuje takpovediac zvonka, prostriedkami úplne iného jazyka.

a. Eulerova teória nekonečne malých

Na ilustráciu Eulerovho spôsobu práce s nekonečne malými a nekonečne veľkými číslami si ukážeme jeho odvodenie radu pre a^z, ktorú možno nájsť v Euler (1748, par. 114-116). Nech $a > 1$ a ω je *„nekonečne malé číslo alebo zlomok taký malý, že je takmer rovný nule“*. Potom

$$a^\omega = 1 + \psi$$

pre nejaké nekonečne malé ψ. Teraz položme

$$\psi = k\omega.$$

Kde k závisí iba od a; potom

$$a^\omega = 1 + k\omega.$$

Potom pre ľubovoľné reálne číslo i platí

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i .$$

Takže vďaka binomickej vete

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1.2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}k^3z^3 + \ldots \qquad (2)$$

Keď je teraz z nejaké konečné kladné číslo, potom $i = \frac{z}{\omega}$ je nekonečne veľké, a dosadením $\omega = \frac{z}{i}$ do (2) dostávame

$$a^z = a^{i\omega} = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1.2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1.2i.3i}k^3z^3 + \ldots$$

Ale keď i je nekonečne veľké, sú $\frac{i-1}{i} = 1$, $\frac{i-2}{i} = 1$, etc., a tak dostávame

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Prirodzené logaritmy vzniknú, keď a zvolíme tak, aby bolo $k = 1$. Euler udáva hodnotu tohto a na 23 desatinných miest, zavádza pre toto číslo dodnes používané označenie e a píše

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Na tomto a mnohých iných Eulerových odvodeniach vidno, že Euler nepoužíva nekonečne malé veličiny ako aproximácie, ako nástroj na výpočet hodnoty funkcie v blízkych bodoch či okamihoch času, ako to robili Leibniz a Newton. Práve naopak, počíta s nimi ako s aritmetickými veličinami. Preto Berkeleyova stratégia „párovania“ chýb, na ktorej je založené Cauchyho vybudovanie základov analýzy, je tu, zdá sa, nepoužiteľná.

b. Základy Robinsonovej neštandardnej amalýzy

O Eulerovej verzii matematickej analýzy nebolo nikdy ukázané, že by bola nekonzistentná. Koncom 18. storočia matematici dospeli k presvedčeniu, že pojmom nekonečne malého a nekonečne veľkého čísla nie je možné dať konzistentnú interpretáciu. Toto presvedčenie, zdieľané niektorými filozofmi aj dnes (pozri citát z Moora v úvode), stačilo k tomu, aby boli techniky Eulerovho kalkulu opustené a nahradené cauchyovskou analýzou. Preto bolo veľkým prekvapením, keď sa začiatkom 60-tych rokov minulého storočia Robinsonovi podarilo vytvoriť neštandardnú analýzu, ktorá priniesla tzv. hyperreálne čísla, t. j. systém, v ktorého rámci existujú nekonečne malé aj nekonečne veľké čísla. Tak sa vyše 200 rokov po tom, ako Euler publikoval *Introductio ad analysin infinitorum* (Euler 1748), ukázalo, že Eulerove techniky práce s nekonečne malými číslami sú plne konzistentné.

c. Pojem reprezentačne konzistentnej teórie a jeho filozofické dôkazy

Na vyššie uvedenej epizóde z dejín matematiky je pozoruhodné, že aj v matematike je možné stratiť dôveru na základe „ohovárania“. V podstate nik neukázal, že by na Eulerovom kalkule bolo niečo v neporiadku a aj napriek tomu sa presadilo presvedčenie, že pojem nekonečne malého a nekonečne veľkého čísla je vnútorne nekoherentný a teória bola opustená. Preto Eulerova teória asi nie je najvhodnejším kandidátom na re-prezentačne nekonzistentnú teóriu, lebo, prísne vzaté, nespĺňa prvú požiadavku definície tohto pojmu – aby príslušná teória *skutočne bola* nekonzistentná. Ona bola iba za takú *považovaná*. Ale na druhej strane to, že bola v skutočnosti konzistentná, jej nijako nepomohlo; bola odmietnutá, akoby nekonzistentnou bola.

Okrem pozoruhodného faktu, že v samom centre matematiky hrajú fenomény sociálneho presvedčenia takú dôležitú úlohu pri prijímaní či odmietaní určitej teórie – teda aspoň krátkodobo, lebo nakoniec vyšla pravda najavo (i keď dvesto rokov zas nie je až taká krátka doba) – tento príklad je zaujímavý aj z iného hľadiska. Konzistentnosť eulerovskej analýzy bola totiž ukázaná prostriedkami teórie modelov za netriviálneho prispenia techník teórie množín, pričom obe tieto teórie patria k takým, ktorých *logická* a *expresívna* sila (v presnom, technickom zmysle slova, ako sú tieto pojmy zavedené v *Patterns of Change*) ďaleko prevyšujú logickú a expresívnu silu jazyka matematickej analýzy, v ktorého rámci bola Eulerova teória sformovaná. Preto keď sa vrátime k druhému citátu z Mooreovej knihy, ktorý sme uviedli v úvode state, domnievam sa, že určite nie je anachronizmom chápať Robinsonovu prácu ako ospravedlnenie Eulerovho úsilia. Pri odmietaní Eulerovej teórie táto nebola odmietaná preto, že by sa ukázalo, že Eulerovo ***porozumenie*** nekonečne malej veličine bolo nekoherentné. Matematikov 19. storočia rovnako ako matematikov dnes (na rozdiel od filozofov) nezaujíma, ako Euler *rozumel* pojmu nekonečne malej veličiny. Zaujíma ich, či pojem nekonečne malej veličiny je alebo nie je koherentný. Matematici 19. storočia si mysleli, že tento pojem nie je koherentný, preto Eulerovu teóriu zavrhli (nezávisle od toho, čo si mysleli o tom, ako Euler pojmu nekonečne malej veličiny rozumel). Robinson, podľa môjho názoru, ukázal, že pojem nekonečne malej veličiny je koherentný, a tým ukázal, že Eulerova teória bola zavrhnutá neprávom. A ukázanie tohto faktu možno v plnej miere považovať za ospravedlnenie Eulerovej teórie.

4 Záver

Zdá sa, že najvážnejšou formou nekonzistentnosti je tá, ktorú nie je možné opraviť ani pomocou re-prezentácie. Tento druh nekonzistentnosti možno nazvať ***absolútnou nekonzistentnosťou***. Teória, ktorá ju obsahuje, ostáva navždy mimo racionálneho diskurzu. Rozdiel v pohľade matematikov a filozofov na výskyt nekonzistentnosti v matematických teóriách je spôsobený zrejme tým, že filozofi nekonzistentnosť chápu automaticky ako nekonzistentnosť absolútnu. Matematici naproti tomu, vedení historickou skúsenosťou s (***re-formulačne, objektačne*** a ***re-prezentačne***) nekonzistentnými teóriami, sú ochotní sa s takýmito teóriami zaoberať. Štyri pojmy nekonzistentnosti, ktoré navrhujem rozlíšiť, asi nemajú veľký význam z hľadiska aktuálneho bádania. Dnes netušíme, aké *re-formulácie*, *objektácie* a *re-prezentácie* pri-nesie budúcnosť. Majú však význam pri spätnom pohľade na vývin určitej disciplíny, a to ako pre historika tak aj pre filozofa.

a. Racionálnosť ignorovania nekonzistentností

Z pohľadu historika rozlíšenie rôznych typov nekonzistentnosti dáva racionálny obsah d'Alembertovej výzve „*Choďte ďalej, viera sa dostaví!*". Možno ju parafrázovať ako: „*Netrápte sa re-formulačnou či objektačnou nekonzistentnosťou, keď kladiete základy novej re-prezentácie!*" D´Alembert nabádal nestarať sa o nekonzistentnosť nižšej úrovne než je lingvistická úroveň, na rozvíjaní ktorej matematik pracuje. Ide o to, že v priebehu 18. storočia sa kládli základy novej re-prezentácie – diferenciálneho a integrálneho počtu. Preto paradoxy, ako je ten, na ktorý upozorňoval Berkeley, je rozumné *dočasne* ignorovať, a vrátiť sa k nim, až keď budú položené *základy novej re-prezentácie*.

Keď v Newtonovi a Leibnizovi budeme vidieť tvorcov nového ***jazyka***, nemusíme klásť dôraz na logickú nekonzistentnosť ich ***teórií*** (ako A. W. Moore v citáte z úvodu tejto state) a môžeme si všímať to, ako pracujú s funkcionálnymi premennými (čo je zásadne nový typ premenných, ktoré diferenciálny a integrálny počet do matematiky priniesol), aké operácie na ne aplikujú (operácie derivovania a integrovania), … . To, že pre svoj kalkul nedokázali nájsť konzistentné zdôvodnenie, je vedľajšie. Najskôr musíme kalkul vytvoriť, aby sme ho mohli zdôvodňovať.

Tým nechcem obhajovať nekonzistentnosť. Chcem len povedať, že práca matematika prebieha na rôznych úrovniach, a *nekonzistentnosti nižších úrovní je možné dočasne ignorovať*[10] a sústrediť sa na budovanie vyššej úrovne. Existovalo veľmi málo matematikov, ktorí sa stali zakladateľmi novej re-prezentácie – Newton a Leibniz, rovnako ako Frege či Cantor patrili medzi nich. Preto to, že sa v ich diele vyskytujú logické nekonzistentnosti, neznižuje jeho hodnotu. Uvedené nekonzistentnosti sa totiž dajú ošetriť, a nasledovnými generáciami aj ošetrené boli (v prípade Newtona Cauchym, v prípade Fregeho Russellom a v prípade Cantora Zermelom). Nechcem znižovať význam Cauchyho, Russellovej či Zermelovej práce, predsa však ho možno iba ťažko prirovnať k významu prác Newtona, Frega či Cantora. Myšlienka počítať obsahy

---

10 *Re-formulácia* je chápaná ako zmena nižšej úrovne než *objektácia*, rovnako ako *objektácia* je chápaná ako zmena nižšej úrovne než *re-prezentácia*.

a objemy útvarov invertovaním operácie derivovania; myšlienka považovať výroky za funkcie, či myšlienka pokračovať v generovaní číselnej postupnosti aj za nekonečnom – tieto myšlienky znamenajú prielom do úplne nových svetov. To, že sa pritom vyskytli určité logické problémy, je len vedľajšia nepríjemnosť.[11]

b. Nevyhnutnosť ignorovania nekonzistentností

Klasifikácia nekonzistentností vysvetľuje opodstatnenosť ignorovania nekonzistentností aj v ďalšom zmysle. Newton a Euler *nemali šancu spraviť svoje teórie konzistentnými*. Jazykovými prostriedkami existujúcimi v ich dobe jednoducho nebolo možné vytvoriť konzistentné základy diferenciálneho a integrálneho počtu. Stáli teda pred možnosťou žiadny diferenciálny a integrálny počet nerozvíjať a držať sa prísnych štandardov logickej konzistentnosti. Potom by sme však nemali ani modernú fyziku ani modernú technológiu. Druhou alternatívou, práve tou, pre ktorú sa Newton, Euler a desiatky matematikov ich doby rozhodli, bolo rozvíjať diferenciálny a integrálny počet tak, ako sa dá.

To, že jazykovými prostriedkami dostupnými v dobe Newtona a Eulera skutočne nebolo možné vytvoriť logicky konzistentnú teóriu diferenciálneho a integrálneho počtu, alebo aspoň doposiaľ nik také niečo nepredložil, možno zdôvodniť pomocou teórie objektácií (v prípade Newtonovej teórie) a teórie re-prezentácií (v prípade Eulerovej teórie). Dôležité je uvedomiť si, že konzistentná verzia Newtonovej teórie *fluxií* a *fluent* bola vytvorená Cauchym za použitia ***interpretatívnej formy*** jazyka matematiky. Zdá sa však, že postupnosť foriem od perspektivistickej cez projektívnu, koordinatívnu, kompozitívnu až po interpretatívnu a integratívnu nie je náhodná, ale každá forma v tejto postupnosti je vybudovaná za využitia predošlej. Interpretatívna forma (prvá forma, ktorá je dosť bohatá, aby mohla sformulovať lo-

---

11 Tento argument pripomína tézu I. Lakatosa, ktorú sformuloval v rámci svojej metodológie vedecko-výskumných programov. Tvrdil, že rodiaci sa program má spravidla horšie výsledky ako program etablovaný – často protirečí empirickým faktom, dáva horšie predpovede. Ale novému programu treba dať určitú dobu, kým sa dostatočne rozpracuje, a počas tejto doby nie je vhodné ho kriticky hodnotiť (a prípadne falzifikovať). Rozdiel oproti Lakatosovi je v tom, že v našom prípade ide o teórie matematické a nie vedecké, a pre matematiku Lakatos predložil úplne inú metodologickú analýzu – teóriu dôkazov a vyvrátení.

gicky konzistentnú teóriu diferenciálneho a integrálneho počtu) sa teda nemohla zrodiť prv, než boli vybudované formy ju predchádzajúce – ***perspektivistická, projektívna, koordinatívna a kompozitívna***. Preto diferenciálny a integrálny počet, vybudovaný prostriedkami týchto chudobnejších foriem, je nutne logicky nekonzistentný.

Podľa môjho názoru nekonzistentnosť, na ktorú upozorňuje Berkeley, nie je nedostatkom Newtonovho myslenia. Padá skôr na vrub jazyka než konkrétneho matematika. Newtonova veľkosť spočíva v tom, že aj keď sa ako matematicky cítiaci duch logickej nekonzistentnosti štítil, akceptoval obmedzenia jazyka, a v jazyku s nedostatočným *abstrakčným, diferenciačným, explikačným, unifikačným, relativizačným a regularizačným* potenciálom (pozri Kvasz 2010) vytvoril, čo bolo možné vytvoriť. Mojím návrhom je chápať Newtonovu teóriu ako priemet konzistentnej teórie diferenciálneho a integrálneho počtu do jazykového rámca, v ktorom sa mnohé rozlíšenia nevyhnutne stratia (teda jazyk, a nie Newton ich nie je schopný udržať) a produktom tohto procesu je potom metóda, ktorú napáda Berkeley. Ak je táto analýza správna, do značnej miery relativizuje význam logickej kritiky. Keby Newton poslúchol maximu logickej konzistentnosti, matematická analýza by nikdy nevznikla. Nevyhnutné bolo pestovať logicky nekonzistentnú teóriu až dovtedy, kým vnútornou diferenciáciou jazyk nedospel k dostatočne bohatej forme, ktorá umožnila Cauchymu a Weierstrassovi predložiť logicky konzistentnú variantu tejto teórie.

Poďakovanie

Príspevok vznikol v rámci programu *Fellowship Jana Evangelisty Purkyně* vo Filozofickom ústave AV ČR.

Oddělení analytické filosofie
Filozofický ústav
Akademie věd České republiky
Jilská 1
110 00 Praha 1
Česká republika
ladislavkvasz@gmail.com

Literatúra

ABEL, N. H. (1826): Untersuchungen über die Reihe … . *Journal für reine und angewandte Mathematik* **1**, 311-339.

BERKELEY, G. (1734): *The Analyst; or, a Discourse Adressed to an Infidel Mathematician… .* In: Luce, A. A. – Jessup, T. E. (eds.) (1951): *The Works of George Berkeley, Bishop of Cloyne*, **4**. London.

BOSS, H. J. M. (1980): Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition. In: Grattan-Guinness (ed.) (1980), 49-93.

CAUCHY, A. L. (1821): *Cours d'analyse*. Citované podľa anglického prekladu: Bradley, R. E. – Sandifer, C. E. (2009): *Cauchy's Cours d'analyse, An Annotated Translation*. Springer.

COURANT, R. (1927): *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 1*. Berlin: Springer. Citované podľa ruského prekladu *Kurs differencialʹnogo i integralʹnogo isčislenija I*. Moskva: Nauka 1967.

DAVIS, M. (1977): *Applied Nonstandard Analysis*. New York: John Wiley.

EDWARDS, C. H. (1979): *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer.

EULER, L. (1748): *Introductio ad analysin infinitorum*. Lausanne. Ruský preklad: *Vvedenie v analiz beskonečnych*. Moskva: GIFML 1961.

FAUVEL, J. – GRAY, J. (eds.) (1987): *The History of Mathematics. A Reader*. London: Macmillan.

GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.) (1980): *From the Calculus to Set Theory*. London: Duckworth.

GUICCIARDINI, N. (1999): Newtons *Methode* und Leibniz' *Kalkül*. In: Jahnke, H. N. (ed.) (1999), 89-130.

JAHNKE, H. N. (ed.) (1999): *Geschichte der Analysis*. Heidelberg: Spektrum.

JAHNKE, H. N. (1999): Die algebraische Analysis des 18. Jahrhunderts. In: Jahnke, H. N. (ed.) (1999), 131-170.

KATZ, K. – KATZ, M. (2011): Cauchy's continuum. *Perspectives on Science* **19**.

KUHN, T. S. (1962): *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: Chicago University Press. Citované podľa slovenského prekladu *Štruktúra vedeckých revolúcií*. Bratislava: Pravda 1982.

KVASZ, L. (2008): *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Basel: Birkhäuser Verlag.

KVASZ, L. (2010): Náčrt teórie potencialít jazyka matematiky. In: Kvasnička, V., Pospíchal, J., Návrat, P., Lacko P. a Trebatický P. (eds.): *Umelá inteligencia a kognitívna veda II.* STU v Bratislave, 263-290.

LAKATOS, I. (1966): Cauchy and the Continuum: the Significance of Non-standard Analysis for the History of Mathematics. In: Lakatos, I. (1978), 43-60.

LAKATOS, I. (1978): *Mathematics, Science, and Epistemology. Philosophical Papers of Imre Lakatos Volume II*. Cambridge: Cambridge University Press.

LAUGWITZ, D. (1987): Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks. *Historia Math.* **14**, 258-274.

LEIBNIZ, G. W. (1684): Nová metóda maxím a miním, ako aj dotyčníc, ktorá nie je viazaná na zlomky ani na iracionálne čísla, a zvláštny spôsob ich počtu. In: Leibniz, G. W. (1956).

LEIBNIZ, G. W. (1956): *O reforme vied*. Bratislava: Vydavateľstvo SAV.
LÜTZEN, J. (1999): Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. In: Jahnke, H. N. (ed.) (1999), 191-244.
MOORE, A. W. (1990): *The Infinite*. London: Routledge. Citované podľa druhého vydania z roku 2001.
ROBINSON, A. (1966): *Non-Standard Analysis*. Amsterdam: North Holland.