Organon F 20 (Supplementary Issue) 2014: 138-154

Mstivá forma Fitchova paradoxu a její odmítnutí v rámci typování znalosti

JIŘÍ RACLAVSKÝ

Katedra filozofie. Filozofická fakulta. Masarykova univerzita
Arne Nováka 1. 602 00 Brno. Česká republika
raclavsky@phil.muni.cz

ZASLÁN: 01-12-2013 ▪ AKCEPTOVÁN: 07-04-2014

ABSTRACT: Typing knowledge is capable to resolve Fitch's knowability paradox. As I have argued elsewhere, Russellian typing knowledge is immune to the recently raised criticism of the typing approach. This paper focuses on a special form of the criticism proposing a revenge problem raised by Williamson, Hart and also Carrara with Fassio. The basic idea of the revenge Fitch's paradox employs quantification over type levels. However, the formalism used by the critics is ambivalent. I concentrate only on its two most probable readings, explaining also quantification over types and quantification over orders. As I show in details, if such readings went through, they would violate the typing rules in a direct manner. Hence, there is no revenge for the Russellian typing approach to Fitch's knowability paradox.

KEYWORDS: Fitch's knowability paradox – revenge – Russellian typing knowledge – ramified hierarchy of types – quantification over types – Russell – Tichý – Church.

1. Úvod

Jak známo, proslulý Fitchův paradox poznatelnosti („knowability"), dále jen *FP*, byl objeven Alonzo Churchem (2009, původně 1945) při recenzním čtení statě Frederika B. Fitche, jenž paradox publikoval ve Fitch (1963). Paradox byl řešen více způsoby, jedním z přístupů je *typování znalosti* („typing knowledge"), kdy je rozpoznávána celá hierarchie operátorů znalosti

(„knowledge operators“, K). Tento přístup byl sice naznačován již Churchem (2009), avšak poprvé jej blíže představil Timothy Williamson ve Williamson (2000); podrobně se mu pak věnoval zvláště Bernard Linsky v Linsky (2009), srov. též Pierdanielle Giaretta v Giaretta (2009). Stratifikace operátorů znalosti je u těchto autorů vedena s odkazem na Russellovu rozvětvenou teorii typů (viz např. Russell 1908; Whitehead – Russell 1910-1913). Připomeňme, že Russell stratifikoval propozice a své tzv. propoziční funkce,[1] čímž se jeho hierarchie zásadně liší od hierarchie T-predikátů a jazyků, kterou později navrhl Tarski (1931/1956). Rozvětvené teorie typů značme *RTT*; v současnosti obvykle bývá uvažována nikoli Russellova, ale Churchova RTT (1976), to pro jednoznačnost a výstižnost její formulace.

Typový přístup byl ale podroben silné kritice, nejpodrobněji ve stati Massimiliana Carrary a Davide Fassia (srov. Carrara – Fassio 2011). Hlavní námitka zněla, že typový přístup je určen pouze k vyřešení paradoxu a postrádá proto nezávislé odůvodnění, čímž je ad hoc přístupem. Takovéto kritice jsem oponoval ve stati Raclavský (2013). Tam jsem poukázal zejména na to, že kritici kritizují *Tarskiovské typování znalosti*, jež je vskutku ad hoc, a nikoli *Russellovské typování znalosti*. Toto má totiž své nezávislé odůvodnění v tom, jak jsou formovány (individuovány) propozice a operátory jako K, které na propozicích operují. Hlavní myšlenky typového přístupu si budeme muset stručně vyložit i v této stati. Moje předchozí stať ovšem nemohla obsahovat odmítnutí speciálního druhu kritiky typového přístupu, kterou rozebírám a odmítám až zde.

Hlavním pramenem této speciální kritiky typového přístupu k FP je kritika Tarského řešení paradoxu lháře (1936/1956) na základě sestavení mstivé formy („revenge“) lhářského paradoxu, mstivé pro daný přístup. Tato kritika byla naznačena již ve stati Kripke (1975, 697), rozvedena byla Grahamem Priestem v Priest (1987/2006, 19-20). Uvažme pro ilustraci tohoto druhu kritiky predikát „nebýt pravdivý v žádném z (hierarchie) jazyků L_1, L_2, ..., L_n“, formálněji: „$\lambda s \forall l \neg T(s,l)$“, kde s je proměnná pro věty (resp. jména vět) a l proměnná pro jazyky. Na příkladu věty S, jež je dána jakožto „$\forall l \neg T(S,l)$“, se snadno přesvědčíme, že paradox se tak vrátil. I tato námitka je v soudobé teorii paradoxů a filosofické logice standardní.

Williamson (2000) byl první, kdo nastínil kritiku, která de facto spočívá v sestavení mstivé formy pro typový přístup k FP. Detailnější vypracování

---

1 K pojmu propoziční funkce viz např. Raclavský (2014).

této kritiky předložil W. D. Hart v Hart (2009). Poněkud méně kompaktní podobu ‚revenge' předložili též Carrara – Fassio (2011).

V této stati především ukážu, že mstivá forma Fitchova paradoxu pro Russellovské typování trpí závažnými defekty. Zmiňovaní kritici formalizují jakoby intuitivní pojem:

nebýt znám na žádném stupni (typu, řádu) znalosti[2]

s pomocí formule:

„$\forall t \neg \mathrm{K}^t p$".

Z pohledu teorie RTT ale není příliš jasné, co daná formule vůbec znamená. Pro tuto ambivalentní formuli lze najít hned několik principiálních *druhů čtení* a tudíž i několik druhů mstivé formy FP.

V této stati se nemohu všem těmto druhům věnovat, soustředím se pouze na dvě čtení základní, z nichž jedno je nejbližší intencím kritiků. Odhalím při tom, že základní principy Russellovského typování znalosti mstivý argument zablokují. To je zapříčiněno jednak principy RTT, jednak nově zjištěným poznatkem o pojmu znalosti explikovaném prostředky RTT. Samozřejmě, že budu muset také ukázat, jak lze v rámci RTT kvantifikovat přes typy, resp. řády.

Struktura této statě: Následující oddíl 2. se stručně věnuje expozici FP, úvodu do idejí RTT, pravidlům Russellovskému typování znalosti a konečně zablokování FP danou metodou. V sekci 3. nejprve vysvětlím podstatu problému různých čtení „$\forall t \neg \mathrm{K}^t p$". Následují rozbory dvou hlavních čtení, z nichž to druhé je nejpravděpodobnější z hlediska úmyslu kritiků. Poté přezkoumám pravidlo, jehož neplatnost je nezbytná k odmítnutí právě tohoto mstivého FP pro typový přístup. Ve stručné sekci 4. naše zkoumání uzavřu.

2. Fitchův paradox poznatelnosti a Russellovské typování znalosti

2.1. Fitchův paradox poznatelnosti

Fitchův paradox poznatelnosti přináší překvapivé zjištění pro epistemologický optimismus známý jako *verifikacionismus*, totiž že každá pravda je poznatelná:[3]

2 Proč tu je ta ambivalence mezi typem a řádem? Jak si ukážeme níže, „řád" je více případný, ačkoli se v těchto kontextech běžně píše „type-level" nebo „type".

(Ver) $\forall p\ (p \supset \Diamond Kp)$ // princip poznatelnosti, verifikacionismus.

Po připojení Ver k samozřejmému principu, že ne každá pravda je známa:

(NonOmn) $\exists p\ (p \wedge \neg Kp)$ // princip nevševědoucnosti,

odvodíme, že každá pravda známa je:

(Omn) $\forall p\ (p \supset Kp)$ // princip vševědoucnosti.

Což je vskutku paradoxní.

Odvození užívá jen neproblematické principy multimodální logiky, zejména:

(Dist) $K(p \wedge q) \vdash (Kp \wedge Kq)$ // distributivita K přes $\wedge$
(Fact) $Kp \vdash p$ // faktivita znalosti
(Nec) Jestliže $\vdash p$, pak $\vdash \Box p$ // necesitace; co je dokázáno, nutně platí.

Zde je ono odvození:

1. $\exists p\ (p \wedge \neg Kp)$ // NonOmn
2. $(p \wedge \neg Kp)$ // instance 1.
3. $\forall p\ (p \supset \Diamond Kp)$ // přidání Ver
4. $(p \wedge \neg Kp) \supset \Diamond K(p \wedge \neg Kp)$ // substituce 2. za p do 3.
5. $\Diamond K(p \wedge \neg Kp)$ // MP na 4. a 2.
6. $K(p \wedge \neg Kp)$ // předpoklad *per absurdum*
7. $(Kp \wedge K\neg Kp)$ // Dist na 6.
8. $(Kp \wedge \neg Kp)$ // Fact na 7.
9. $\neg K(p \wedge \neg Kp)$ // *reductio*; 8. je totiž kontradikce
10. $\Box\neg K(p \wedge \neg Kp)$ // Nec na 9.
11. $\neg\Diamond K(p \wedge \neg Kp)$ // záměna modálních operátorů.

Takže 11. protiřečí 5. Čili přidání (Ver) k (NonOmn) vede k (Omn).

2.2. Russellovské typování znalosti: formování intenzionálních entit

Russellovský výklad veškerenstva entit předpokládá, že kromě extenzionálních entit jako jsou individua, třídy individuí a třeba pravdivostní funkce (jakožto zobrazení) existují i *intenzionální entity*. Ty nesplňují Princip ex-

[3] Užíváme běžnou notaci multimodální logiky: „K“ pro ‚znalost‘ (‚je někým známo, že‘) a „$\Diamond$“ (resp. „$\Box$“) pro ‚je možné, že‘ (‚je nutné, že‘); „$\Diamond$K“ pak zastupuje ‚je možné poznat, že‘.

tenzionality, protože mohou být vzájemně *ekvivalentní*, aniž by byly *identické*. Příkladem těchto entit jsou (Russellovské) strukturované *propozice* a dále všechny rozmanité operátory na nich operující, např. K, tedy *intenzionální operátory*, jak jim budu říkat. Svou strukturou intenzionální entity korespondují formulím a termům, které jsou obvykle voleny k jejich zápisu; v žádném případě ale tyto abstraktní entity nesmíme s těmi jejich zápisy ztotožňovat.[4]

Formování intenzionálních entit se řídí principy, z nichž nejznámější je *Princip bludného kruhu* („Vicious Circle Principle“, *VCP*).[5] Ten však plyne ze základnějšího principu, jenž nazývám *Princip specifikace* (Russellem je naznačován ve společné práci s Whiteheadem – viz Whitehead – Russell 1910, 41): žádnou entitu nelze plně specifikovat s pomocí jí samé. Například k úplné specifikaci funkce jakožto zobrazení musíme determinovat všechny argumenty a hodnoty, což by bylo nemožné, kdyby to zobrazení samo bylo mezi svými argumenty či hodnotami.

Intenzionální entity obsahují proměnné, anebo objekty, které mohou být v proměnné proměněny (otázka substituovatelnosti). Na něco takového poukazoval svou formulací VCP už Russell v Russell (1908, 225, 237); resp. Whitehead – Russell (1910, 40). Já jakožto *Intenzionální VCP* podávám:

> *Žádná entita, která (popřípadě) obsahuje proměnnou, nemůže být sama v oboru této proměnné. Je proto typu vyššího řádu.*

Například složená propozice obsahující proměnou pro propozice, schematicky (... p ...), nesmí být sama v oboru proměnné p.[6] Kdyby byla, nemohla by být specifikována proměnná p, která je zadána především svým oborem, následkem čehož nemůže být specifikována ani (... p ...). Propozice zahrnující totalitu propozic v oboru p, musí být prvkem nadřazené totality, tedy být prvkem typu vyššího řádu.

---

[4] Mnou zde přijímané sémantické schéma je ‚věta – propozice – pravdivostní hodnota‘; podobně pro predikáty vyjadřující intenzionální operátory.

[5] Výklad podávaný v oddíle 2. je do jisté míry idiosynkratický, nicméně jeho snahou je pokrýt mainstreamové uvažování v rámci různých RTT.

[6] V tomto textu užívám běžně uplatňovanou ambivalenci, kdy jednoduchou propozici i propoziční proměnnou zapisujeme jedním znakem „p“. (Věcně vzato je však v RTT propoziční proměnná objektem vyššího řádu, než je řád kterékoli propozice, která je v jejím oboru. To budu níže v zájmu zjednodušení úvah ignorovat.)

Typ je kolekcí (množinou) věcí téhož druhu, typy jsou proto vzájemně disjunktní. Například je tu typ individuí či typ unárních pravdivostních funkcí (jakožto zobrazení). Typy obsahující jen extenzionální objekty můžeme nazvat *extenzionální typy*. Typy obsahující intenzionální objekty můžeme nazvat *intenzionální typy*.[7]

Implementace Intenzionálního VCP vede k tomu, že v každém intenzionálním typu jsou identifikovány dílčí podtypy, tzv. *řády* daného typu. Například intenzionální typ propozic je takto rozdělen v typ prvořádových propozic, typ druhořádových propozic, ..., typ n-řádových propozic. Když tedy říkáme, že propozice p je např. řádu k (pro $1 \leq k \leq n$), je tím myšleno, že náleží do typu k-řádových propozic.[8]

Proměnná jako p^k je tedy vždy omezena na jeden určitý typ, v tomto případě typ k-řádových propozic, jež je takto oborem p^k. To znamená, že ani propozice p^{k+1}, ani složená propozice (... p^k ...), není v jejím oboru. To má důsledky i pro stavbu epistemických propozic, tedy propozic budovaných s pomocí intenzionálního operátoru K. K tomu ale blíže až níže.

Bylo by zbytečně restriktivní, kdyby v oboru např. propozičních proměnných nemohly být všechny propozice z nižších propozičních řádů. Chceme tedy, aby například v oboru proměnné p^k byly nejen propozice jako p^{k-1}, ale i třeba p^2 či p^1, pro $(k - 1) > 2$. Toto lze vtělit do podoby již Churchem (1976, 748) formulovaného *Principu kumulativity*:

Každá entita nějakého řádu k je zároveň řádu k+1.

Jako *Churchovské RTT* označuji ty RTT, které v sobě implementují Princip kumulativity. Příklady jsou Churchova anebo Tichého RTT; u Russellovy RTT není implementace kumulativity jednoznačná.

V zájmu rozřešení interpretačních otázek budu muset pracovat s jedinečnou RTT, kterou navrhl *Pavel Tichý* v Tichý (1988, 66, Def. 16.1), poněvadž jako jediná RTT disponuje nezbytnými druhy entit. Nechci zde ale uvádět definici této RTT, protože bych musel uvádět i další prvky Tichého

---

7 „Intenzionální typ" je jen instrumentální termín výkladu, protože žádný intenzionální typ není vlastně typem (nikdy se nejedná o množinu entit jednoho určitého řádu).

8 Při předpokladu kumulativity (viz níže) nejsou typy, jež jsou částmi téhož intenzionálního typu, vůči sobě vzájemně disjunktní. Další poznámka: je známo, že Russellovou motivací pro ramifikaci typů intenzionálních entit byl Paradox propozic. Teprve poté si uvědomil zákony formování propozic apod., např. tedy VCP. Řešení paradoxů je však třeba chápat jako vedlejší produkt pečlivého formování propozic a dalších intenzionálních entit.

komplexního logického systému. Pro porozumění našim zkoumáním postačí znát jen doposud řečené a rozdíly vzhledem k nejznámějším dvěma RTT.[9] Russellova i Churchova RTT má jeden extenzionální typ, totiž typ individuí, a řadu intenzionálních typů – typ propozic, typ monadických propozičních funkcí, atp. Tichého RTT má naproti tomu řadu extenzionálních typů – typ individuí, typ funkcí z individuí do pravdivostních hodnot,[10] atd. – ale jen jeden intenzionální typ. Tento typ obsahuje Tichého tzv. konstrukce, což jsou jakoby algoritmické procedury produkující jiné (obvykle extenzionální) objekty. (Namísto o konstrukcích budu nadále mluvit o propozicích či intenzionálních funkcích.) Nic takového není například v Russellově RTT, neboť Russell exkomunikoval veškerá zobrazení, včetně tříd; Churchova RTT v tomto sleduje Russellovu RTT.[11]

2.3. Russellovské typování znalosti: Pravidlo typování propozic

Před tím, než uvedu pravidlo typování, poukáži na intuitivní platnost myšlenky typování znalosti. Uvažme běžnou propozici, například ‚Fido je pes', jež vypovídá nějaký fyzikální („brute") fakt. Jde o propozici řádu 1, tedy náležící do typu prvořádových propozic. Takováto propozice může být známa, přičemž to vypovídá sice také fakt, ale jiného druhu. Propozice ‚Xenie ví, že Fido je pes' je *epistemická propozice*, která nás zpravuje o něčím postoji k prvořádové propozici a jako taková je řádu 2. Zcela analogicky, epistemická propozice ‚Yannis ví, že Xenie ví, že Fido je pes' je řádu 3. Atd. až *n*. Neboli, řád epistemických propozic se řídí především, avšak ne zcela výlučně, počtem vnořených intenzionálních operátorů K, k čemuž je přičtena jednička.[12] Kromě propozic jsou obvykle typovány i intenzionální funkce, ba i proměnné; následně mají různé typové varianty i příslušná dedukční pravidla.

---

[9] Samozřejmě budu využívat simplifikaci Tichého notace, zejména budu ignorovat parametrizaci možným světům a časům, vypouštět znaky trivializace a zjednodušovat zápisy logických symbolů.

[10] Ve funkcionálně založených systémech jsou třídy explikovány charakteristickými funkcemi.

[11] Kromě konstrukcí jsou v Tichého RTT navíc klasifikovány i funkce-zobrazení z či do konstrukcí.

[12] V Tarskiovském typování je však věta, tedy nikoli propozice, „Fido je pes" indexována číslicí „$_0$"; věta „Xenie ví, že Fido je pes" je indexována číslicí „$_1$", atp.; predikát „K" je tak buď „K_0" nebo „K_1" nebo ... nebo „K_n".

Pečlivé formování propozic vede k formulacím typové teorie, osobně preferuji teorii Tichého, jež je podána v Tichý (1988, Def. 16.1). Tato definice je natolik komplexní, že přesahuje argumentační potřeby v této stati. Omezím se proto jen na explicitní formulaci jednoduchého *Pravidla typování propozic*, jež mohou po případě obsahovat (monadický) intenzionální operátor O – např. operátor K. Kvůli kumulativitě hovoříme o nejnižším možném řádu, nikoli o jednom definitivním („the“) řádu:

i. *Nejnižší možný řád propozice neobsahující žádný intenzionální operátor je* 1.
   Nyní nechť p^k *je libovolnou propozicí řádu k, pro* $k \geq 1$.
ii. *Nejnižší možný řád intenzionálně složené propozice jako třeba* $\mathrm{O}^m p^k$, *pro* $m \geq k$, *kdy „*^{m}*“ indikuje řád argumentu pro* O, *je* $m+1$.
iii. *Nejnižší možný řád extenzionálně složené propozice je shodný s nejnižším možným řádem té její podpropozice, která má v ní nejvyšší řád.*

Příklad ad i.: p^1 / 1, kde „/“ zkracuje „... má nejnižší možný řád ...“. Příklady ad ii.: $\mathrm{K}^1 p^1$ / 2; $\mathrm{K}^2\mathrm{K}^1 p^1$ / 3; $\mathrm{K}^2 p^1$ / 3 (díky kumulativitě). Příklady ad iii.: $(p^1 \wedge q^1)$ / 1; $(p^2 \wedge q^1)$ / 2; $\mathrm{K}^2(p^2 \wedge q^1)$ / 3. Neboli, typ složených propozic se neindikuje, je třeba si ho dopočítat.

Níže se příležitostně zmíním o *řádu intenzionálního operátoru* O, ač jsem to ve výše uvedeném pravidle nezahrnul, neboť pro hlavní linii argumentace je Pravidlo typování propozic dostačující. K vystižení typování operátorů jako O by šlo výše uvedené pravidlo doplnit v tom smyslu, že je-li jako řád propozice $\mathrm{O}^m p^k$ uvažován $m+l$, pro $l \geq 0$, pak řád K^m je rovněž $m+l$. Platí přitom, že nejnižší možný řád O^m je o 1 vyšší než řád p^k, na níž se aplikuje. Podobně bychom řešili třeba případy řádu proměnných pro intenzionální objekty, přičemž platí, že jejich nejnižší řád je o 1 vyšší, než řád objektů jejich oboru proměnnosti.

Shrnuji, že typování intenzionálních entit je v Russellovském typování odůvodněno pravidly (zvl. VCP), která určují jejich (nekruhovou) výstavbu. V námi zkoumané problematice je důležité zvláště to, že specifikace operátoru K^m by nemohla být dokončena, pokud by se v oblasti aplikability K^m mohla vyskytovat propozice obsahující K^m (což je jasné z jeho tzv. η-expandované podoby, $\lambda p^k.\mathrm{K}^m p^k$). Dalším důležitým rysem pečlivého formování intenzionálních entit je, že kvantifikace přes ně je vždy omezena – což tvrdil už Russell ve své doktríně ‚all/any‘ (kvantifikace přes vůbec všechny propozice je nemožná, přípustná je pouze kvantifikace přes obor propozic určitého řádu *k*).

2.4. Zablokované reductio a jedno neplatné pravidlo týkající se znalosti

Výše uváděnou netypovou podobu FP je třeba zpřesnit v souladu s (Russellovským) pravidlem typování propozic (resp. znalosti). Jeho důsledkem není jen odlišení dílčích (řádových) variant operátoru K, ale také odlišení dílčích pravidel týkajících se znalosti. Klíčová část typovaného FP vypadá následovně:

$6^{L}.\ K^2(p^1 \wedge \neg K^1 p^1)$ // předpoklad
$7^{L}.\ (K^2 p^1 \wedge K^2 \neg K^1 p^1)$ // Dist na 6^{L}.
$8^{L}.\ (K^2 p^1 \wedge \neg K^1 p^1)$ // Fact na 7^{L}.

Takto odhalujeme, že propozice 8. má jiný, než původně uvažovaný obsah. Propozice 8^{L}. není kontradikcí, *reductio* je tudíž zablokováno.

Propozice 8^{L}. by ovšem byla kontradikcí, pokud by platilo následující pravidlo, které bychom mohli nazvat *Pravidlem dekrementace řádu znalosti*:

$K^2 p^1 \vdash K^1 p^1$.

O důvodu neplatnosti tohoto pravidla se vedla poměrně rozsáhlá debata, viz Williamson (2000), Linsky (2009), Paseau (2008), Carrara – Fassio (2011).

Z mého vlastního vysvětlení v Raclavský (2013), jež vychází z klasické teorie znalosti (‚JTB'), se zde omezím jen na to nejdůležitější. *m*-řádová znalost^m nějaké *k*-řádové propozice p^k, pro $m \geq k$, je definičně dána s pomocí odůvodnění^m p^k; odůvodnění^m je tak ‚částí' znalosti^m (přesvědčení^m je zas jinou ‚částí'). Odůvodnění^m nějaké p^k je definičně dáno existencí *m*-řádové propozice q^m, která je důvodem^m té p^k. To obnáší, že *m*-řádové odůvodnění^m nemůže být *m*–1-řádovým odůvodněním^{m-1}, a tudíž z $K^2 p^1$ nelze odvodit $K^1 p^1$. Pro ilustraci: to, že Xenie ví^2 prvořádovou propozici ‚Fido je pes', může být odůvodněno^2 tou propozicí, tj. důvodem^2, že Xenii tuto propozici sdělil Yannis a že Yannis je spolehlivý informátor. Xeniino vědění^2 té propozice proto není srovnatelné s věděním^1 té propozice například z důvodu^1, že Fido je čtyřnohý přítel člověka, což je totéž, připusťme, jako být pes.

3. Mstivá forma Fitchova paradoxu poznatelnosti

3.1. Williamsonova a Hartova mstivá forma Fitchova paradoxu

Jak jsem zmínil již v úvodu, mstivou formu FP uvedl již Williamson. Zde je citace příslušné pasáže, pod Williamsonovým „level" si představujme typ, či přesněji řád:

> We seem able to grasp the idea that p is *totally unknown*, in a sense which entails that p is unknown$_i$ for each level i, but which does not entail that p is untrue. If so, we can simply adapt Fitch's argument by considering the proposition that p is totally unknown truth, since that proposition cannot be known$_i$ for any level i. Naturally, such quantification over levels must be handled with great care. (Williamson 2000, 281)

V této úvaze je klíčová propozice, Carrarou s Fassiem zapisovaná formulí „$\forall t \neg K^t p$" (Williamson by psal „i" namísto „t"; Hart notaci jen naznačuje), jež zahrnuje kvantifikaci přes typy, resp. řády.

Formuli „$\forall t \neg K^t p$" ovšem chápu jako *ambivalentní* výraz. To má příčinu v tom, že nám již známý K^k je monadický operátor, přičemž „^{k}" je nedílnou součástí symbolu „K^k" – není to žádná proměnná.[13] Ale kritici typování znalosti předpokládají, že „t" proměnná je. V oboru t jsou podle nich typy, resp. řády. Proto celá idea mstivé formy FP připomíná Gödelovu (1944) nepřímo vyjádřenou myšlenku, že všeobjímající Russellova RTT by musela umět kvantifikovat přes své vlastní typy.

Pokud se ale ona proměnná „t" vyskytuje i v těle „$\forall t \neg K^t p$", tak by to mělo být syntakticky patrné. Po náležité úpravě notace bychom dostali formuli „$\forall t \neg K^m(p^k, t)$", pro $m \geq k$, v níž však vystupuje dyadický (binární) symbol, který by bylo vhodnější značit „$K_2{}^m$", aby se nepletl s monadickým symbolem „K^m".

V důsledku takovýchto úvah pak nalézám různá *čtení*, *výklady*, ambivalentního symbolu „K^t" a tedy i různá čtení mstivého FP, což je odvislé zejména od povahy t. V zájmu redukce této verze článku ovšem musím většinu z těchto čtení pominout a soustředit se jen na dvě nejnosnější z nich.[14]

Namísto s modifikovaným FP, jaký ve výše uvedeném citátu uvažoval Williamson, budu pracovat s podstatnou částí FP, kterou předložil Hart na straně 322 svého článku (viz Hart 2009). Drobné rozdíly vzhledem k výše

[13] Samozřejmě, že když píši třeba „K^k pro k=1", tak používám metajazyk RTT, v němž už toto „k" jako proměnná funguje. Referuji tím obratem na K^1, což je ten operátor znalosti, jenž se aplikuje na propozice řádu 1 (tj. k=1). V metajazyce RTT „K^k" či jednodušeji „K^k" reprezentuje proměnnou K^{k+1}, jejíž obor (a tedy i řád) je dostatečný pro příslušné úvahy.

[14] Tím ovšem musím vypustit i rozbor nepříliš propracovaného mstivého FP od Carrara – Fassio (2011, 187-188), jenž se opírá o předpoklad, že v obou svých výskytech je řád operátoru K v $K(p \wedge \neg Kp)$ totožný (protože nejvyšší možný), což je zcela v rozporu s pravidly RTT.

uváděnému FP lze pominout (formule 1^{H}. koresponduje formuli 2., formule 2^{H}. zase formuli 5.):[15]

1^{H}. $(p \wedge \forall t \neg \mathrm{K}^t p)$ // předpoklad, jež je řádu t+1
2^{H}. $\Diamond \mathrm{K}^{t+1}(p \wedge \forall t \neg \mathrm{K}^t p)$ // Ver na 1^{H}.
3^{H}. $\Diamond(\mathrm{K}^{t+1}p \wedge \mathrm{K}^{t+1}\forall t \neg \mathrm{K}^t p)$ // Dist na 2^{H}.
4^{H}. $\Diamond(\mathrm{K}^{t+1}p \wedge \forall t \neg \mathrm{K}^t p)$ // Fact na 3^{H}.
5^{H}. $\Diamond(\mathrm{K}^{t+1}p \wedge \neg \mathrm{K}^{t+1} p)$ // Univerzální instanciace na 4^{H}. (t+1 za t)

Jak Hart argumentuje, kontradikce $(\mathrm{K}^{t+1}p \wedge \neg \mathrm{K}^{t+1}p)$ nemůže platit, proto je kontradikcí i celá 5^{H}. Takže je nutné, že každá pravda je známa na nějaké typové úrovni.[16]

Lze si povšimnout, že zde uplatněná verze Univerzální instanciace je prostředkem jakéhosi nežádoucího zdvihu. Zdá se, že právě zde se děje něco nelegitimního, což mé analýzy potvrdí.

3.2. Dyadické výklady

Výše jsem řekl, že má-li být kvantifikace přes obor t co platná, „$\mathrm{K}^t p$“ musí být čtena jakožto vypovídající o binárním vztahu K_2 mezi propozicemi a objekty z oboru proměnné t. To obnáší, že namísto s operátorem znalosti jsme nuceni k uvažování se zcela jiným operátorem K_2. Kritikové typového přístupu k FP tedy změnili předmět úvahy. To je nepříhodné i díky tomu, že operátor K_2 nemá žádný přirozený intuitivní korelát.[17]

Abychom pojmu K_2 vůbec rozuměli, budeme jej muset definovat. Definice jednotlivých verzí budou mít následující tvar:

$$\mathrm{K}_2{}^m(p^k,t) =_{\mathrm{df}} \exists K^{m+1}\ (\#K^{m+1}p^k \wedge (t * K^{m+1}p^k)), \text{ pro } m \geq k.$$

Taková definice vysvětluje dyadický pojem vědění pomocí monadického. Vlastně říká, že $\mathrm{K}_2{}^m$ se aplikuje na dvojici $\langle p^k,t\rangle$ právě tehdy, když existuje nějaký m+1-řádový K-operátor jako např. K^m, který je takový, že $\mathrm{K}^m p^k$ platí – tedy p^k je známa^m – a $\mathrm{K}^m p^k$ má typ, resp. řád t.

---

15 Samozřejmě, že Hartovo Tarskiovské typování adaptuji na Russellovské.

16 Na základě pravidla necesitace z dokázané $\neg(p \wedge \forall t \neg \mathrm{K}^t p)$ odvozujeme $\Box\neg(p \wedge \forall t \neg \mathrm{K}^t p)$. Na základě klasických transformačních zákonů posléze získáme $\Box(\neg p \vee \neg\forall t \neg \mathrm{K}^t p)$ a pak $\Box(p \supset \exists t \mathrm{K}^t p)$, což zobecňujeme na $\Box\forall p\ (p \supset \exists t \mathrm{K}^t p)$.

17 Typový teoretik by řekl, že ‚totální neznalost‘ by se měla zachytit spíše pomocí kvantifikace přes operátory znalosti (univerzální kvantifikace by však byla omezená, takže *reductio* by bylo zablokováno).

V oboru proměnné K^{m+1} jsou m+1-řádové operátory znalosti jako například K^m, jež jsou aplikovatelné na m-řádové propozice jako p^k; $K^{m+1}p^k$ tedy produkuje například $\mathrm{K}^m p^k$.[18] Právě ono m chceme získat jakožto úroveň, na níž je propozice p^k známa. Potíž je ale v tom, že „^{m}" není, jak jsme si vysvětlili už výše, volná proměnná. Existují ovšem určité způsoby, jak m a naši volnou proměnnou t usouvztažnit a tak obsah m jakoby přenést do t. Toto usouvztažňování se projeví na níže navrženém druhu vazby $*$ mezi $\mathrm{K}^m p^k$ a t, což bude odpovídat tomu, zda t je modelem typu nebo modelem řádu. Intenzionální operátor # převádí propozici jako např. $\mathrm{K}^m p^k$, jež je produkována $K^{m+1}p^k$, na jí produkovanou pravdivostní hodnotu (v druhém konjunktu ovšem pracujeme s tou produkovanou propozicí $\mathrm{K}^m p^k$ jako takovou).[19]

3.3. Typy jako objekty meta-RTT

Poněkud překvapivě umí RTT *vypovídat o typech*.[20] Kvantifikace přes ně nebude omezena způsobem, jakým by tomu bylo v případě nějaké reprezentace typů třeba pomocí univerzálních tříd objektů.[21] Proto jsme schopni vyjádřit nejen tvrzení, že daný objekt je určitého typu, ale že daný objekt je některého z existujících typů, což obnáší kvantifikaci přes všechny typy.

Je důležité podotknout, že při uplatnění této metody budeme pomocí formulí hovořit o tom, co má nějaká konkrétní instance RTT za vlastnost, takže naše výpověď bude spadat do ji komentující instance RTT, tedy do *meta-RTT*.

Uvědomme si však, že žádná instance RTT nemůže vypovídat o svých typech. Jakákoli smysluplná diskuse o typech totiž předpokládá jejich specifikaci; je přitom vyloučeno, abychom nad typy, jež dosud nejsou specifiko-

---

[18] Rekapitulace řádů: p^k / m (neboť je argumentem pro K^m), K^m / m+1 (neboť se aplikuje na m-řádovou p^k, je proto vyššího řádu), K^{m+1} / m+2 (neboť probíhá obor m+1-řádových operátorů). $\mathrm{K}_2{}^m$ je m+1-řádový objekt, jenž je zde definován m+2-řádovým definiens.

[19] # je de facto Tichého tzv. dvojitou exekucí (srov. Tichý 1988, kap. 5). Ta ovšem zvyšuje řád, což zde pomíjíme proto, že # by se dalo s využitím složitějších prostředků, jež zde nebudu objasňovat, vyhnout.

[20] Zde prezentovanou metodu navrhl autor v rukopisu z r. 2008 a příležitostně ji zmiňoval ústně i v různých textech, jež zde není třeba dokládat, snad s výjimkou Raclavský (2012).

[21] Takové třídy by byly různých typů, takže by nemohly být všechny v oboru jedné proměnné t, jak chceme. (Univerzální třídy propozic by šlo využít k reprezentaci řádů, ale nikdy by nešlo o všechny řády, takže kvantifikace by byla omezena, takže *reductio* by v důsledku bylo zablokováno.)

vány, specifikovali nějakou instanci RTT, pomocí níž bychom o těch typech hovořili.

Nechť τ je atomickým typem nějaké konkrétní meta-RTT, přičemž obsahuje logicky primitivní objekty $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Tyto objekty slouží jako explikáty typů jisté konkrétní, objektové-RTT.

V oboru proměnné t_i jsou všechny tyto typy $T_1, T_2, \ldots, T_n$ bez výjimky. Příslušná verze Univerzální instanciace nám proto dovoluje kdykoli dosadit T_i za proměnnou t_i. Když budeme, pro zachování stylu uplatněnému v diskusi problému, namísto „T_1“, „T_2“, atd., psát „t“, „t_{m+1}“, atd., tak t_{m+1} je typ lexikograficky následující typ t; typ t_{m+1} může reprezentovat typ o 1 řád vyšší než typ t.

V definici K_2^m klademe v druhém konjunktu podmínku, že t_i je jedním z typů, které daná propozice jako např. $K^m p^k$ má (funkce ‚třída_typů_čeho_v_nějakém_kontextu^{m+1}‘ zobrazuje propozici na určitou třídu typů). To proto, že díky kumulativitě ona propozice patří, odvisle od nějakého ‚zastřešujícího‘ kontextu (což je limitováno do řádu m+1), do více typů, jež dohromady tvoří třídu. Funkci ‚typ_řádem_bezprostředně_vyšší_než‘ v definici používáme proto, že ve zmiňované třídě typů je sice typ propozice $K^m p^k$ (totiž t_{m+1}), jenže z něho si chceme odvodit typ (úroveň), na němž je p^k známa, což je typ o 1 řád nižší:

$$\mathrm{K_2}^m(p^k,t_m) =_{\mathrm{df}} \exists K^{m+1} (\#K^{m+1}p^k \wedge (\mathrm{TypŘádemBezprostředněVyššíNež}(t_m) \\ \in \mathrm{TřídaTypůČehoVNějakémKontextu}^{m+1}(K^{m+1}p^k))), \text{ pro } m \geq k.$$

Povšimněme si, že hodnoty proměnné t_i, tedy vlastně typy entit nějaké objektové RTT, mají pouze nepřímou korelaci s typem operátoru jako např. K^m, jenž náleží do meta-RTT. Vlastní typy objektů této meta-RTT totiž nemohou být tím, o čem tato meta-RTT dokáže vypovídat. Možnost oné korelace tak závisí na tom, zda je v nějaké metameta-RTT ustaveno patřičné propojení mezi K náležícím do objektové-RTT a K náležícím do meta-RTT.

Přezkoumáme-li nyní patřičně zpřesněný Hartův mstivý FP, zjistíme, že 5^T. není kontradikcí, takže *reductio* je zablokováno:

$1^T. (p^k \wedge \forall t_m \neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t_m))$ // předpoklad, jež je řádu m+1
$2^T. \Diamond \mathrm{K_2}^{m+1}((p^k \wedge \forall t_m \neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t_m)),t_{m+1})$ // Ver na 1^T.
$3^T. \Diamond (\mathrm{K_2}^{m+1}(p^k,t_{m+1}) \wedge \mathrm{K_2}^{m+1}(\forall t_m \neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t_m),t_{m+1}))$ // Dist na 2^T.
$4^T. \Diamond (\mathrm{K_2}^{m+1}(p^k,t_{m+1}) \wedge \forall t_m \neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t_m))$ // Fact na 3^T.
$5^T. \Diamond (\mathrm{K_2}^{m+1}(p^k,t_{m+1}) \wedge \neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t_{m+l}))$
// Univerzální instanciace na 4^T. (t_{m+l} za t_m; pro $l \geq 0$)

Ačkoli nám příslušná verze Univerzální instanciace dovoluje změnit t_m na t_{m+l}, nejsme v žádném smyslu nuceni, ani oprávněni tvrdit, že – když to zjednodušíme – propozice p^k, jež je neznáma^m, je rovněž neznáma^{m+1} (k tomuto srov. dále předposlední sekci tohoto textu).

3.4. Řády jako čísla

Explicitní mluvení o typech je jistě zajímavé samo o sobě, hlavně nám však umožňuje pracovat s Univerzální instanciací nepodléhající restrikci. Nyní přidáme to, že hodnotu proměnné t lze numericky zvyšovat o jedničku. Hodnotami t tedy musí být čísla a řády lze s určitými čísly plauzibilně explikovat. Toto chápání indexu „^{t}" v „K^t" je patrně nejbližší představám kritiků (srov. např. Hart 2009, 322).

Nechť ν (ný) je atomickým typem naší (meta-)RTT, jenž obsahuje přirozená čísla; nechť oborem proměnné t je právě ν. V příslušné definici se ptáme, zda t je nejnižším možným řádem epistemické propozice jako $\mathrm{K}^m p^k$, přičemž od toho musíme odečíst jedničku, abychom dostali správné číslo, jež je řádem, na němž je p^k známa:[22]

$$\mathrm{K_2}^m(p^k,t) =_{\mathrm{df}} \exists K^{m+1} (\#K^{m+1}p^k \wedge ((t+1)=\mathrm{NejnižšíMožnýŘádČeho}^{m+1}(K^{m+1}p^k))), \text{ pro } m\geq k.$$

Všimněme si, že korelace mezi t a m už není náhodná: řád propozice, která je produkována $K^{m+1}p^k$, je porovnáván s číslem t, přičemž daný řád má ona propozice v té RTT, v níž je i ono číslo.

Podívejme se nyní na patřičně desambiguovanou podobu mstivého FP:

$1^{\mathrm{O}}.\ (p^k \wedge \forall t\neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t))$ // předpoklad, jež je řádu m+1
$2^{\mathrm{O}}.\ \Diamond \mathrm{K_2}^{m+1}((p^k \wedge \forall t\neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t)),t+1)$ // Ver na 1^{O}.
$3^{\mathrm{O}}.\ \Diamond(\mathrm{K_2}^{m+1}(p^k,t+1) \wedge \mathrm{K_2}^m(\forall t\neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t),t+1))$ // Dist na 2^{O}.
$4^{\mathrm{O}}.\ \Diamond(\mathrm{K_2}^{m+1}(p^k,t+1) \wedge \forall t\neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t))$ // Fact na 3^{O}.
$5^{\mathrm{O}}.\ \Diamond(\mathrm{K_2}^{m+1}(p^k,t+1) \wedge \neg \mathrm{K_2}^m(p^k,t+1))$
// Univerzální instanciace na 4^{O}. (t+1 za t)

Protože jsme při definování $\mathrm{K_2}^m$ nepodmínili, že t musí být rovno nebo menší než m, druhý konjunkt 5^{O}. je přípustný. Když t+1 je číslo, které je vyšší než řád m propozice, jež je známa^m, negovaná část druhého konjunktu je nepravdivá (srov. definici $\mathrm{K_2}^m$).

[22] Funkce ‚nejnižší_možný_řád_čeho' je řádně definovatelná jen v meta-RTT, přičemž v definiens převádíme propozice na jejich typy a ty pak na jejich řády, tedy čísla.

Pro nás je podstatnější, že ačkoli nám zde uplatněná verze Univerzální instanciace navýšila řád, na němž je p^k neznáma, na t+1, nic nás nenutí zvýšit i řád dyadického vědění, neboli vyměnit K_2^m pomocí K_2^{m+1}. Takže propozice 5^O. není kontradiktorická a *reductio* je tudíž zablokováno.

3.5. Neplatné Pravidlo inkrementace řádu znalosti

Je však opravdu neplatné pravidlo $\neg K_2^m(p^k,t) \vdash \neg K_2^{m+1}(p^k,t)$, jak vlastně předpokládáme v diskutovaných dvou čteních? (Pokud by bylo platné, tak 5^T. a 5^O. by byly kontradikcemi a příslušné *reductio* by nebylo zablokováno.)

V zájmu názornosti odpovědi převedeme problém na jednodušší otázku, zda je doopravdy neplatné pravidlo, které nazvu *Pravidlo inkrementace řádu znalosti*:

$K^m p^k \vdash K^{m+1} p^k$.

Nelze si nepovšimnout, že se jedná o obrácenou podobu neplatného Pravidla dekrementace řádu znalosti, $K^{m+1}p^k \vdash K^m p^k$, jež jsme stručně diskutovali na konci sekce 2.

Na první pohled by se zdálo, že toto pravidlo platné je, poněvadž díky kumulativitě je m-řádová propozice q^m zároveň m+1-řádovou propozicí, takže důvod^m q^m znalosti^m p^k může být důvodem^{m+1} q^{m+1} znalosti^{m+1} p^k.

Namítám však, že odůvodnění^m p^k je pouze jednou z komponent znalosti^m. Podstatnou složkou je přece i domnívání se („belief“) dané propozice. A proto je víc jak evidentní, proč nemůžeme odvodit $K^{m+1}p^k$ z $K^m p^k$:

> Ač je p^k známa^m a tedy se domníváme^m, že p^k, nemusí existovat nikdo, kdo by se domníval^{m+1}, že p^k, takže p^k v takovémto případě známa^{m+1} být nemůže.

Pro případ neznalosti: neznalost^m p^k obnáší, že p^k je pravdivá^m a je odůvodněna^m nějakým důvodem^m, ale nedomníváme^m se ji. Z toho sice plyne, že p^k je pravdivá$^{m+1}$ a je odůvodněna^{m+1} nějakým m+1-řádovým důvodem^m, ale už neplyne, že se ji nedomníváme^{m+1}. Proto nelze z neznalosti p^k na úrovni m odvodit neznalost p^k na úrovni m+1.

4. Závěr

Na základě provedeného rozboru tvrdím, že Williamsonem a Hartem navržená mstivá forma Fitchova paradoxu poznatelnosti, jež je namířena proti Russellovskému typování znalosti a řešení Fitchova paradoxu touto metodou, je nefunkční.

Takovéto zjištění vlastně nemůže být žádným překvapením, poněvadž v pozadí útoku byla idea – zcela antagonistická RTT –, že nějaké epistemické propozice RTT dokáží mluvit o vědění na typové úrovni, do níž samy náleží. Při patrně nejzamýšlenějším výkladu (Hartova) mstivého FP jsme odhalili, že příčinou jeho selhávání není jen porušení typovacích principů, ale i neplatné odvozovací pravidlo. Přesvědčivost původní verze paradoxu byla přitom způsobena skicovitou notací, která porušení typových pravidel zakryla.[23]

Literatura

CARRARA, M. – FASSIO, D. (2011): Why Knowledge Should Not Be Typed: An Argument against the Type Solution to the Knowability Paradox. *Theoria* 2, No. 77, 180-193.

FITCH, F. B. (1963): A Logical Analysis of Some Value Concepts. *The Journal of Symbolic Logic* 28, No. 2, 135-142.

GIARETTA, P. (2009): The Paradox of Knowability from a Russellian Perspective. *Prolegomena* 8, No. 2, 141-158.

GÖDEL, K. (1944): Russell's Mathematical Logic. In: Schilpp, P. A. (ed.): *The Philosophy of Bertrand Russell*. Evanston – Chicago: Northwestern University, 125-153.

HART, W. D. (2009): Invincible Ignorance. In: Salerno, J. (ed.): *New Essays on the Knowability Paradox*. Oxford University Press, 321-323.

CHURCH, A. (1976): A Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies with that of Tarski. *Journal of Symbolic Logic* 41, No. 4, 747-760.

CHURCH, A. (2009): Referee Reports on Fitch's "A Definition of Value". In: Salerno, J. (ed.): *New Essays on the Knowability Paradox*. Oxford University Press, 13-20.

KRIPKE, S. (1975): Outline of a Theory of Truth. *The Journal of Philosophy* 72, No. 19, 690-716.

LINSKY, B. (2009): Logical Types in Some Arguments about Knowability and Belief. In: Salerno, J. (ed.): *New Essays on the Knowability Paradox*. Oxford University Press, 163-179.

PASEAU, A. (2008): Fitch's Argument and Typing Knowledge. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 49, No. 2, 153-176.

PRIEST, G. (1987/2006): *In Contradiction: A Study of the Transconsistent*. Oxford University Press.

[23] Za podnětné poznámky k prezentacím tohoto textu vděčím zvl. Davidovi Fassiovi, Massimilliano Carrarovi a Grahamu Priestovi.

RACLAVSKÝ, J. (2012): Důkazový asistent HOL a jeho logika. In: Dostálová, L. (ed.): *Organon VIII. Calculemus*. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni, 83-91.

RACLAVSKÝ, J. (2013): Fitchův paradox poznatelnosti a rozvětvená teorie typů. *Organon F* 20, Supplementary Issue 1, 144-165.

RACLAVSKÝ, J. (2014): Co jsou Russellovy propoziční funkce. *Filosofický časopis* 61, mimořádné číslo 2, 109-146.

RUSSELL, B. (1908): Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics* 30, No. 3, 222-262.

TARSKI, A. (1933/1956): The Notion of Truth in Formalized Languages. In: *Logic, Semantics and Metamathematics*. Oxford University Press, 152-278.

TICHÝ, P. (1988): *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin: Walter de Gruyter.

WILLIAMSON, T. (2000): *Knowledge and its Limits*. Oxford University Press.

WHITEHEAD, A. N. – RUSSELL, B. (1910–1913): *Principia Mathematica*. Cambridge University Press.