Matematický realismus a naturalismus Penelope Maddy[1]

Vít Punčochář

Akademie věd České republiky, Praha
Univerzita Karlova v Praze

Abstract: This paper discusses different forms of mathematical realism and especially different kinds of advocating realistic position. Husserl's phenomenological approach, Gödel's (phenomenological and) methodological approach and Quine's naturalistic approach are presented. Afterwards, Maddy's realism is reconstructed as a synthesis of Gödel's and Quine's views, overcoming weaknesses of both. Also Maddy's later rejection of her own realism and its replacement by naturalistic project are discussed. At the end, we are offering our own interpretation of the problem of realism in mathematics.

Keywords: Mathematical realism, mathematical naturalism, Husserl, Gödel, Quine, Maddy.

1 Úvod

Matematický realismus je založen na představě, že matematické objekty existují nezávisle na našem jazyku, v němž o nich hovoříme, na našich definicích či konstrukcích těchto objektů, na naší schopnosti poznávat tyto objekty a celkově na naší matematické praxi. Pravdivost platných matematických vět je podle tohoto pohledu určena primárně charakterem objektivního světa matematických struktur a nikoli např. tím, že existuje důkaz těchto vět. Důkazy jsou chápány spíše jako posloupnosti kroků zachovávajících pravdivost než jako skutečné důvody pravdivosti.

---

[1] Práce na tomto článku byla podpořena z grantu GAČR P401/11/0371 Apriorní, syntetické a analytické od středověku po současnou filosofii.

Klíčová postava logiky 20. století a zastánce matematického realismu, Kurt Gödel, píše, že „objekty a teorémy matematiky jsou tak objektivní a nezávislé na naší svobodné volbě a naší kreativní činnosti, jako je fyzický svět“ (citát převzat z Maddy 1997, 89). Matematický realismus tedy může být chápán také jako teze, že matematika zkoumá matematické objekty ve stejném smyslu, v jakém fyzikové zkoumají objekty materiálního světa. Podobnou charakterizaci realismu najdeme také např. u Maddy (1990, 20) či u Kvasze (2010, 522).

Tato práce pojednává o různých způsobech zdůvodnění realismu, které ústí do různých podob realismu samotného. Rozlišíme přitom nejprve tři typy, které pracovně můžeme označit jako fenomenologický (Husserlův), metodologický (Gödelův) a naturalistický (Quinův) způsob zdůvodnění. Centrum práce pak tvoří výklad realismu Penelope Maddy, který je syntézou Gödelova a Quinova přístupu. Dalším tématem bude otázka, co vedlo Maddy k tomu, že svůj realismus opustila a proč ho nahradila svým naturalistickým postojem. V závěru uvedeme vlastní interpretaci realismu, která je z jedné strany motivovaná Husserlovým realismem a z druhé naturalismem Penelope Maddy, přestože ten byl původně zformulován spíše v opozici k realistické pozici. Vedle variace podob realismu samotného také význam slova „naturalismus“ bude v průběhu práce kolísat. Přes určité vnitřní souvislosti je třeba mít na paměti, že Quinův naturalistický způsob zdůvodnění realismu se odlišuje od naturalismu Penelope Maddy a na něm založené naší interpretaci realismu, kterou uvádíme v poslední části práce.

2 Husserlův realismus

Matematický realismus se jeví jako filosofie, která je v harmonickém souladu s běžnou matematickou zkušeností, s tím, co matematici prožívají, když provozují svoji vědu a co konec konců prožívá kdokoli, kdo řeší nějakou matematickou úlohu. Tak např. Moschovakis uvádí, že „hlavním bodem ve prospěch realistického přístupu k matematice je instinktivní jistota téměř každého, kdo vůbec někdy zkoušel řešit nějaký problém, že přemýšlí o ‚reálných objektech‘, ať už to jsou množiny, čísla nebo cokoli …“ (citát převzat z Maddy 1990, 2).

Na specifickém charakteru matematické zkušenosti je založen Husserlův fenomenologický způsob zdůvodnění realismu. Ten je nejpřehlednějším způsobem vyložen v Husserl (1913) a (1929).

Husserl vychází z perceptivní zkušenosti. Např. prožitek vidění chápe jako zvláštní stav vědomí, v němž nám jsou určitým způsobem dány materiální prostorové věci. Jinými slovy, ve specifickém charakteru prožitku smyslového vnímání je právě to, že se *v něm* před nás reálně staví určitý předmět (odlišný od prožitku samotného). A je celá sféra předmětů, které se nám takto dávají a mohou dávat, totiž viditelná fyzická příroda. Avšak předmět, který takto vnímáme, není pro Husserla „pouze něčím individuálním, nějakým ‚toto zde', něčím jednorázovým; je *‚sám v sobě'* tak a tak ustrojený, a tudíž má svůj *svéráz*, svou skladbu *podstatných* predikabilií, které mu musejí příslušet…, aby mu pak mohla příslušet jiná určení, totiž určení sekundární, relativní" (Husserl 1913, 23). V tomto smyslu má každá materiální věc svoji podstatu (eidos). K zachycení podstaty lze dojít tak, že předmět ve fantazii podrobíme svobodné variaci jeho možných podob a zachytíme invariant, kterým je právě ona podstata. Podle Husserla je dokonce možné vysledovat celou hierarchii podstat, protože z podstat můžeme získávat obecnější podstaty. Každý podstatný moment podstaty je sám podstatou. Podstaty získáváme nejen sledováním toho, co je pro jednotlivé předměty podstatné, ale také pozorováním toho, co má více různých předmětů společného. Podstata „materiální věc vůbec" je podstatou všech materiálních věcí. Nejobecnější podstaty určují tzv. „regiony" předmětů. Názorným příkladem je region „fyzická příroda". Ale podstaty můžeme získávat i např. z vnitřního vnímání. Můžeme zachycovat podstaty vlastních světských duševních stavů (nás jakožto lidí ve světě). Tímto dospějeme k regionu „duše". K regionům podstat se vztahují kategorie, které vyjadřují formu podstat (tato forma je sama podstatou odlišného typu). „*Čistě logické základní pojmy*… definujeme nyní jako *logické kategorie* či *kategorie logického regionu ‚předmět vůbec'*. … Patří sem ale i *‚významové kategorie'*… s ohledem na podstatné pravdy spojující ‚předmět-vůbec' a ‚význam-vůbec'" (Husserl 1913, 36). Mezi tyto čisté logické základní pojmy řadí Husserl i pojmy čisté matematiky.

Podle Husserla podstatu samu můžeme „vnímat" analogickým způsobem, jako můžeme vnímat individuální přírodní objekty. Máme specifické prožitky, v nichž nám jsou dány podstaty. Způsob, jakým jsou nám dány, je rovnocenný s daností individuálních materiálních věcí v prožitcích vidění těchto věcí. „I nazření podstaty je ve vlastním smyslu názorem, stejně tak jako je eidetický předmět ve vlastním smyslu předmětem" (Husserl 1913, 25). Dochází zde k rozšíření pojmů

„vnímání“, „zkušenost“, „nazírání“ a vzniká nový pojem tzv. „originárního“ uchopení předmětu, což představuje prožitek přímé danosti nějakého předmětu (předmětu v nejobecnějším, logickém smyslu).

Regiony se sice vyznačují vzájemnou komplikovanou provázaností (např. region „duše“ je fundován v regionu „materiální věc“, přestože se jedná o odlišné regiony), ale v jistém smyslu jsou rovnocenné. Husserl nevidí důvod tvrdit, že originární dávání se přírodního předmětu v prožitku vidění tohoto předmětu je více vnímáním než originární dávání se takového ideálního útvaru, jako je např. číslo v nazírání tohoto čísla. Dojem, že to tak je, je podle Husserla přirozeným předsudkem. „Slepota vůči idejím je jistým druhem duševní slepoty… Ve skutečnosti všichni a takřka neustále vidí „ideje“, „podstaty“, operují s nimi v myšlení, provádějí i soudy týkající se podstat“ (Husserl 1913, 53).

Husserlův „princip všech principů“ říká, že

> *každý originárně dávající názor je zdrojem oprávnění pro poznání a že vše, co se nám v „intuici“ originárně nabízí* (takříkajíc ve své tělesné skutečnosti), *je třeba brát jednoduše tak, jak se to dává*, ale rovněž *jen v mezích, v nichž se to zde dává*. (Husserl 1913, 56)

Z tohoto hlediska má být filosoficky zdůvodněna např. aritmetika jako věda o číslech, protože předměty, o kterých pojednává, nám jsou originárně dány v odpovídajících názorech. Je přitom nutné v těchto vědách respektovat smysl originárně daných předmětů a chápat je skrze něj. To konkrétně znamená, že respektujeme, že čísla a jiné matematické objekty jsou objektivní, nezávisle existující předměty, stejně tak jako jimi jsou předměty přírodních věd.

Následující citace se opět vztahuje na předměty logiky pojaté v širokém smyslu, tj. zahrnující též matematické objekty:

> Všechno toto objektivní nemá jen pomíjivou existenci toho, co vystupuje a zaniká v tematickém poli jako aktuální výtvor. Má také smysl bytí setrvalé platnosti, ba dokonce objektivní platnosti ve zvláštním smyslu, přesahující aktuální poznávající subjektivitu a její akty. Zůstává v opakování identickým, je znovu rozpoznáno ve způsobu jsoucího, které setrvává; má ve formě dokumentace objektivní existenci, stejně jako ostatní předmětnosti konkrétního světa: je tu v objektivním trvání pro každého, v tomtéž smyslu znovu pochopitelné, intersubjektivně identifikovatelné, existující, i když je nikdo nemyslí. (Husserl 1929, 50)

Je specifikem fenomenologie, že se u tohoto nezastavuje. Ať je jakkoli pro logiku a matematiku nutné takovéto pojetí svých objektů (založené na respektování jejich smyslu), filosofie těchto věd by si s tím podle Husserla vystačit neměla, protože věda, „která je přímo zaměřena na svou vlastní tematickou sféru a která rozvíjí svou aktivitu výlučně vzhledem k jejímu poznání, zůstává vězet v naivitě, která jí uzavírá filosofickou přednost radikálního sebepochopení a principiálního sebezdůvodnění“ (Husserl 1929, 160).

Právě od této ideje se odvíjí Husserlův projekt transcendentální logiky, který je založen na přesunu intencionálního zaměření od objektů logiky k prožitkům, ve kterých se tyto objekty konstituují:

> Opačný směr logické tematiky je směr subjektivní. Ten je zaměřen na hluboko skryté subjektivní formy, v nichž teoretický ‚rozum‘ uskutečňuje své výkony. Nejprve je zde předmětem tázání *rozum v jeho aktualitě*, totiž intencionalita, která probíhá v živoucím výkonu a v níž ony objektivní útvary mají svůj ‚původ‘. (Husserl 1929, 50)

Tím jsme narazili na paradoxně znějící aspekt celého myšlenkového postupu. To, co má smysl nezávislé existence, má zároveň původ v nějakém výkonu vědomí. K tomuto problému se ještě vrátíme v poslední části této práce.

3 Gödelův realismus

Husserlova fenomenologická filosofie logiky a matematiky zůstala bohužel více méně v podobě pouhého projektu. Tento projekt však velmi ovlivnil filosofické názory Kurta Gödela. Než vyložíme, jak se nechal Gödel fenomenologií inspirovat, musíme alespoň stručně nastínit problematiku základů matematiky.

Gödelův matematický realismus (podobně jako realismus Penelope Maddy) se vztahuje především na objekty teorie množin. To je motivováno tím, že existují dobré důvody považovat teorii množin (v poměrně jasném smyslu) za „ontologii matematiky“. Množiny nejsou žádné bezproblémové objekty. Russellův a další paradoxy ukázaly, že chceme-li udržet bezespornost, nevystačíme s jednoduchým intuitivním či „naivním“ pojetím množiny jako libovolného souboru objektů. Avšak ukázalo se, že předpokládáme-li pojem množiny jakožto daný, daří se redukovat na něj každý jiný matematický pojem. Jinými slovy, každý matematický objekt lze modelovat jako určitou množinu. Pojem množiny je tedy natolik bohatý, že obsahuje veškerou rozmanitost matematických struktur. V důsledku lze každou matematickou větu přeložit do jazyka teorie množin.

Postupem času bylo navrženo pro teorii množin několik axiomatických systémů, z nichž nejvíce studovaná a používaná je tzv. Zermelo-Fraenkelova axiomatizace obohacená o axiom výběru[2] (značí se ZFC a bez axiomu výběru jen ZF). Úspěch a síla tohoto systému sestávajícího z několika málo přehledných formulí (resp. schémat) spočívá v tom, že v něm lze dokázat každou větu, která dosud byla v matematice dokázána.[3] Existuje tedy jasný smysl, ve kterém lze tuto teorii považovat za věrnou formalizaci matematiky.[4] Další výhodou je, že tento model (tj. ZFC) je sám matematickým objektem a lze o něm vynášet matematické výroky a dokazovat je. Např. lze o nějaké konkrétní formuli (která může být chápána jako překlad skutečného matematického tvrzení) ukázat, že není v tomto systému dokazatelná.

Zvláštní výzvu pro realismus představuje fakt, že existují určité matematické výroky, jejichž množinově teoretický korelát není v ZFC dokazatelný ani vyvratitelný (jinak řečeno, ZFC je neúplná teorie). A je to právě slavná Gödelova věta o neúplnosti, která říká, že situace nebude lepší pro žádný uzavřený axiomatický systém (je-li tento systém dostatečně silný a existuje-li algoritmus, na jehož základě lze rozhodnout, co je axiom tohoto systému a co ne). Jak lze očekávat, pro Gödela tento fakt neznamená, že nezávislé výroky nemají pravdivostní hodnotu, ani že tato hodnota je pro nás nedosažitelná. Podle Gödela význam pojmu množiny připouští otevřený proces přijímání nových a nových axiomů,

---

2 Axiom výběru říká, že pro každou množinu x disjunktních množin existuje množina y, která obsahuje právě jeden prvek z každé množiny, která náleží x. Tento princip je „nekonstruktivní" povahy, protože se velice často stává, že k dané množině x nejsme schopni množinu y zkonstruovat a na základě axiomu výběru přesto musíme předpokládat její existenci.

3 Toto tvrzení není samo matematickým tvrzením. Nelze tedy pro něj předvést striktní důkaz. V jeho prospěch však svědčí to, že je v souladu se zkušeností mnoha matematiků a nebyl k němu dosud nalezen žádný významný protipříklad. Můžeme tedy říct, že se jedná o tezi, která je stejně tak dobře podložena jako třeba darwinovská teorie evoluce.

4 Teorie množin nepředstavuje jediný možný způsob, jak vybudovat základy matematiky. Alternativou je především tzv. teorie kategorií. Viz např. Goldblatt (1979).

které vyjadřují další iterace operace „množina těch a těch prvků“ („set of …“): „Axiomatický systém teorie množin, jak se dnes používá, je neúplný, … může být doplněn bez libovůle novými axiomy, které jen rozvíjejí obsah pojmu množiny“ (Gödel 1947, 68-69).

Avšak na základě jaké metody máme tyto axiomy přijímat, když pojem množiny je základním pojmem, takže pro něj neexistuje žádná definice fixující jeho význam a ve stávajících axiomech je jeho význam uchopen jen částečně? Na základě čeho tedy lze objasňovat smysl pojmu množiny? Ve své době k tomu Gödel uvádí, že

> dnes existují začátky jedné vědy, která tvrdí, že má systematickou metodu pro takové vysvětlování smyslu, totiž Husserlem založená fenomenologie. Vysvětlení smyslu zde spočívá v tom, že se ostřeji soustředíme na ty pojmy, jichž se to týká a to tím, že tuto pozornost jistým způsobem zaměřujeme, totiž na naše vlastní akty při používání těchto pojmů, na naše schopnosti tyto akty provádět atd. Přitom nám musí být jasné, že tato fenomenologie není vědou v témž smyslu jako vědy jiné. Spíše je postupem nebo technikou, která nás má uvést do nového stavu vědomí, v němž do podrobností zkoumáme námi používané základní pojmy našeho myšlení. (Gödel 1995, 209-210)

Níže uvidíme, že naturalismus Penelope Maddy představuje alternativní přístup k této problematice.

Gödelovo pojetí matematické zkušenosti se do značné míry podobá Husserlovu. Oba se domnívají, že tato zkušenost je analogická smyslové zkušenosti s materiálními objekty a oba na tom zakládají svůj realismus. Gödel říká, že

> máme něco jako vnímání i objektů teorie množin, jak je vidět z faktu, že se nám axiomy vnucují samy jakožto pravdivé. Nevidím žádný důvod, proč bychom měli mít menší důvěru k tomuto druhu vjemů, tj. k matematické intuici, než k vnímání smyslovému, které nás vede k vytváření fyzikálních teorií a k očekávání, že další smyslové vjemy s nimi budou souhlasit, a navíc k víře, že otázka, která nyní není rozhodnutelná, má smysl a může být rozhodnuta v budoucnu. Paradoxy teorie množin jsou stěží větší překážkou pro matematiku, než smyslové klamy pro fyziku. (Gödel 1947, 80)

Fenomenologicky motivovaný realismus je však u Gödela doplněn něčím, čemu budeme říkat metodologicky motivovaný realismus. Ten analogii matematiky s přírodními vědami posouvá ještě dále. Podle metodologicky motivovaného realismu matematické skutečnosti, které „vnímáme“, nemusí mít vždy povahu axiomů. My však podobně jako v přírodních vědách hledáme takovou teorii, jejíž důsledky jsou s těmito přímo ověřitelnými daty v souladu. Gödel naznačuje, že toto pojetí má zdroj u Russella:

> Russell přirovnává axiomy logiky a matematiky k přírodním zákonům a logickou evidenci ke smyslovému vnímání, takže axiomy nepotřebují být nutně evidentní samy sebou, nýbrž jejich zdůvodnění spočívá spíše (právě tak jako ve fyzice) ve skutečnosti, že umožňují vyvození těchto „smyslových vjemů“; což by ovšem nevylučovalo, že také mají svého druhu vnitřní věrohodnost podobnou věrohodnosti fyziky. Myslím si …, že následující vývoj dalekosáhle ospravedlnil tento názor. (Gödel 1944, 28)

Ilustrativním příkladem by zde mohla být třeba Bolzanova věta, podle které platí, že pokud funkce f, která je spojitá na intervalu $<a,b>$, nabývá na a a b hodnoty s odlišnými znaménky, pak existuje bod c mezi body a a b, takový, že funkce f nabývá na c hodnotu 0. Toto tvrzení se zdá být zjevné, avšak v rámci teorie musí být odvozeno složitým důkazem z méně zřejmých principů. Bolzano sám se k této problematice vyjadřuje podobně jako Gödel (viz např. Bolzano 1810).

Ale Gödel jde ve svém „pragmatismu“ ještě dále. V matematice, podobně jako ve fyzice, lze někdy přijmout určité tvrzení čistě z toho důvodu, že činí teorii více elegantní:

> I když odhlédneme od vnitřní nutnosti nějakého nového axiomu a dokonce i v případě, kdy nemá žádnou vnitřní nutnost, je možné pravděpodobné rozhodnutí o jeho pravdivosti i jiným způsobem, totiž induktivně studiem jeho „úspěšnosti“. Úspěšnost zde znamená plodnost na důsledky, zvláště na „verifikovatelné“ důsledky, tj. důsledky dokazatelné bez tohoto nového axiomu, jejichž důkazy pomocí nového axiomu jsou však podstatně jednodušší a jejichž nalezení je snadnější a které dovolují stáhnout do jednoho důkazu množství různých důkazů. … Mohly by existovat axiomy s tak hojnými verifikovatelnými důsledky, vrhající tolik světla na celou oblast a dávající tak mocné metody na řešení problémů …, že bez ohledu na to, zda jsou vnitřně nutné, musely by se přijmout aspoň v témže smyslu, jako jakákoli dobře zavedená fyzikální teorie. (Gödel 1947, 70)

Realismu gödelovského typu se často vytýká nejasnost nekauzálního vztahu mezi matematickými objekty a zkušeností, v níž je „vnímáme". Na rozdíl od smyslového vnímání, nemáme k dispozici žádnou rozpracovanou teorii, která by popisovala, jak k takovému vnímání dochází, a která by byla včlenitelná do našeho celkového vědeckého obrazu světa. Tuto námitku zformuloval např. Benacerraf ve svém klasickém článku (1973) a jak uvidíme, právě v tomto ohledu se pokusí Penelope Maddy Gödelův realismus modifikovat.

4 Quinův realismus

Quinův realismus se velice odlišuje od Gödelova a my pouze stručně zformulujeme jeho hlavní myšlenku v té podobě, v jaké na ni navazuje Penelope Maddy v (1990). Podle Quinova holismu nekonfrontujeme se světem jednotlivé výroky, ale vždy jen celé teorie (viz Quine 1951). Naše ontologické závazky jsou určeny tím, přes jaké objekty musí probíhat proměnné těch teorií, které jsme přijali za platné (viz Quine 1948). Jinými slovy, měli bychom uznat existenci právě těch objektů, které potřebujeme k formulaci našich nejefektivnějších vědeckých teorií představujících ty nejjednodušší pojmové rámce, do nichž jsme schopni vměstnat naši „syrovou" zkušenost. Toto kritérium se vztahuje i na matematické objekty. Pokud k vyjádření některých vědeckých faktů (jako je například „molekula vody obsahuje tři atomy") potřebujeme používat čísla a bez čísel je vyjádření těchto faktů nemožné, pak musíme uznat, že čísla existují. Podobně je tomu s jinými matematickými objekty (jako např. s kontinuem), jichž používáme k vyjádření vědeckých faktů, i když tyto fakty mohou mít pochopitelně mnohem složitější podobu než v uvedeném příkladu.

Quinův naturalistický test pro existenci matematických objektů můžeme tedy formulovat jako ekvivalenci:

(QT) Daný matematický objekt existuje právě tehdy, když je nepostradatelný pro přírodní vědy.

Zvláštností Quinova realismu je, že je v kontrastu s běžným pojetím matematického vědění jakožto apriorního, nutného a nerevidovatelného. O tom, které matematické objekty existují a které nikoli, mohou rozhodovat čistě empirické důvody. Proto chápeme tuto argumentaci jako naturalistický způsob zdůvodnění realismu.

5 Realismus Penelope Maddy

Realismus Penelope Maddy kombinuje prvky Gödelova a Quineova přístupu ve snaze vyhnout se nedostatkům obou těchto variant realistické koncepce. Maddy vytýká Quinovu realismu, že není v souladu se skutečnou matematickou praxí: Matematikové v současné době nečekají na to, zda fyzika ospravedlní jejich aktivitu, neboť mají svoje kritéria a svoje metody ospravedlnění. Quinův realismus přiznává existenci pouze některým matematickým objektům – konkrétně těm, které jsou nezbytné pro přírodní vědy. Tak například transfinitní čísla – což jsou klíčové objekty teorie množin – by navrženým testem neprošla a celou vyšší teorii množin bychom pak museli považovat za pouhý „neinterpretovaný kalkul“, tj. pouhou hru s bezvýznamnými symboly. Jak si však potom vysvětlit úspěchy odborníků na teorii množin, nepochybnou smysluplnost jejich činnosti a především jejich neutuchající pocit nelibovůle v jejich disciplíně a toho, že skutečně hovoří „o něčem“ a „něco“ popisují?

Pro naše účely bude užitečné, když si Quinův test (QT) rozložíme na dvě implikace:

(QT1) Je-li daný matematický objekt nepostradatelný pro přírodní vědy, existuje.
(QT2) Je-li daný matematický objekt postradatelný pro přírodní vědy, neexistuje.

Maddy (1990) přijímá pouze polovinu Quinova testu, totiž tvrzení (QT1), které má zajistit existenci některých centrálních matematických objektů, např. kontinua. Avšak vzhledem k autonomii matematické praxe nemůže být fyzika konečným a jediným arbitrem existence matematických objektů. Maddy (1990) proto neakceptuje (QT2). Místo toho se domnívá, že aplikovatelnost částí matematiky ospravedlňuje realistický status matematické praxe jako celku. Pro obhajobu existence objektů neaplikované matematiky používá Maddy Gödelův metodologický způsob zdůvodnění.[5]

Gödelův realismus je v podstatě přesným opakem Quinova, neboť vychází důsledně z matematické praxe. Jeho nedostatkem podle Maddy (1990) je, že nezdůvodňuje, proč bychom měli věty matematiky chápat tak, že se nějak vztahují ke skutečnosti.

[5] Zdá se, že Quine dospívá ve své knize (1992) k podobnému stanovisku.

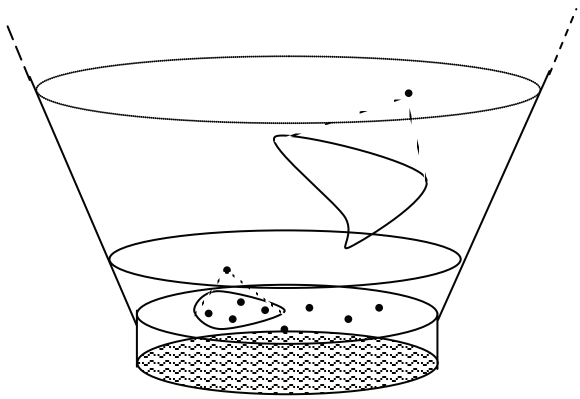
Pokud tedy shrneme a zjednodušíme syntézu Quinova a Gödelova realismu z Maddy (1990), dostaneme následující úvahu: Samotné metodologické úvahy nezajistí realistický status matematiky, můžeme však metodologicky zdůvodnit, že pokud existují některé centrální matematické objekty, řekněme kontinuum, pak existují i všechny ostatní matematické objekty, které naše nejlepší teorie kontinua vyžaduje, tedy např. i hierarchie transfinitních čísel. Tolik Gödel. (QT1) pak dodá antecedent této implikace, totiž tvrzení, že existují některé centrální matematické objekty, např. kontinuum. Důsledkem je, že musíme přijmout také existenci transfinitních čísel a jiných objektů neaplikované matematiky. Ve zkratce se dá tedy říct, že úsudek má formu: všechno nebo nic (Gödel), něco (Quine), tudíž všechno.

Fenomenologický způsob zdůvodnění realismu postuluje možnost nekauzálního „vnímání“ objektů, které jsou mimo prostor a čas a které tedy ani kauzálně působit nemohou. Maddy (1990) akceptuje Benaceraffovu kritiku, ale aby zachovala dvouvrstevnost vysvětlení matematické existence a tím udržela analogii matematiky s přírodními vědami, formuluje místo fenomenologického způsobu zdůvodnění něco, co bychom mohli nazvat psychologický způsob zdůvodnění. Podobně jako fenomenologický je i psychologický způsob zdůvodnění založen na jistém typu zkušenosti s matematickými objekty. Tato zkušenost však není pojata transcendentálně, jako u Husserla, a není to zkušenost objektů nějaké „třetí říše“ (viz Frege 1918). Místo toho se jedná o kauzálně způsobenou, fyziologicky fundovanou zkušenost s objekty tohoto světa.

Zvláštností psychologického realismu tedy je, že matematické objekty v něm vystupují jako konkrétní entity v prostoru a čase, což je v rozporu s tradičním pojetím.

Maddy tvrdí, že doslova vnímáme vedle jednotlivých fyzických předmětů také množiny těchto předmětů, např. množinu tří vajíček v lednici (abychom užili její příklad, viz Maddy 1990, 58). Toto tvrzení podporuje některými psychologickými závěry Jeana Piageta a fyziologickou teorií Donalda Hebba. Přijmeme-li takovéto tvrzení, pak nemáme menší důvod věřit v existenci množin vajíček než v existenci vajíček samotných. Avšak množiny vajíček jsou matematické objekty. Přímo tedy vnímáme jisté matematické objekty jakožto součást světa.

Celý obraz fyzikálního světa, tak jak ho vidí Maddy v roce 1990, lze ilustrovat následovně:



Spodní vyplněný ovál zde reprezentuje „beztvarou hmotu“, nad ním je ovál obsahující hmotné předměty a z toho v jednotlivých vrstvách vyrůstá hierarchie množin „generovaná“ operací potence. Prvky množin tvoří na nejnižší úrovni hmotné předměty a na vyšších úrovních jiné množiny.

Na Chiharovu námitku, že perceptuálně neodlišíme hmotný předmět x od singletonu $\{x\}$ (tj. množiny obsahující pouze tento předmět), odpovídá Maddy, že nejlépe uděláme, když x a $\{x\}$ ztotožníme. Není to sice jediné možné řešení, je však obzvláště lákavé, protože poté se fyzikální objekty a matematické předměty dostanou do skutečné symbiózy: Platí-li pro materiální předměty $x=\{x\}$, pak vůbec každý konkrétní předmět je množinou, tedy matematickým předmětem, takže pokud ze světa odstraníme matematické předměty, zbude nám pouze „beztvará hmota“; a obráceně: protože každý reálný matematický předmět je fundován v hmotě, tak kdybychom odstranili ze světa hmotu, nezbyl by nám ani žádný matematický předmět. Hmotě nelze přiřadit číslo. Číslo lze přiřadit vždy jen množinám. Proto hmotu s množinami ztotožnit nelze. Avšak jednotlivým předmětům přiřadit číslo lze – a to vždy číslo jedna stejně jako singletonům těchto předmětů. Uvedenému ztotožnění tedy nic nebrání.[6]

[6] Takovéto ztotožnění však nelze aplikovat na množiny, které nejsou materiálními předměty. Např. množinu $\{x, y\}$ nelze ztotožnit s množinou $\{\{x,y\}\}$, neboť první má dva prvky a druhá jeden.

Otázkou je, kde se v tomto obrazu nachází prázdná množina. Maddy argumentuje, že bez prázdné množiny se lze konec konců obejít a její existenci nemusíme předpokládat. Lze ji považovat za užitečnou fikci zjednodušující technickou práci. Ordinální čísla, která jsou na prázdné množině vystavěna a na nichž zase závisí mnoho dalších matematických objektů, lze zkonstruovat i bez prázdné množiny. Množinově teoretický korelát posloupnosti přirozených čísel (0, 1, 2, 3, 4, …) tvoří posloupnost

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \ldots$$

Tu lze nahradit např. řadou využívající materiální objekty x a y:

$$\{x\}, \{x,y\}, \{x,y,\{x,y\}\}, \{x,y,\{x,y\},\{x,y,\{x,y\}\}\}, \{x,y,\{x,y\},\{x,y,\{x,y\}\},\{x,y,\{x,y\}, \{x,y,\{x,y\}\}\}\}, \ldots$$

Maddy přijímá předpoklad běžně spojovaný s realismem, že pokud přijmeme, že existuje takto fixně daný svět matematických struktur (reprezentovaných množinami), pak každé tvrzení v jazyce teorie množin by mělo mít v této hierarchii množin jednoznačně určenou pravdivostní hodnotu. Tedy také každé tvrzení, které je nezávislé na ZFC, by mělo být buď pravdivé, nebo nepravdivé. Gödelovy metodologické úvahy naznačují, že existují způsoby argumentace zdůvodňující pravdivost resp. nepravdivost nezávislých matematických výroků. Tyto argumenty musí mít nedemonstrativní povahu v tom smyslu, že se nejedná o běžné matematické důkazy. Maddy (1990) považuje za největší výzvu pro svůj realismus popis, vysvětlení a ohodnocení takových možných argumentů.

Později, při snaze rozpracovat právě tuto klíčovou otázku, naráží Maddy na jisté problémy se svou koncepcí. Na jejich základě postupně realismus opustí a svůj nový přístup nazve naturalismem. Důvody, které Maddy vedou k odmítnutí svého realismu, si přiblížíme v následující části tohoto textu. K těmto důvodům se přidává důkladná kritika jejího realismu formulovaná v Lavine (1992), Balaguer (1994), Riskin (1994) a Carson (1996). Tato kritika, kterou Maddy v podstatě akceptuje, je shrnuta a rozebrána v Kvasz (2010).

6 Naturalismus Penelope Maddy

Maddy postupem času začala pochybovat o přijatelnosti principu (QT1), který tvořil významný pilíř jejího realismu. S odmítnutím tohoto principu realismus opouští.

Maddy ilustruje na příkladu atomu, proč nepostradatelnost nějakého konceptu nemusí nutně vést k přijetí jeho existence:

> Do roku 1900 překypovala atomická teorie všemi pěti teoretickými přednostmi [které zformuloval Quine, jsou jimi jednoduchost, známost principů, rozsah, plodnost a testovatelnost důsledků]; její síla a užitečnost se stávala zřejmější a zřejmější s každým experimentálním a pojmovým krokem vpřed … Navzdory těmto přednostem atomické teorie se vědci neshodovali ohledně reality atomů. (Maddy 1997, 138)

Přes nepostradatelnost atomů mnozí považovali atomy za užitečné fikce – a to až do té doby než Einstein uskutečnil jisté experimenty, v nichž Brownův pohyb částic v tekutině vedl k bezprostředním, mikroskopicky pozorovatelným efektům.

Zdá se tedy, že nepostradatelnost není postačující podmínkou existence. Na tomto základě začala Maddy pochybovat také o tom, zda se kontinuum v aplikacích používá v doslovném smyslu či jako idealizace – podobně jako se předpokládá při výpočtech trajektorií, že povrch daného úseku země je rovný či když vědci při analýze vln na povrchu oceánu předpokládají, že oceán je nekonečně hluboký (k tomu viz Maddy 1990, 143-152).

Maddy v (1990) odmítla (QT2), neboť není v souladu s matematickou praxí. Později v (1997) ale dospěla k závěru, že stejný problém platí i pro (QT1), i když v méně zřejmé podobě. Vraťme se k tématu nezávislých tvrzení teorie množin. Pokud přijmeme realismus založený na (QT1), pak otázka, zda mají nezávislá tvrzení teorie množin jednoznačně určenou pravdivostní hodnotu, závisí na dosud nerozhodnuté otázce týkající se doslovných aplikací kontinua ve fyzice. Pokud jsou všechny aplikace kontinua ve fyzice pouhé idealizace, nemáme dostatek důvodů přijmout do naší ontologie kontinuum spolu s celým množinově teoretickým rámcem, v němž je formulována jeho nejlepší teorie. Pak ale nemáme ani důvody domnívat se, že pravdivostní hodnota nerozhodnutelných tvrzení je jednoznačně určena. Pokud však potřebujeme doslovné aplikace kontinua, důsledkem (QT1) a na něm založeném realismu je, že hodnota těchto tvrzení jednoznačně určena je.

Pak by se ale zdálo, že odborníci na teorii množin budou s napětím sledovat vývoj některých fyzikálních teorií a v závislosti na něm se budou nebo nebudou pokoušet hledat nedemonstrativní argumenty ve prospěch té či oné pravdivostní hodnoty nezávislých tvrzení. To se však neděje. K pokusům rozhodnout tato tvrzení dochází zcela bez ohledu na aktuální praxi fyziky. Role kontinua ve fyzikálních teoriích nemůže mít na status nezávislých tvrzení žádný vliv.

Dalším argumentem, který vedl Maddy k opuštění množinového realismu je, že při bližším pohledu na praxi teorie množin je významným způsobem zpochybněna její analogie s přírodními vědami. Můžeme říci, že pro přírodní vědy platí do jisté míry princip Ockhamovy břitvy, tj. princip ekonomie teorie, podle něhož nezmnožujeme teoretické entity nad nezbytnou míru. Naopak teorie množin se snaží poskytnout co nejširší rámec, v němž lze při zachování konzistence rekonstruovat vše, co se dá smysluplně nazvat matematickou strukturou. V přírodních vědách se tedy snažíme o minimalizaci, kdežto v teorii množin naopak o maximalizaci ontologie. K tomuto problému se ještě vrátíme. Nyní však vyložíme hlavní ideu naturalismu Penelope Maddy z (1997).

Označení „naturalismus" může být zprvu poněkud matoucí. Chápeme-li pod matematickým naturalismem „fyzikalizující" a „biologizující" tendence ve filosofii matematiky, pak je naturalismus Penelope Maddy méně naturalistický než její realismus. Je to právě realismus Penelope Maddy, který se snaží matematické objekty umístit do fyzikálního světa, jejich existenci obhájit s využitím (QT1) na základě podoby současné fyziky a zároveň podepřít fyziologickými a psychologickými teoriemi. Naturalismus Penelope Maddy naopak toto vše nechává stranou a obrací se pouze k matematické praxi, která se stává jedinou autoritou v takových otázkách, jako je problém pravdivostní hodnoty nezávislých tvrzení či sporných metod, např. uplatňování axiomu výběru či impredikativních definic[7]. Termín „naturalismus" je převzat od Quina, jehož naturalistický názor spočívá v odmítnutí ideje Descartovské první filosofie, která má sloužit jako poslední arbitr poskytující vědě externí obhajobu, případně z externích pozic vědu korigovat. Podle naturalismu nám věda předkládá nejlepší obrázek reality, který máme k dispozici. Tento obrázek sice je korigovatelný, ale nikoli nějakými mimovědeckými prostředky. Naturalismus je tedy přesvědčení, že filosofické či metodologické otázky týkající se vědy musí být – pokud mají smysl – rozhodnuty ve vědě samotné a nikoli na základě jakýchkoli externích filosofických úvah. To je také smysl slavného Neurathova vý-

---

7 Impredikativní definice definují nějaký objekt pomocí odkazu na celek, v němž se tento objekt již nachází. Proto mají nekonstruktivní charakter.

roku, že věda je jako loď, kterou musíme přestavovat průběžně během plavby.

Tento respekt k vědecké praxi kontrastuje s Quinovým testem, neboť – jak jsme již uvedli – ten matematickou praxi nerespektuje. Matematický naturalismus formulovaný v Maddy (1997) chápe matematiku jako nezávislou na jakýchkoli externích filosofických či vědeckých principech a respektuje stejnou měrou tuto autonomii matematické praxe, jako Quinův naturalismus respektuje autonomii praxe přírodních věd. Je to tedy v jistém smyslu pravý opak „fyzikalizujících" a „biologizujících" tendencí ve filosofii matematiky.

Otázkou nyní je, do jaké míry zůstává realismus problémem, který lze v takto pojatém naturalistickém rámci řešit. Maddy je v tomto ohledu skeptická. Domnívá se, že zatímco fyzikální teorie nám říkají mnoho o povaze existence fyzických objektů, např. že jsou to časoprostorové objektivně existující entity, matematika o těchto otázkách (vztažených na matematické objekty) mlčí.

Je zde potřeba vytyčit hranice mezi tím, co je naturalizovatelná filosofie a tím, co je – slovy Wittgensteina – pouhá próza čili první filosofie. Vytyčení této hranice je obtížný úkol, jehož řešení Maddy nepředkládá. Ukazuje pouze, že existují případy, u nichž je poměrně zřejmé, na jakou stranu hranice spadají. Jako příklad postoje, který spadá spíše do první filosofie než do vědy, uvádí Maddy verifikacionismus, tj. názor, že význam věty je dán podmínkami, za nichž lze tuto větu verifikovat. Do protikladu staví mechanismus, tj. názor, že všechny fenomény lze chápat jako výsledek působení mechanických sil. Mechanismus je filosofický postoj, který vznikl na základě vědecké praxe a který motivoval plodný vědecký projekt, jenž vedl až k nalezení důvodů pro zamítnutí tohoto postoje. Oproti tomu verifikacionismus povstal ve filosofickém kontextu a k žádnému plodnému projektu nevedl. Maddy se přiklání k názoru, že realismus je v tomto ohledu podobný spíše verifikacionismu než mechanismu.

Maddy však svůj naturalismus považuje spíše za metodu než za tezi (viz Maddy 1997, 200). Nechce tedy tvrdit, že realistické filosofické úvahy jsou zcela irelevantní. Spíše motivována jistými historickými důvody nechává tyto úvahy stranou a systematicky na ně nebere ohled při řešení metodologických otázek.

Co je tedy vlastním problémem, který Maddy pod hlavičkou naturalismu řeší? Jde především o naturalistické posouzení otázek teorie množin, které nemohou být řešeny čistě v rámci etablovaných matematických teorií pomocí důkazu. Sem spadají především otázky posouzení nových kandidátů na axiomy, s jejichž pomocí lze rozhodnout některá klasická nezávislá tvrzení jako je např. hypotéza kontinua.[8] Jedná se tedy o problém, který Maddy vytyčila již v (1990), ale nyní ho chce řešit čistě naturalistickými prostředky, tj. s vyloučením jakýchkoli externích motivací. Tyto prostředky spočívají ve vytvoření jednoduchého modelu matematické praxe. Model neobsahuje nic, co by bylo metodologicky irelevantní. To, zda je tento model adekvátní, je empirická otázka, která se testuje konfrontací modelu s reálnými historickými událostmi v matematice. Kandidáti na axiomy mají být posouzeni na základě tohoto modelu.

Model matematické praxe vychází z pozorování, že vždy když dochází k modifikaci stávající matematické praxe, především když dochází k přijetí nových prostředků, které byly dříve považovány za kontroverzní (např. axiom výběru), opakuje se jistý vzorec chování matematické komunity. Kontroverzní metody jsou postupně přijaty z toho důvodu, že vedou k takovým podobám matematiky, které představují efektivní prostředky k dosažení žádoucích cílů. Model matematické praxe (a v případě Penelope Maddy konkrétněji model množinově teoretické praxe) musí tedy sestávat z identifikace žádoucích cílů a z následného ohodnocení potenciálních metod a prostředků z hlediska jejich efektivity pro dosažení těchto cílů.

Jaké jsou tedy specifické cíle teorie množin, podle nichž bychom mohli poměřovat různé nové kandidáty na axiomy? Maddy identifikuje jeden základní cíl, jehož smysl jsme naznačili výše. Je jím vytvoření základů pro celek matematiky. (Přitom není řečeno, že nelze vybudovat základy matematiky ještě jiným způsobem, než jak se to praktikuje v teorii množin.) Z tohoto cíle vyplývají dvě dílčí maximy:

(M1) Teorie množin by měla být jednotná.
(M2) Množinově teoretická oblast by měla obsahovat maximální možnou rozmanitost matematických struktur.

---

[8] Hypotézu kontinua lze formulovat jako tvrzení, že každá nekonečná podmnožina kontinua má buď mohutnost celého kontinua, nebo má mohutnost množiny přirozených čísel (ta má mohutnost menší než kontinuum). Jinými slovy, neexistuje žádná střední mohutnost mezi mohutností množiny přirozených čísel a mohutností kontinua. Otázka, zda je hypotéza kontinua pravdivé tvrzení, se vynořila hned v počátcích teorie množin. Později se však ukázalo, že se jedná o nezávislé tvrzení.

Mezi maximami (M1) a (M2) existuje určité pnutí. Řekněme, že posuzujeme dvě alternativní rozšíření ZFC. Nejjednodušším způsobem, jak postupovat ve shodě s (M2), by bylo přijmout obě rozšíření jako dvě alternativy, vymezující třeba dva různé pojmy množiny. Avšak (M1) koriguje tento postup a nutí nás k tomu, abychom mezi alternativami vybrali jen jednu. Z naturalistického hlediska je to tedy především maxima (M1), která stimuluje hledání a hodnocení nových kandidátů na axiomy a motivuje nás k řešení otázky rozhodnutelnosti nezávislých tvrzení.

Jak může naturalistické posuzování nových kandidátů vypadat? Penelope Maddy to ilustruje na příkladu axiomu konstruovatelnosti množin. Tento axiom je motivován russellovskou představou, podle které množiny odpovídají propozičním funkcím, čili množina je něčím, co je určeno nějakou formulí s volnou proměnnou. Formulaci axiomu konstruovatelnosti předchází definice třídy L. Třída L se „konstruuje" transfinitní rekurzí podle osy ordinálních čísel a každému ordinálu se v této konstrukci přiřadí množina definovatelných množin, jejichž prvky se nacházejí v předchozích úrovních. Konstrukce se tedy podobá standardní konstrukci „kumulativní hierarchie" množin, avšak místo množiny všech podmnožin prvků předchozích úrovní sestává každá úroveň z množiny všech podmnožin (prvků z předchozích úrovní), které jsou definovatelné nějakou formulí. Axiom konstruovatelnosti pak říká, že každá množina je v tomto smyslu definovatelná, tj. že třída L tvoří univerzum všech množin označované standardně jako V. Stručně se toto tvrzení zapisuje jako V=L. Tento axiom zavedl Kurt Gödel a s jeho pomocí ukázal, že jak axiom výběru, tak hypotéza kontinua je relativně konzistentní vůči ZF, čili, jinými slovy, že negace těchto tvrzení nejsou v ZF dokazatelné (za předpokladu konzistence ZF). To se ukáže tak, že se sestrojí model teorie ZF obohacené o axiom konstruovatelnosti a ukáže se, že v něm platí obě tato tvrzení, tj. axiom výběru i hypotéza kontinua.[9]

[9] Nechceme-li zabíhat do technických detailů, nemůžeme se vyjadřovat zcela přesně. Avšak mohlo by být užitečné alespoň stručně objasnit následující matoucí bod. Z druhé Gödelovy věty o neúplnosti plyne, že kdybychom předvedli přímou konstrukci modelu ZF, znamenalo by to, že ZF je nekonzistentní (konstrukci modelu by totiž šlo formalizovat v ZF samotné a ZF by tak dokazovala svoji konzistenci, což konzistentní teorie nemůže). Model ZF obohacené o axiom konstruovatelnosti se tedy nepopisuje přímo, ale na základě nezbytného předpokladu konzistence teorie ZF. Tento předpoklad zaručí existenci nějakého modelu (který však zkonstruovat

Sám axiom konstruovatelnosti je nezávislé tvrzení ZFC. Lze proti němu argumentovat z realistických pozic, že není důvod, aby univerzum všech množin, které existuje nezávisle na našem jazyku a naší matematické aktivitě, sestávalo jen z takových množin, které můžeme definovat. Avšak tento způsob argumentace by byl založen na externích důvodech, kterých se Maddy v (1997) snaží cíleně vyvarovat.

Maddy nabízí alternativní naturalistický způsob zdůvodnění, proč nepřijmout axiom konstruovatelnosti mezi základní množinově teoretické axiomy. Postup je takový, že ukážeme jasný smysl, v jakém je axiom konstruovatelnosti restriktivní a tedy v rozporu s maximou (M2). To se zprvu může jevit jako triviální tvrzení, neboť je zřejmé, že univerzum sestávající pouze z definovatelných množin je chudší než univerzum obsahující i nedefinovatelné množiny. Avšak jak Maddy v (1997) zdůrazňuje, situace není tak jednoduchá. Podobně by se mohlo zdát, že axiom fundovanosti, který zamezuje existenci množin, u nichž jsou možné nekonečné sestupy nejprve od celé množiny k jejím prvkům, poté k prvkům těchto prvků, poté k prvkům prvků prvků atd., podobným způsobem omezuje rozmanitost množinového univerza. Zdálo by se tedy, že Aczelova teorie množin AFA, která neobsahuje axiom fundovanosti a místo něj obsahuje axiom implikující existenci „nefundovaných“ množin, by měla mít z hlediska (M2) přednost před ZFC. Nefundované množiny sice představují nový typ množiny, nepředstavují však nový typ struktury, který by nebyl ničím nahraditelný v ZFC. Modely AFA jsou konstruovány uvnitř modelů ZFC a AFA je v ZFC interpretovatelná. AFA tedy není z hlediska (M2) přijatelnější než ZFC, neboť jejím přijetím nezískáme nic nového, co by nešlo v ZFC simulovat.

Avšak podobný pokus o obhajobu axiomu konstruovatelnosti není úspěšný. Konkrétně Maddy srovnává rozšíření ZFC o axiom konstruovatelnosti s rozšířením ZFC o formuli „existuje $0^\#$“ tvrdící existenci

---

neumíme). V tomto modelu, ať už vypadá jakkoli, je fixována osa ordinálních čísel, podle které lze rekonstruovat třídu L. „Vyseparujeme-li“ pak z modelu takto získané L, dostáváme nový model ZF, v němž platí navíc V=L. Lze dokázat, že v tomto modelu dále platí hypotéza kontinua i axiom výběru. V praxi se lze vyhnout „realisticky“ znějící řeči o modelech tím, že ji nahradíme syntaktickou úvahou za pomoci pojmu interpretovatelnosti jedné teorie v druhé. Dalším bodem, který by si zasloužil objasnění, je fakt, že definovatelnost množin není v L tak důsledně aplikována, neboť není požadováno, aby sama osa ordinálních čísel obsahovala jen definovatelné ordinály. Na to upozorňuje i sama Maddy v článku (1993).

určitého „nekonstruovatelného“ objektu.[10] Tato dvě rozšíření jsou vzájemně nekonzistentní, tj. nemůžeme přidat oba axiomy zároveň. (M1) nás motivuje k pokusům vybrat jednu z těchto dvou variant rozšíření, i když jde v obou případech pochopitelně o nezávislá tvrzení. Ukazuje se, že můžeme interpretovat teorii ZFC+”V=L“ v teorii ZFC+”existuje $0^{\#}$“, což znamená, že veškerá matematika realizovatelná v ZFC+”V=L“ je v „ZFC+existuje $0^{\#}$“ zachována, stačí pouze relativizovat kvantifikátory vzhledem k L. Avšak ZFC+”existuje $0^{\#}$“ v ZFC+”V=L“ (ani v žádném jejím konzistentním rozšíření) interpretovatelná není. To znamená, že objekt $0^{\#}$ představuje typ struktury, který nelze simulovat ničím v ZFC+”V=L“ a na druhou stranu v ZFC+”V=L“ neexistuje nic, co by nebylo nijak přítomno v ZFC+”existuje $0^{\#}$“. Vzhledem k (M2) bychom tedy měli dát přednost teorii ZFC+”existuje $0^{\#}$“.

Tímto příkladem jsme ilustrovali, jak vypadá naturalistický přístup k problému nezávislých vět. V poslední části této práce budeme argumentovat, že nejenže naturalismus Penelope Maddy není v rozporu s matematickým realismem, naopak představuje jeho silnou podporu.

7 Realismus motivovaný naturalismem Penelope Maddy

Jak jsme již uvedli, Maddy v (1997) nepovažuje otázku realismu za filosofický problém, který by byl v dostatečném kontaktu s aktuální matematickou praxí a rezignuje tedy na pokusy o jeho řešení. Mezi „filosofická“ tvrzení, která vyrostla z matematické praxe a dále na ni také působí, by zřejmě zařadila např. Churchovu tezi, podle níž každý z dosud navržených vzájemně ekvivalentních matematických pojmů algoritmu (tj. Turingovy stroje, rekurzivní funkce, vývojové diagramy atd.) je adekvátním zachycením přirozeného pojmu algoritmu či výše uvedenou tezi, že každý matematický objekt lze modelovat jako množinu.

Avšak Maddy v (1997) netvrdí, že otázka realismu je nesmyslná a že bychom ji tedy vůbec neměli klást. Domnívám se, že pokud si ji položíme, je to právě naturalistický přístup, který představuje vhodnou metodu pro jedno z možných řešení. Uvádíme „jedno z možných řešení“, protože prvotní vymezení otázky (jaké jsme např. uvedli na začátku textu) je natolik vágní, že připouští natolik různá zpřesnění, že pro ně

[10] Jedná se o určitou množinu přirozených čísel, jejíž existence není dokazatelná v ZFC.

dostáváme zcela opačné odpovědi. Dále se o jedno takové zpřesnění pokusíme a budeme zároveň argumentovat, že má jisté přednosti před alternativními způsoby zpřesnění. Vedle naturalismu Penelope Maddy se také necháme volně inspirovat Husserlovým přístupem s tím, že přeneseme problematiku ze zkušenostní do jazykové roviny.

Typicky lze vytýkat argumentům opírajícím se o fenomenologické aspekty naší zkušenosti, že pracují s něčím, co není intersubjektivně dostupné a je tudíž pro dialog a argumentaci nepoužitelné. Domnívám se však, že zdůvodnění toho, že prožitky nejsou intersubjektivně dostupné, závisí také na poukazu k určitému typu zkušenosti, neboť není pravda, že nelze hovořit o prožitku nějaké cizí osoby – a to o numericky tomtéž prožitku, o kterém hovoří tato osoba sama. Nelze však cizí prožitek vnímat, tj. nelze mít stejný typ zkušenosti s cizím prožitkem jako s nějakým materiálním objektem. Toto odmítnutí intersubjektivní nedostupnosti prožitků má tedy paradoxně fenomenologickou povahu – má v podstatě stejný charakter jako Husserlova a Gödelova argumentace ve prospěch realismu.

Nicméně a posteriori se zdá – srovnáme-li např. (ne)úspěšnost fenomenologického přístupu s takovým, který analyzuje matematiku na základě studia jejího jazyka –, že prožitky nejsou příliš vhodným typem objektů, na kterém by se dala bezpečně zakládat stabilní filosofie matematiky. Avšak je zajímavé povšimnout si, že fenomenologický přístup lze posunout do jazykové roviny. V té pak analogie mezi matematickou a perceptivní zkušeností začíná být problematická. V běžné řeči totiž často slouží perceptuální slovník k formulaci důvodů pro existenci nějakých materiálních objektů. Můžeme si např. představit dialog, v němž se osoba A ptá: „Proč si myslíte, že vrah měl komplice?“ Možnou odpovědí mající silnou důvodovou váhu by byla odpověď osoby B: „Svědek *zahlédl* utíkat dva muže z místa činu.“ Tím zdůvodňování může končit – dodatečné důvody často předložit nelze a také není potřeba. Je však pochybné tvrdit, že je podobný způsob zdůvodňování přípustný také v matematických textech. Sice se setkáváme s formulacemi jako „lze snadno nahlédnout, že …“, či „to je zjevné“, ale tyto výrazy nikdy neslouží jako zdůvodnění daného tvrzení, jedná se pouze o strategickou zkratku v textu, která by měla být vždy nahraditelná rozvinutým vysvětlením. Přitom platnost axiomů, u nichž běžná argumentace končí, v současné době bývá málokdy dále zdůvodňována jejich „zjevností“, ale chápou se spíše jako „implicitní definice“, jejichž zavedení může být plně obhájeno jedině na základě komplexních teoretických důvodů (srov. Maddy 1988).

Avšak i kdybychom nepřijali, že matematická zkušenost je analogická smyslové zkušenosti (což na jazykové rovině odpovídá nepřijetí tvrzení, že slovník popisující matematickou zkušenost funguje stejně jako slovník popisující smyslovou zkušenost), stále ještě můžeme využít strukturu Husserlovy argumentace.

Základním východiskem fenomenologie je, že každý předmět má svůj „smysl", který se musel vytvořit v prožitkovém proudu. Fenomenologie považuje za protismyslné předpokládat absolutní smysl, který vstoupil do vědomí zvenku. Vědomí je sféra, do které nemůže nic vstupovat. Naopak ale – ono samo jakoby ze sebe vystupuje tím, že konstituuje smysl vnějších předmětností, které ve vědomí nejsou. Tak např. i „svět sám má své celé bytí jako jistý „smysl", který předpokládá absolutní vědomí jako pole udílení smyslu" (Husserl 1913, 115). Co se např. čísel týče, i jejich smysl musel být konstituován ve vědomí – jak jinak bychom o nich mohli uvažovat než tak, že jsme si předtím sami, uvnitř svého vědomí jejich smysl zkonstituovali? „Cožpak ale nejsou, ptáme se, čísla tím, čím jsou, ať již je „vytváříme", nebo nevytváříme?" (Husserl 1913, 54). A čísla jsou podle svého smyslu právě něčím nezávislým, věčným, bezčasovým a bezprostorovým, transcendujícím prožitky, ve kterých byly stvořeny.

Shrňme ještě jednou, hlavní kroky Husserlovy argumentace:

Primárními objekty fenomenologie jsou prožitky. Ostatní objekty jsou zkoumány jen tak a natolik, jak a nakolik se nám „dávají v prožitcích". Zajímá nás status objektů matematiky. Ty se nám dávají jakožto nezávislé na naší zkušenosti. Proto je na místě být realistou, neboť jinak bychom se provinili proti smyslu matematických objektů, jak jsme ho konstituovali ve svém vědomí.

Tím se fenomenologie dostává do zdánlivě paradoxní situace. Tvrdí, že smysl matematických objektů jsme konstituovali ve vědomí, avšak konstituovali jsme ho tak, že právě na základě tohoto smyslu je nutné považovat matematické objekty za nezávisle existující entity.

Domnívám se, že paradox v tomto postupu je pouze zdánlivý. Pouze se zde jeden problém nahlíží z různých perspektiv. Podobně se válec jeví z jedné perspektivy jako kruh a z jiné jako obdélník – na tom není nic paradoxního.

Pokusme se přetransformovat tuto fenomenologickou argumentaci do jazykové roviny:

> *Primárním objektem studia je jazyk. Ostatní objekty jsou zkoumány jen tak a natolik, jak a nakolik se nám „dávají v jazyce“. Zajímá nás status objektů matematiky. Ty v jazyce vystupují jakožto nezávislé na jazyce. Proto je na místě být realistou, neboť jinak bychom se provinili proti smyslu matematických objektů, jak je konstituován jazykem matematiky.*

Tento modifikovaný argument má velkou výhodu. Lze mnohem lépe doložit, že matematické objekty vystupují v jazyce matematiky jako nezávislé na jazyce, než že matematické objekty vystupují ve vědomí jako nezávislé na vědomí. V protikladu k „apriorním“ argumentům pro fenomenologickou verzi jsou pro zdůvodnění jazykové verze vhodné právě naturalistické argumenty Penelope Maddy. Například její naturalistickou „demonstraci“, že V se nerovná L, můžeme pojmout jako evidenci ve prospěch tvrzení, že status množin v jazykové praxi teorie množin je „realistický“, tj. předpokládáme-li existenci množin, které nejsou definovatelné žádnou formulí, jednáme v souladu s matematickou praxí – a předpoklad opaku se prokazatelně dostává do konfliktu s cíli této praxe.

Tento způsob argumentace má naturalistickou povahu z toho důvodu, že zcela respektuje podobu matematické praxe a nemá ambice do ní nijak zasahovat. V tom se také liší od Husserlovy fenomenologie, která měla fungovat jako nezávislá apriorní disciplína čerpající své principy z vlastních zdrojů a poskytující základy a oprávnění všem ostatním vědám. To je přesně descartovský ideál první filosofie. Jak jsme viděli, naturalistický přístup – který Maddy ve své poslední knize nazývá druhou filosofií (viz Maddy 2007) – vznikl právě v opozici k tomuto ideálu. Naturalisticky motivovaný realismus tedy není rozhodnut apriori bez ohledu na faktickou podobu matematické praxe a nechce matematice předepisovat žádné principy (např. tak, že by nás realistické důvody vedly k přijetí principu vyloučeného třetího), nechce do matematiky nijak zasahovat, ale chce z ní čerpat pouze evidenci ve svůj prospěch. Realistická teze je sice zprvu vágní, ale je natolik smysluplná, že můžeme určit, které podoby matematiky ji podporují a které nikoli. Např. přijetí axiomu výběru, přijetí impredikativních definic a nekonstruktivních metod svědčí ve prospěch realismu a jejich nepřijetí svědčí ve prospěch pozic s realismem neslučitelných. To, zda máme tyto principy či metody přijmout, nemůže být rozhodnuto na základě nějaké filosofické pozice (např. realismu samotného), ale jsou-li tyto otázky na základě interních matematických důvodů rozhodnuty, můžeme to přijmout jako evidenci svědčící ve prospěch či proti realismu. Jak sama Maddy podotýká, „mnoho těchto metodologických debat bylo rozhodnuto: impredikativní definice jsou povoleny, nepožaduje se, aby důkazy existence definovaly či konstruovaly entitu, jejíž existenci tvrdíme; axiom výběru byl přijat“ (Maddy 1997, 191). Avšak Maddy – v kontrastu s tím, co zde hájíme my – není ochotná na základě podoby matematické praxe činit realistické závěry. Říká, že „někteří mohou argumentovat, že úspěch těchto různých ‚platonisticky inspirovaných‘ metod lze pokládat za evidenci pro matematický realismus, ale naše naturalistická analýza tento názor nepodporuje“ (Maddy 1997, 193). Důvodem pro odmítavý postoj je, že podle Maddy realismus není teze, která by byla v dostatečném kontaktu s vědeckou praxí.

Hlavní závěr naší práce je v podstatě tento: Pokud lze problém realismu nějak smysluplně specifikovat, pak nejlépe jako otázku, jaký status mají matematické objekty v matematické praxi samotné. Tuto otázku umožňuje fakt, že matematika je schopna reflektovat svůj vlastní jazyk a tak se některé problémy, jako např. zda objekty matematiky existují nezávisle na jazyce matematiky a na matematických konstrukcích, dají formulovat jako interní matematické problémy. Z tohoto hlediska je ovšem velice relevantní, jak byly rozhodnuty výše zmíněné metodologické otázky. A byly rozhodnuty vesměs ve prospěch realismu.

Abychom otestovali alternativní stanoviska, můžeme zvážit následující tvrzení:

(T) Matematické objekty existují v závislosti na matematické praxi.

Co by se stalo, kdybychom integrovali tvrzení (T) do matematické praxe samotné jako její interní princip? Byly realizovány vážné pokusy toto učinit. Ty vedly k různým formám „konstruktivní matematiky“, která byla nejlépe rozpracována v díle L. E. J. Brouwera a jeho žáků, především A. Heytinga. Výsledná (tzv. intuicionistická) matematika založená na uvedeném principu se velmi odlišuje od klasické matematiky.[11]

---

[11] Rozdíl je nejvíce patrný, když se podíváme, jaký charakter má intuicionistické kontinuum. Brouwer byl schopný ve své matematice dokázat, že každá totální funkce na uzavřeném intervalu je spojitá (viz např. Heyting 1966, 46 či Kolman 2008, 7. kapitola). To je v klasické matematice triviálně nepravdivé tvrzení. Snaha reformovat klasický pojem kontinua na filosofickém základě představovala pro intuicionismus jeden z hlavních cílů. Maddy tuto snahu komentuje již v roce 1990 takto: „Teorie reálných čísel tvoří základní součást kalkulu a vyšší analýzy a jako taková je mnohem

Může se zdát, že tento fakt podporuje konvencionalismus, tj. tvrzení, že existují různé podoby matematiky a je záležitostí konvence, jakou si vybereme. Na druhou stranu je potřeba vzít v úvahu, že klasická matematika nebyla otřesena konstruktivistickými pokusy a že nehrozí přímé nebezpečí, že by byla nahrazena intuicionistickou alternativou. Lze říci, že klasická matematika zvítězila na základě „přirozeného výběru". Pro nás je zde podstatné pozorování, že integrujeme-li tvrzení (T) do matematické praxe, značně ji tím modifikujeme. Naopak integrujeme-li negaci tohoto tvrzení do matematické praxe, nic podstatného se nezmění. To chápeme jako argument ve prospěch realismu.

8 Závěr

V této práci jsme nastínili několik podob matematického realismu: Popsali jsme realismus Husserla, Gödela, Quina a Maddy a připojili jsme vlastní interpretaci této filosofické otázky. V závěru zvážíme některé námitky proti podobě realismu, kterou zde hájíme.

Nejprve se budeme zabývat námitkou, která je paralelní s možnou námitkou proti Husserlovu realismu. Když jsme transformovali strukturu fenomenologické argumentace na jazykovou úroveň, uvedli jsme, že „*je na místě být realistou, neboť jinak bychom se provinili proti smyslu matematických objektů, jak je konstituován jazykem matematiky*". Není tím však zároveň vyjádřeno, že smysl matematických objektů je konstituován jazykem matematiky, a že matematické objekty v posledku přeci jen jsou na tomto jazyce závislé (stejně tak jako ve fenomenologii matematické objekty v posledku jsou závislé na prožitcích, v nichž se – dle fenomenologie – konstituují)? V jistém smyslu ano. Důležité však je, že pokud toto tvrdíme, změnili jsme perspektivu. Z této perspektivy psal např. Carnap některé své práce jako třeba (1934) či (1950). Při této interpretaci není realismus udržitelnou pozicí.

Lze však argumentovat, že existují metodologické důvody, proč problém realismu interpretovat spíše výše uvedeným způsobem než takto. Každé tvrzení může být vždy chápáno pouze jako tah v nějaké jazykové hře (ve smyslu Wittgensteina 1953) či jako pohyb uvnitř nějakého jazykového rámce (ve smyslu Carnapa 1950), případně jako pohyb, který nějaký nový jazykový rámec (spolu)konstituuje či starý přetváří. Tento úhel pohledu je vždy možný a v tomto smyslu je třeba souhlasit

pevněji zdůvodněna než jakákoli filosofická teorie matematické existence a matematického poznání" (Maddy 1990, 23).

s Carnapem, že neexistují žádné absolutní externí tvrzení (viz Carnap 1950). Avšak tvrdit, že existence nějakého objektu je závislá na jazyce, a přitom se odvolávat na možnost tohoto úhlu pohledu, je podobné jako tvrdit nějakou tautologii a nejedná se tedy o příliš informativní teoretický výrok. Toto tvrzení neříká o moc více, než že pronesení existenčního tvrzení je vždy tvrzení nějakého jazyka a může být chápáno a analyzováno právě jen jako jazykové tvrzení. Být si vědom této samozřejmosti může být užitečné, podobně jako může být v nějaké matematické úvaze velmi užitečné uvědomit si, že platí p nebo ne-p, neboť tím můžeme chytrým způsobem rozdělit množinu možných případů na dvě disjunktní části, což může představovat důležitý krok při řešení nějakého problému. To nic nemění na faktu, že se jedná o bezobsažné tvrzení.

Naproti tomu interpretace matematického realismu inspirovaná naturalismem Penelope Maddy, jak jsme ji formulovali v předchozí části práce, vede k netriviálnímu problému a právě to zde prezentuji jako důvod pro její přijetí.

Mohli bychom dále namítat, že strategie, kterou jsme zde sledovali – totiž (zhruba) založení matematického realismu čistě na základě respektu k tomu, jak se historicky vyprofilovala řeč o matematických objektech –, je nepřijatelná, protože bychom takto mohli akceptovat třeba také existenci bájných bytostí pouze na základě povahy bájí, v nichž se o bájných bytostech mluví také realisticky.[12]

Avšak případ bájných bytostí se od případu matematických objektů podstatně liší. Máme zde velice stabilní praxi, která nám udává kritéria toho, kdy existuje či existoval nějaký materiální objekt a kdy nikoli. Existenci bájných bytostí odmítáme, právě protože je v rozporu s touto praxí. Matematická praxe s žádnou jinou stabilnější praxí v rozporu není.

Tuto práci uzavřeme poslední námitkou, která se vztahuje na celou naturalistickou metodu a kterou lze formulovat takto: Matematika sama může být vděčná velkým inovátorům, jakými byli např. Descartes či Newton, že nerespektovali stávající matematickou praxi a právě proto byli schopni modifikovat ji a něčím podstatně novým k ní při-

[12] Za příklad vděčím Igoru Sedlárovi, který podobnou námitku vznesl na Česko-slovenském sympoziu o analytické filozofii.

spět. Jejich motivy byly často filosofické – spadající do oné první filosofie, kterou naturalismus kritizuje.[13]

Domnívám se, že tento pohled je jen zdánlivě v rozporu s tím, co zde obhajujeme. Pokud v jednotlivém případě realistický (příp. antirealistický) pohled inspiruje nějakého matematika např. k zavedení nové metody, není tím tato metoda ještě obhájena. Metoda se musí etablovat na základě interních matematických důvodů a až poté zpětně můžeme říci (inspirováni naturalismem a respektem k matematické praxi), že efektivita metody v matematické praxi svědčí ve prospěch realistického (příp. antirealistického) názoru, který zavedení metody motivoval.

Filosofický ústav
Akademie věd ČR, v.v.i.
Jilská 1
110 00 Praha 1
Česká Republika
vit.puncochar@centrum.cz

Filozofická fakulta
Univerzita Karlova v Praze
Nám. Jana Palacha 2
116 38 Praha 1
Česká Republika
vit.puncochar@centrum.cz

Literatura

BALAGUER, M. (1994): Against (Maddian) naturalized platonism. *Philosophia Mathematica* 2, 97-108.
BENACERRAF, P. (1973): Mathematical truth. *The Journal of Philosophy* 70, 661-679.
BOLZANO, B. (1810): Anhang über die Kantische Lehre von der Construction der Begriffe durch Anschaungen. In: *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*. Praha: Caspar Widtmann, 135-152.
CARNAP, R. (1934): *Logische Syntax der Sprache*. Wien: Julius Springer.
CARNAP, R. (1950): Empiricism, semantics, and ontology. *Revue Internationale de Philosophie* 4, 20-40.
CARSON, E. (1996): On realism in set theory. *Philosophia Mathematica* 4, 3-17.
FREGE, G. (1918): Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus* 2, 58-77.

[13] Podobnou námitku vznesl na Česko-slovenském sympoziu o analytické filozofii Ladislav Kvasz.

GÖDEL, K. (1944): Russell's mathematical logic. In: Schilpp, P.A. (ed.): *The philosophy of Bertrand Russell*. Evanston – Chicago: Northwestern University, 125-153. Citováno dle českého překladu: Gödel, K. (1999): *Filosofické eseje*. Praha: Oykoimenh.

GÖDEL, K. (1947): What is Cantor's continuum problem? *The American Mathematical Monthly* 54, 515-525. Citováno dle českého překladu: Gödel, K. (1999): *Filosofické eseje*. Praha: Oykoimenh.

GÖDEL, K. (1995): The modern development of the foundations of mathematics. In: Gödel, K.: *Collected Works III*. Edited by S. Feferman at al. Oxford: Oxford University Press. Citováno dle českého překladu: Gödel, K. (1999): *Filosofické eseje*. Praha: Oykoimenh.

GOLDBLATT, R. (1979): *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

HEYTING, A. (1966): *Intuitionism: An Introduction*. 2nd edition. Amsterdam: North-Holland publishing Company.

HUSSERL, E. (1913): Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* 1, Halle, 1-323. Citováno dle českého překladu: Husserl, E. (2004): *Ideje k čisté fenomenologii a fenomenologické filosofii I*. Praha: Oikoymenh.

HUSSERL, E. (1929): Formale und transzendentale Logik: Versuch einer Kritik der logischen Vernunft. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* 10, Halle, 1-298. Citováno dle českého překladu Husserl, E. (2007): *Formální a transcendentální logika*. Praha: Filosofia.

KVASZ, L. (2010): Penelope Maddy medzi realizmom a naturalizmom. *Filozofia* 65, 522-537.

KOLMAN, V. (2008): *Filosofie čísla*. Praha: Filosofia.

LAVINE, S. (1992): Review of Maddy (1990). *The Journal of Philosophy* 89, 321-326.

MADDY, P. (1988): Believing the axioms I. *The Journal of Symbolic Logic* 53, 481-511.

MADDY, P. (1990): *Realism in Mathematics*. Oxford – New York: Oxford University Press.

MADDY, P. (1993): Does V equal L? *The Journal of Symbolic Logic* 58, 15-41.

MADDY, P. (1997): *Naturalism in Mathematics*. Oxford – New York: Oxford University Press.

MADDY, P. (2007): *Second Philosophy*. Oxford – New York: Oxford University Press.

QUINE, W.V.O. (1948): On what there is. *Review of Metaphysics* 2, 21-38.

QUINE, W.V.O. (1951): Two dogmas of empiricism. *The Philosophical Review* 60, 20-43.

QUINE, W.V.O. (1992): *Pursuit of Truth*. Cambridge: Harvard University Press.

RISKIN, A. (1994): On the most open questions in the history of mathematics: a discussion of Maddy. *Philosophia Mathematica* 2, 109-121.

WITTGENSTEIN, L. (1958): *Philosophische Untersuchungen*. Oxford: L. Blackwell Publishers.