KVANTIFIKÁCIA V PRIRODZENOM JAZYKU (IV)

Marián ZOUHAR[1]

V predchádzajúcej časti tohto seriálu (pozri [10]) sme zaviedli kvantifikátory typu $\langle\langle 1\rangle, 1\rangle$, teda kvantifikátory, ktoré sú vyjadrené výrazmi kategórie DET. Zistili sme, že ide o funkcie zobrazujúce množiny vyjadrené výrazmi kategórie N, s ktorými príslušné výrazy kategórie DET utvárajú výrazy kategórie DP, do množiny množín vyznačujúcich sa určitou charakteristikou. Tá sa líši od prípadu k prípadu, teda v závislosti od toho, aký výraz kategórie DET sa v danom kvantifikátorovom výraze vyskytuje. Ukázalo sa, že takýto postup vyhovuje kompozičnému chápaniu sémantiky výrokov. Napokon sme sa začali zaoberať vlastnosťami kvantifikátorov typu $\langle\langle 1\rangle, 1\rangle$, pričom sme spomenuli dve z nich: extenzívnosť a konzervatívnosť. Pomocou extenzívnosti a konzervatívnosti sme vymedzili, v čom spočíva jedna špecifická vlastnosť kvantifikácie v prirodzenom jazyku, konkrétne zúženie univerza. V tomto pokračovaní uvedieme niektoré ďalšie vlastnosti, ktoré nám umožňujú klasifikovať kvantifikátory.

1.10 Invariantnosť

Logické jazyky obsahujú špecifickú kategóriu výrazov, ktoré sa nazývajú logické konštanty. V jazyku predikátovej logiky prvého rádu sú nimi logické spojky a kvantifikátorové výrazy. Logické konštanty sa vyznačujú tým, že ich interpretácia je v ľubovoľnom modeli tá istá. Teraz sa pokúsime rozšíriť pojem logickej konštanty aj na kvantifikátorové výrazy z prirodzeného jazyka, t. j. na výrazy kategórie DET, prípadne výrazy kategórie DP.

Ako prvú možno formulovať pre kvantifikátorové výrazy, ktoré by mali byť logickými konštantami, podmienku obsiahnutú v nasledujúcej definícii *permutačnej invariantnosti*:

> Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!]\rangle$ je model a δ je determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **permutačne invariantný** vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľnú permutáciu π univerza $\mathbf{U}$ a pre ľubovoľné množiny $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi} \subseteq \mathbf{U}$ platí: $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow \pi[\boldsymbol{\psi}] \in [\![\delta]\!](\pi[\boldsymbol{\varphi}])$.[2]

Množinu všetkých objektov, ktoré spĺňajú permutačnú invariantnosť, budeme označovať ako **PERM**. Ak kvantifikátor $[[\delta]]$ túto podmienku spĺňa, platí: $[[\delta]] \in$ **PERM**.

Vezmime si na ilustráciu nasledujúci jednoduchý príklad:

---

[1] Táto štúdia vznikla v rámci grantového projektu VEGA č. 2/6136/26 *Referencia, kvantifikácia, predikácia*.

[2] Permutácia nejakej množiny **M** je jedno-jednoznačné (prosté) zobrazenie množiny **M** na **M**.

$\mathbf{U} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$; $\pi[\mathbf{a}] = \mathbf{c}$;
$\boldsymbol{\varphi} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$; $\pi[\mathbf{b}] = \mathbf{b}$;
$\boldsymbol{\psi} = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$; $\pi[\mathbf{c}] = \mathbf{a}$.

Dá sa ukázať, že determinátor „niektorý“ vyjadruje taký kvantifikátor, ktorý je prvkom PERM. Ak máme $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi})$, tak $[\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi})$ bude množinou všetkých tých množín, ktoré majú neprázdny prienik s množinou $\boldsymbol{\varphi}$. Podľa uvedeného zadania je jasné, že prienik množín $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ je neprázdny (obsahuje prvok $\mathbf{a}$). Ak zoberieme do úvahy permutáciu π, tak

$\pi[\boldsymbol{\varphi}] = \{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$;
$\pi[\boldsymbol{\psi}] = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$.

Aj v tomto prípade je zrejmé, že bude platiť $\pi[\boldsymbol{\psi}] \in [\![\delta]\!](\pi[\boldsymbol{\varphi}])$, keďže množiny $\pi[\boldsymbol{\psi}]$ a $\pi[\boldsymbol{\varphi}]$ majú neprázdny prienik (množinu $\{\mathbf{c}\}$). Keby sme zobrali do úvahy akúkoľvek permutáciu množiny $\mathbf{U}$, dostali by sme podobný výsledok, takže kvantifikátor [[niektorý]] je prvkom PERM.

Keby sme sa pomocou uvedeného zadania pokúsili zistiť, či permutačne invariantný je aj kvantifikátor [[žiadny]], zistili by sme, že je taký. Pomocou jednoduchej úvahy, ktorú nechávam na čitateľa, sa dá zistiť, že nie je pravda ani to, že $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi})$, ani to, že $\pi[\boldsymbol{\psi}] \in [\![\delta]\!](\pi[\boldsymbol{\varphi}])$. Opäť to bude platiť pre ľubovoľnú permutáciu, takže kvantifikátor [[žiadny]] je permutačne invariantný.

Permutačnú invariantnosť môžeme ľahko rozšíriť tak, aby sa neobmedzovala iba na konkrétny (no ľubovoľný) model, resp. univerzum, ale aby sa týkala ktorejkoľvek dvojice modelov, resp. univerz. Dostaneme definíciu *izomorfnej invariantnosti*:

> Nech $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbf{U}_1, [\![\ ]\!] \rangle$ a $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbf{U}_2, [\![\ ]\!] \rangle$ sú modely a δ je determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **izomorfne invariantný** vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné jedno-jednoznačné zobrazenie f z $\mathbf{U}_1$ na $\mathbf{U}_2$ a pre ľubovoľné množiny $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \subseteq \mathbf{U}$ platí: $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow f[\boldsymbol{\psi}] \in [\![\delta]\!](f[\boldsymbol{\varphi}])$.

Množinu všetkých objektov, ktoré spĺňajú izomorfnú invariantnosť, budeme označovať ako ISOM. Ak kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ túto podmienku spĺňa, tak platí: $[\![\delta]\!] \in$ ISOM.

Rozdiel medzi týmito podmienkami je v tom, že permutačná invariantnosť je *lokálna* a izomorfná invariantnosť je *globálna* podmienka (pozri [4], 849 – 850). Lokálnosť je daná tým, že permutačná invariantnosť sa obmedzuje na situáciu v rámci jedného univerza a na permutácie prvkov tohto univerza. Globálnosť zase pramení z toho, že môžeme vybrať ktorékoľvek dve univerzá (ak je medzi nimi jedno-jednoznačné zobrazenie).

Izomorfná invariantnosť naznačuje, že pre daný kvantifikátor je irelevantné, ktoré prvky tvoria univerzum; na identite prvkov univerza teda nezáleží. Inými slovami, daný kvantifikátor zostáva tým istým kvantifikátorom bez ohľadu na to, z akých prvkov pozostáva univerzum. D. Westerståhl charakterizuje túto podmienku ako tzv. *topic neutrality* (t. j. predmetová neutrálnosť) (pozri [7], 388).

A to je dôležité. Tým je splnená podmienka logickosti pre kvantifikátorové výrazy, resp. pre determinátory. Ak máme determinátor δ z daného jazyka a máme tento determinátor považovať za logický výraz, nemôže byť dôležité, aké predmety máme v príslušnom univerze, pretože kvantifikátor vyjadrený týmto determinátorom sa bude správať rovnako v tomto univerze ako v ktoromkoľvek inom.

Aké determinátory môžu slúžiť ako príklady logických výrazov? Kvantifikátory vyjadrené determinátormi ako „všetky“, „niektoré“, „žiadny“, „aspoň jeden“, najviac tri“, väčšina“ atď. sú izomorfne invariantné. Vezmime si vety:

(1) Niektorí politici sú nepodplatiteľní.
(2) Všetci traja albánski logici čítajú poéziu.

Pravdivostné podmienky týchto viet sú nasledujúce:

$[\![(1)]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\mathbf{N} \in \{\mathbf{X} \subseteq \mathbf{U}\text{: } \mathbf{X} \cap \mathbf{P} \neq \varnothing\}$;
$[\![(2)]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\mathbf{C} \in \{\mathbf{X} \subseteq \mathbf{U}\text{: } \mathbf{L} \subseteq \mathbf{X}\ \&\ |\mathbf{L}| = 3\}$,

kde **N** je množina nepodplatiteľných indivíduí, **P** je množina politikov, **C** je množina indivíduí, ktoré čítajú poéziu, a **L** je množina albánskych logikov. Predpokladajme, že v našom modeli sú vety (1) a (2) pravdivé. Ak máme také univerzum **U***, v ktorom existuje jedno-jednoznačné zobrazenie f z **U** na **U***, pravdivostná hodnota sa nezmení, keďže napríklad množinu **N** zobrazíme na inú množinu $f[\mathbf{N}]$ a množinu **P** na množinu $f[\mathbf{P}]$, čo znamená, že každému prvku x z **N** a každému prvku y z **P** priradíme prvok $f[x]$ z $f[\mathbf{N}]$, resp. $f[y]$ z $f[\mathbf{P}]$. Ak teda pôvodné množiny **N** a **P** mali neprázdny prienik, budú ho mať aj množiny $f[\mathbf{N}]$ a $f[\mathbf{P}]$ (nemôže sa totiž stať, že prvku, ktorý je v prieniku **N** a **P**, priradí zobrazenie f dva rôzne prvky, pričom jeden by patril do $f[\mathbf{N}]$ a druhý do $f[\mathbf{P}]$, ale nie naopak – vždy mu bude priradený práve jeden prvok a ten sa bude nachádzať v prieniku množín $f[\mathbf{N}]$ a $f[\mathbf{P}]$). Analogicky to platí o vete (2).

Skúsme sa však pozrieť na vetu (2) trochu inak. Pri predchádzajúcej analýze sme vyšli z toho, že výraz kategórie DP „všetci traja albánski logici“ sa rozkladá na DET „všetci traja“ a N „albánski logici“. Samozrejme, výraz „všetci traja“ spĺňa podmienku izomorfnej invariantnosti. Je však možná aj iná analýza výrazu „všetci traja albánski logici“; ako výraz kategórie DET môžeme zobrať „všetci traja albánski“ a výrazom kategórie N bude „logici“. (Navyše, táto voľba by mala byť prirodzenejšia, lebo výraz „albánski logici“ v skutočnosti nie je výrazom kategórie N.) Teraz je otázne, či determinátor „všetci traja albánski“ je logickým výrazom, teda či príslušný kvantifikátor je prvkom množiny ISOM. Odpoveď je, prirodzene, záporná, ako to možno vidieť z nasledujúceho príkladu.

V prvom rade treba poznamenať, že kvantifikátor vyjadrený výrazom „všetci traja albánski“ by sme mohli špecifikovať takto:

Pre ľubovoľnú množinu $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{U}$ platí:
$[\![\text{všetci traja albánski}]\!]\text{: } \mathbf{Y} \Rightarrow \{\mathbf{X} \subseteq \mathbf{U}\text{: } \mathbf{Y} \cap \mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}\ \&\ |\mathbf{Y} \cap \mathbf{A}| = 3\}$,

kde **A** je množina všetkých Albáncov. Determínátor „všetci traja albánski" bude vyjadrovať funkciu (kvantifikátor typu ⟨⟨1⟩, 1⟩), ktorá zobrazuje množinu označenú výrazom kategórie N (v našom prípade výrazom „logici", keďže naším výrazom kategórie DP je „všetci traja albánski logici") do množiny označenej výrazom kategórie DP (t. j. „všetci traja albánski logici" – ide teda o množinu všetkých takých množín, ktorých podmnožinou je množina všetkých albánskych logikov, pričom táto množina albánskych logikov je trojprvková).

Vezmime si teraz dve univerzá **U** a **U***. Ďalej nech **K**, resp. **K*** sú množiny logikov v **U**, resp. **U***; **C**, resp. **C*** sú množiny indivíduí, ktoré čítajú poéziu v **U**, resp. **U***; **A**, resp. **A*** sú množiny indivíduí, ktoré sú Albáncami v **U**, resp. **U***. Pre vetu (2) by potom platilo:

$[\![(2)]\!]_{\mathrm{U}} = \mathbf{1}\ vtt\ \mathbf{C} \in \{\mathbf{X} \subseteq \mathbf{U}: \mathbf{K} \cap \mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}\ \&\ |\mathbf{K} \cap \mathbf{A}| = 3\}.$

$[\![(2)]\!]_{\mathrm{U}^*} = \mathbf{1}\ vtt\ \mathbf{C}^* \in \{\mathbf{X}^* \subseteq \mathbf{U}^*: \mathbf{K}^* \cap \mathbf{A}^* \subseteq \mathbf{X}^*\ \&\ |\mathbf{K}^* \cap \mathbf{A}^*| = 3\}.$

Nech $\mathbf{U} = f[\mathbf{U}^*]$, teda pre každý prvok x z **U** existuje prvok $f[x]$ z **U***, a zároveň platí: $\mathbf{C} = f[\mathbf{C}^*]$ a $\mathbf{K} = f[\mathbf{K}^*]$. Nech sa však univerzá **U** a **U*** líšia takto: Jedno indivíduum, ktoré je v **U** Albáncom a logikom, je v **U*** iba logikom, pričom má inú národnosť. To znamená, že v univerze **U*** sú logikmi iba dvaja Albánci, takže veta (2) v **U*** by bola nepravdivá, hoci v rámci univerza **U** zostáva pravdivá. Tento rozdiel v pravdivostných hodnotách – a to je podstatné – vznikol v dôsledku toho, že výraz „albánsky" nadobúda v týchto dvoch prípadoch rozličnú interpretáciu, hoci je súčasťou determinátora. V predchádzajúcom determinátore „všetci traja" nemáme výraz, ktorý by takto mohol nadobúdať rôzne interpretácie.

Ak to zovšeobecníme, dostaneme, že logickými konštantami nemôžu byť také determinátory, ktoré obsahujú ako svoj podvýraz nejaký výraz kategórie N. Interpretácia takéhoto výrazu sa totiž líši od jedného modelu k druhému. Rozdiel medzi determinátormi, ktoré môžu slúžiť ako logické výrazy, a tými, ktoré v takejto pozícii vystupovať nemôžu, spočíva teda v tom, že prvý druh determinátorov nemôže obsahovať výraz, ktorého sémantický obsah závisí od interpretácie predikátových výrazov v danom modeli. Ako príklady izomorfne invariantných kvantifikátorov môžu slúžiť tie, ktoré sú vyjadrené determinátormi:

„každý"; „niektorí"; „žiadny"; „nie každý"; „najmenej dve"; „najviac dve"; „práve dve"; „dve"; „nie menej ako dve, ale najviac štyri"; „nie menej ako dve, ale nie viac ako štyri"; všetci okrem dvoch alebo troch"; „konečne veľa"; „nekonečne veľa"; atď.

Ako príklady kvantifikátorov, ktoré túto vlastnosť nemajú, môžeme uviesť tie, ktoré sú vyjadrené determinátormi:

„všetci albánski"; „nikto až na zopár zdrogovaných"; „nikto okrem Petra"; „nikto okrem Petra a Pavla"; „nikto okrem Petra alebo Pavla"; „žiadny zo štyroch nepriateľských"; atď.

Izomorfná invariantnosť je nesmierne užitočná tým, že veľa vecí zjednodušuje. Keďže nám umožňuje abstrahovať od konkrétnych indivíduí, a tým aj od konkrétnych množín, pravdivostné podmienky výrokov s determinátormi, ktoré vyjadrujú kvantifikátory z množiny ISOM, možno redukovať na kardinalitu určitých množín, resp. pomery medzi kardinalitami určitých množín, t. j. na pomery počtu prvkov určitých množín. Čo to znamená? Vezmime si jednoduchý príklad:

$[\![\text{Každé } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\boldsymbol{\psi} \in \{\mathbf{X} \subseteq \mathbf{U}\colon \boldsymbol{\varphi} \subseteq \mathbf{X}\}$.

Keď tú istú podmienku vyjadríme jednoduchšie, dostaneme (pozri [9]):

$[\![\text{Každé } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\boldsymbol{\varphi} \subseteq \boldsymbol{\psi}$.

Ekvivalentným zápisom tohto posledného vyjadrenia bude:

$[\![\text{Každé } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi} = \varnothing$;

t. j. platí, že ak množina $\boldsymbol{\varphi}$ je podmnožinou množiny $\boldsymbol{\psi}$, tak rozdiel množín $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ je prázdny, čo znamená, že množina tých prvkov z $\boldsymbol{\varphi}$, ktoré nebudú patriť do $\boldsymbol{\psi}$, je prázdna. A to môžeme alternatívne vyjadriť tak, že počet prvkov rozdielu množín $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ je 0. Máme teda:

$[\![\text{Každé } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = 0$.

To znamená, že na určenie pravdivostnej hodnoty výroku s výrazom „každý“ nám stačí zobrať počet prvkov určitej množiny, teda kardinalitu tejto množiny. Zoberme si ešte iný príklad:

$[\![\text{Niektoré } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\boldsymbol{\psi} \in \{\mathbf{X} \subseteq \mathbf{U}\colon \mathbf{X} \cap \boldsymbol{\varphi} \neq \varnothing\}$.

Inými slovami:

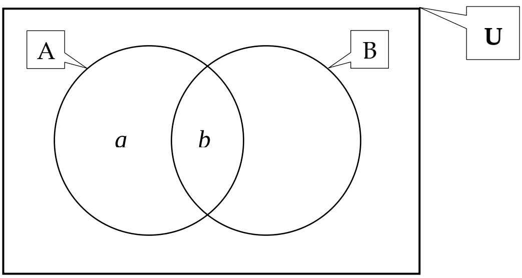
$[\![\text{Niektoré } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi} \neq \varnothing$.

A to znamená:

$[\![\text{Niektoré } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| \neq 0$.

Platí totiž, že prienik množín $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ bude neprázdny iba vtedy, keď počet prvkov v ich prieniku nie je rovný nule. Opäť je dôležitá iba kardinalita určitej množiny.

Johan van Benthem to ukazuje na nasledujúcom obrázku.



Ide o to, že správanie istých kvantifikátorov „je úplne špecifikované dvojicou kardinalít (a, b), kde $a = |\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ a $b = |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$“ ([6], 446). Množina **A** je teda vždy najdôležitejšia a záleží iba na počte prvkov z množiny **A**, ktoré nie sú v prieniku s množinou **B**, prípadne záleží na počte prvkov v prieniku týchto dvoch množín. Keby sme mali vyjadriť predchádzajúce príklady spôsobom konformným s van Benthemovým postrehom, dostali by sme:

$[\![$Každé φ je ψ$]\!]$ = **1** *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = 0$ & $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = |\boldsymbol{\varphi}|$;
$[\![$Niektoré φ je ψ$]\!]$ = **1** *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| \neq 0$ & $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| \neq |\boldsymbol{\varphi}|$.

1.11 Existenčné a všeobecné kvantifikátory

Práve sme videli, že pri definovaní kvantifikátorov, ktoré môžeme považovať za logické (t. j. patria do ISOM), sú relevantné dve boolovské operácie: rozdiel množín a prienik množín. Pri definovaní kvantifikátora vyjadreného výrazom „každý“ sme využili operáciu rozdielu, kým pri definovaní kvantifikátora vyjadreného výrazom „niektorý“ sme využili operáciu prieniku. Táto skutočnosť je pomerne inštruktívna, lebo na základe nej dokážeme rozlíšiť existenčné a všeobecné kvantifikátory v prirodzenom jazyku. S existenčnými kvantifikátormi budeme spájať operáciu prieniku a so všeobecnými kvantifikátormi zase operáciu rozdielu. Prečo? Porovnajme verifikačné procedúry, ktoré by sme mali uskutočniť, aby sme zistili pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov:

(3) Niektorí logici sú roztržití.
(4) Všetci logici sú roztržití.

Aby sme zistili, či veta (3) je pravdivá (vzhľadom na dané univerzum), stačí, keď nájdeme aspoň jeden prvok z univerza, ktorý je logikom a je roztržitý. Aby sme zistili, či je veta (4) v danom univerze pravdivá, musíme o každom logikovi zistiť, či je roztržitý. V prvom prípade nás teda zaujíma prienik množín logikov a roztržitých indivíduí, kým v druhom prípade musíme zistiť, či sa v množine logikov, ktorí nie sú roztržití, nachádza nejaké indivíduum – a to znamená, že skúmame rozdiel množín logikov a roztržitých indivíduí.

Zaveďme teraz definíciu tzv. *intersektívnych kvantifikátorov*:[3]

Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!] \rangle$ je model a δ determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **intersektívny** vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\psi}^* \subseteq \mathbf{U}$ platí, že ak $\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}^* \cap \boldsymbol{\psi}^*$, tak $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}^* \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}^*)$.

Množinu všetkých intersektívnych kvantifikátorov budeme označovať ako INT; ak teda platí, že $[\![\delta]\!]$ je intersektívny kvantifikátor, tak $[\![\delta]\!] \in$ INT. Táto definícia hovorí, že ak determinátor δ vo výrokoch „δ φ je ψ“ a „δ φ* je ψ*“ je intersektívny, pričom množiny $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ majú ten istý prienik ako množiny $\boldsymbol{\varphi}^*$ a $\boldsymbol{\psi}^*$, tak pravdivostná hodnota oboch výrokov je tá istá. Takto je zachytená skutočnosť, že pri určovaní pravdivostnej hodnoty výroku s determinátorom, ktorý vyjadruje intersektívny kvantifikátor, je relevantný prienik istých množín.

[3] Anglicky: „intersective quantifiers“. „Intersection“ v angličtine znamená prienik.

To, či daný kvantifikátor je alebo nie je intersektívny, ľahko zistíme pomocou nasledujúceho testu. Vráťme sa k vete (3). Táto veta tvrdí to isté čo vety (pozri [3], 630):

(5) Niektorí roztržití logici existujú.
(6) Niektoré indivíduá sú roztržití logici.

Ak univerzum stanovuje množinu všetkých indivíduí a všetky indivíduá predstavujú všetko, čo existuje, tak dostaneme:

(7) $\boldsymbol{\psi} \in [\![\text{niektoré}]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow \mathbf{U} \in [\![\text{niektoré}]\!](\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi})$.
(8) $\boldsymbol{\psi} \in [\![\text{niektoré}]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}) \in [\![\text{niektoré}]\!](\mathbf{U})$.

Pravdivostné podmienky vety (5) sú obsiahnuté na pravej strane ekvivalencie zo (7) a pravdivostné podmienky vety (6) sa zase nachádzajú na pravej strane ekvivalencie (8).

Pomocou tohto testu možno zistiť, že intersektívne sú kvantifikátory vyjadrené nasledujúcimi determinátormi:

„niektorý“; „žiadny“; „päť až desať“; „najmenej sedem, ale najviac deväť“; „osem“; „presne osem“; atď.

Platí totiž, že vety v bode *a*. sú ekvivalentné vetám v *b*. a *c*. v nasledujúcich príkladoch:

(9) *a*. Žiadne číslo nie je deliteľné nulou.
b. Žiadne číslo deliteľné nulou neexistuje.
c. Žiadna vec nie je číslom deliteľným nulou.
(10) *a*. Najmenej sedmi, ale najviac deviati poslanci sú zločinci.
b. Existujú najmenej siedmi, ale najviac deviati poslanci, ktorí sú zločincami.
c. Najmenej sedem, ale najviac deväť indivíduí sú poslanci a zároveň zločinci.
(11) *a*. Presne osem záhradkárov protestuje.
b. Existuje presne osem protestujúcich záhradkárov.
c. Presne osem indivíduí sú protestujúci záhradkári.

Príklady na ostatné spomenuté a podobné kvantifikátory si čitateľ určite vymyslí sám. Intersektívne kvantifikátory môžeme stotožniť s existenčnými kvantifikátormi.

Všeobecné kvantifikátory zase budú tie, ktoré spadajú pod nasledujúcu definíciu tzv. *ko-intersektívnych kvantifikátorov*:

Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!] \rangle$ je model a δ determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **ko-intersektívny** vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\psi}^* \subseteq \mathbf{U}$ platí, že ak $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}^* - \boldsymbol{\psi}^*$, tak $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}^* \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}^*)$.[4]

[4] Anglicky „co-intersective quantifiers“. Použitie termínu „kointersektívny“ môžno zdôvodniť nasledujúcim spôsobom: Platí, že $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}'$, kde $\boldsymbol{\psi}'$ predstavuje doplnok

Množinu všetkých ko-intersektívnych kvantifikátorov budeme označovať ako CO-INT; ak teda platí, že $[\![\delta]\!]$ je ko-intersektívny kvantifikátor, tak $[\![\delta]\!] \in$ CO-INT. Táto definícia hovorí, že ak determinátor δ vo výrokoch „δ φ je ψ" a „δ φ* je ψ*" je ko-intersektívny, pričom množiny **φ** a **ψ** majú ten istý rozdiel ako množiny **φ*** a **ψ***, tak pravdivostná hodnota oboch výrokov je tá istá. Takto je zachytená skutočnosť, že pri určovaní pravdivostnej hodnoty výroku s determinátorom, ktorý vyjadruje ko-intersektívny kvantifikátor, je relevantný rozdiel istých množín.

Nasledujúce determinátory vyjadrujú ko-intersektívne kvantifikátory:

„každý"; „každý okrem niekoľkých"; „každý okrem dvoch"; „všetci okrem dvoch alebo troch"; „takmer každý", atď.

Bude platiť:

$[\![$každé φ je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi} = \varnothing$;
$[\![$každé φ okrem dvoch je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = 2$;
$[\![$každé φ okrem dvoch alebo troch je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = 2 \vee |\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = 3$.

Termíny „niekoľkí" vo výraze „všetci okrem niekoľkých" a „takmer" vo výraze „takmer všetci" sú neostré, preto treba prijať nejakú konvenciu, ktorá rozhodne, koľkí sú tí niekoľkí zo všetkých, resp. koľkí sú takmer všetci. Nech k predstavuje takto konvenčne zvolené číslo; potom platí:

$[\![$každé φ okrem niekoľkých je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = k$;
$[\![$takmer každé φ je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = k$.

V určitých situáciách sú v závislosti od voľby hodnoty k vety „každé φ okrem niekoľkých je ψ" a „takmer každé φ je ψ" ekvivalentné (platí to vtedy, ak v oboch prípadoch vyberieme to isté číslo ako hodnotu k).

Máme nejaký test, ktorý by dokázal identifikovať ko-intersektívne kvantifikátory podobne, ako sme mali test pre intersektívne kvantifikátory? Samozrejme, že máme, keďže platí nasledujúca rovnosť:

$$\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}') = (\boldsymbol{\varphi}' \cup \boldsymbol{\psi})' = \mathbf{U} - (\boldsymbol{\varphi}' \cup \boldsymbol{\psi}),$$

kde $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}$ je rozdiel množín **φ** a **ψ**, **φ'** je doplnok množiny **φ** a **U** je univerzum. To znamená, že veta (12*a*) je ekvivalentná vete (12*b*):

(12) *a.* Všetci logici sú abstinenti.
b. Všetky indivíduá sú také, že nie sú logici alebo sú abstinenti.

Už z predchádzajúcich príkladov intersektívnych a ko-intersektívnych kvantifikátorov možno vidieť, že niektoré z nich sa dajú definovať pomocou kardinality určitých množín. Môžeme definovať (pozri [3]):

množiny **ψ**. Pri ko-intersektívnych kvantifikátoroch je teda dôležitý prienik množiny **φ** s doplnkom množiny **ψ**; objavuje sa tu prienik (ako pri intersektívnych kvantifikátoroch), ale ide o prienik s doplnkom množiny, ktorá je zmienená vo vete.

Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!] \rangle$ je model a δ determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **kardinálny** vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\psi}^* \subseteq \mathbf{U}$ platí, že ak $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = |\boldsymbol{\varphi}^* \cap \boldsymbol{\psi}^*|$, tak $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}^* \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}^*)$.

Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!] \rangle$ je model a δ determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **ko-kardinálny** vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\psi}^* \subseteq \mathbf{U}$ platí, že ak $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = |\boldsymbol{\varphi}^* - \boldsymbol{\psi}^*|$, tak $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}^* \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}^*)$.

Množinu všetkých kardinálnych kvantifikátorov budeme označovať ako CARD; ak teda platí, že $[\![\delta]\!]$ je kardinálny kvantifikátor, tak $[\![\delta]\!] \in$ CARD. Množinu všetkých ko-kardinálnych kvantifikátorov budeme označovať ako CO-CARD; ak teda platí, že $[\![\delta]\!]$ je ko-kardinálny kvantifikátor, tak $[\![\delta]\!] \in$ CO-CARD. Platí teda: CARD $\subseteq$ INT a CO-CARD $\subseteq$ CO-INT.

Jednoduché kvantifikátory typu $\langle\langle 1\rangle, 1\rangle$ dokážeme skladať do zložitejších kvantifikátorov typu $\langle\langle 1\rangle, 1\rangle$ pomocou boolovských operácií prieniku, zjednotenia, rozdielu a doplnku. To sme si všimli už v časti [10]. Platia nasledujúce skutočnosti:

a) ak spojíme dva (alebo viaceré) intersektívne kvantifikátory pomocou niektorej boolovskej operácie, výsledkom je opäť intersektívny kvantifikátor;
b) ak spojíme dva (alebo viaceré) ko-intersektívne kvantifikátory pomocou niektorej boolovskej operácie, výsledkom je opäť ko-intersektívny kvantifikátor;
c) ak spojíme intersektívny kvantifikátor s ko-intersektívnym kvantifikátorom pomocou niektorej boolovskej operácie, výsledkom je kvantifikátor, ktorý nie je ani intersektívny, ani ko-intersektívny.

Príklady:

$[\![$päť φ alebo šesť ψ je $\chi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\chi}| = 5 \vee |\boldsymbol{\psi} \cap \boldsymbol{\chi}| = 5$;
$[\![$každé φ a takmer každé ψ je $\chi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\chi}| = 0\ \&\ |\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\chi}| = k$,
kde k je konvenčne zvolené číslo blížiace sa 0;
$[\![$päť φ a každé ψ je $\chi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\chi}| = 5\ \&\ |\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\chi}| = 0$.

V prvom príklade pracujeme iba s prienikmi množín, v druhom príklade sa objavuje iba rozdiel množín, no v treťom príklade máme aj prienik, aj rozdiel množín. Prvý príklad teda reprezentuje intersektívny kvantifikátor, druhý reprezentuje ko-intersektívny kvantifikátor a tretí reprezentuje kvantifikátor, ktorý nie je ani jedného, ani druhého druhu.

Ďalej platí – ako dokázal Keenan (pozri [2], 317) –, že množina všetkých konzervatívnych kvantifikátorov, t. j. CONS, je úplným boolovským uzáverom množín INT a CO-INT. To znamená, že prvkami množiny CONS sú iba také kvantifikátory, ktoré sú buď intersektívne, alebo ko-intersektívne, alebo pozostávajú výlučne z intersektívnych a/alebo ko-intersektívnych kvantifikátorov spojených pomocou boolovských operácií.

1.12 Proporcionálne kvantifikátory

Intersektívne kvantifikátory sa definujú prostredníctvom prieniku množín, kým ko-intersektívne kvantifikátory sa definujú prostredníctvom rozdielu množín. V jednom aj druhom prípade sa využíva práve jedna operácia. Vezmime si však nasledujúce príklady:

(13) Väčšina logikov je roztržitá.
(14) Menej ako polovica všetkých Slovákov nevie po maďarsky.
(15) Dve tretiny študentov neovládajú logiku.
(16) Približne dve tretiny študentov neovládajú logiku.

V týchto vetách sa vyjadruje pomer medzi množinou indivíduí patriacich do určitej množiny, ktoré majú určitú vlastnosť, a množinou indivíduí z tejto množiny, ktorí ju nemajú, resp. pomer medzi množinou indivíduí z určitej množiny, ktoré majú istú vlastnosť, a množinou všetkých prvkov v danej množine. Ide tu teda o tzv. *proporcionálne kvantifikátory*. Všeobecná definícia znie:

Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!] \rangle$ je model a δ je determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **proporcionálny** vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\varphi}^*$, $\boldsymbol{\psi}^* \subseteq \mathbf{U}$ platí, že ak $(\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi})/\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}^* \cap \boldsymbol{\psi}^*)/\boldsymbol{\varphi}^*$, tak $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi}^* \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}^*)$.

Množinu všetkých proporcionálnych kvantifikátorov budeme označovať ako **PROP**; ak teda platí, že $[\![\delta]\!]$ je proporcionálny kvantifikátor, tak $[\![\delta]\!] \in$ **PROP**. Táto definícia hovorí, že ak determinátor δ vo výrokoch „δ φ je ψ" a „δ φ* je ψ*" je proporcionálny, pričom pomer prieniku množín $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ k množine $\boldsymbol{\varphi}$ je ten istý ako pomer prieniku množín $\boldsymbol{\varphi}^*$ a $\boldsymbol{\psi}^*$ k množine $\boldsymbol{\varphi}^*$, tak pravdivostná hodnota oboch výrokov je tá istá.

Pre spomenuté proporcionálne kvantifikátory bude platiť:

$[\![$väčšina φ je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| > \frac{1}{2} \times |\boldsymbol{\varphi}|$;[5]
$[\![$menej ako polovica všetkých φ sú ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| < \frac{1}{2} \times |\boldsymbol{\varphi}|$;
$[\![$dve tretiny φ sú ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = \frac{2}{3} \times |\boldsymbol{\varphi}|$;
$[\![$približne dve tretiny φ sú ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = \frac{2}{3} \times |\boldsymbol{\varphi}| \pm k$,
kde k je konvenčne zvolené číslo vyjadrujúce maximálnu prípustnú odchýlku.

Proporcionálne kvantifikátory spravidla nie sú ani intersektívne, ani ko-intersektívne. Ako však upozorňuje Keenan ([2002], 635), dajú sa nájsť prípady kvantifikátorov, ktoré sú proporcionálne a zároveň intersektívne, resp. ko-intersektívne. Napríklad kvantifikátor vyjadrený determinátorom „nula per-

[5] Tieto pravdivostné podmienky sa opierajú o kvantifikátor, ktorý sme v [10] označili ako $[\![$väčšina$_1]\!]$. Okrem toho sme odlíšili ďalšie dva významy slova „väčšina" (ktoré sa však môžu za istých podmienok stotožniť), ktoré vedú k nasledujúcim výsledkom:
$[\![$väčšina$_2$ φ je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| > |\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}|$;
$[\![$väčšina$_3$ φ je ψ$]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| > k \times |\boldsymbol{\varphi}|$,
kde k je konvenčne zvolené číslo – zlomok – blížiace sa k 1.

cent“, ktorý je proporcionálny, je totožný s kvantifikátorom vyjadreným výrazom „žiadny“, ktorý je zase intersektívny; výraz „viac ako nula percent“ vyjadruje proporcionálny kvantifikátor, ktorý je však totožný s intersektívnym kvantifikátorom vyjadreným výrazom „niektorý“; napokon výraz „sto percent“ opäť vyjadruje proporcionálny kvantifikátor, no je totožný s ko-intersektívnym kvantifikátorom vyjadreným výrazom „každý“. Platí totiž:

$[\![\text{nula percent } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = 0\% \times |\boldsymbol{\varphi}|$, t. j. $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = 0$;

$[\![\text{viac ako nula percent } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| > 0\% \times |\boldsymbol{\varphi}|$,
t. j. $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| > 0$, t. j. $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| \neq 0$;

$[\![\text{sto percent } \varphi \text{ je } \psi]\!] = \mathbf{1}$ *vtt* $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = 100\% \times |\boldsymbol{\varphi}|$,
t. j. $|\boldsymbol{\varphi} \cap \boldsymbol{\psi}| = |\boldsymbol{\varphi}|$, t. j. $|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}| = 0$.

1.13 Sortálna redukovateľnosť

Ďalší významný výsledok, ktorý dokázal Keenan v [2], poukazuje na úzku previazanosť medzi intersektívnymi a ko-intersektívnymi kvantifikátormi na jednej strane a tzv. sortálne redukovateľnými kvantifikátormi na druhej strane. Najprv uveďme definíciu:

Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!] \rangle$ je model a δ determinátor. Kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **sortálne redukovateľný** vtedy a len vtedy, keď existuje taká boolovská funkcia g, že pre ľubovoľné $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \subseteq \mathbf{U}$ platí, že $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Leftrightarrow g(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \in [\![\delta]\!](\mathbf{U})$.

(Ďalej platí, že kvantifikátor je **inherentne sortálny** vtedy a len vtedy, keď nie je sortálne redukovateľný.) Množinu všetkých sortálne redukovateľných kvantifikátorov budeme označovať ako **RED**; ak teda platí, že $[\![\delta]\!]$ je sortálne redukovateľný kvantifikátor, tak $[\![\delta]\!] \in$ **RED**.

Sortálna redukovateľnosť znamená, že pre výrok, ktorý je o určitej podmnožine univerza, existuje ekvivalentný výrok, ktorý je o celom univerze; t. j. výraz kategórie N, ktorý spolu s príslušným výrazom kategórie DET vytvára výraz kategórie DP, je nahradený výrazom označujúcim celé univerzum. Prirodzene, výraz kategórie VP, s ktorým nový výraz kategórie DP tvorí výraz kategórie S, treba patrične upraviť. Opäť sa pozrime na zopár príkladov (vety v bode *a*. obsahujú determinátory vyjadrujúce sortálne redukovateľné kvantifikátory pred uskutočnením redukcie a v bode *b*. je redukcia už uskutočnená):

(17) *a*. Aspoň jeden filozof pestuje tulipány.
b. Aspoň jedno indivíduum je filozof, ktorý pestuje tulipány.

(18) *a*. Takmer žiadny filozof nie je horolezcom.
b. Takmer žiadne indivíduum nie je filozofom a zároveň horolezcom.

(19) *a*. Každý filozof pestuje tulipány.
b. Každé indivíduum pestuje tulipány alebo nie je filozofom.

(20) *a*. Takmer každý filozof má ploché nohy.
b. Takmer každé indivíduum má ploché nohy alebo nie je filozofom.

Vety (17*a*) – (20*a*) sú o filozofoch, no vety (17*b*) – (20*b*) sú o všetkých indivíduách. Napriek tomu vety z bodu *a*. sú ekvivalentné príslušným vetám z bodu *b*.

Ľahko možno zistiť, že proporcionálne kvantifikátory nie sú sortálne redukovateľné. Nasledujúce vety v bode *a*. totiž nie sú ekvivalentné príslušným vetám v bode *b*.:

(21) *a*. Väčšina filozofov pestuje tulipány.
b. Väčšina indivíduí sú filozofi a/alebo/… pestujú tulipány.
(22) *a*. Desať percent filozofov má ploché nohy.
b. Desať percent indivíduí sú filozofi a/alebo/… majú ploché nohy
(23) *a*. Menej ako polovica všetkých filozofov nie sú horolezci.
b. Menej ako polovica všetkých indivíduí sú filozofi a/alebo/… nie sú horolezci.

Tri bodky naznačujú, že prichádzajú do úvahy aj ďalšie boolovské operácie, resp. ich kombinácie.

Čitateľ si určite spomenie, že v predchádzajúcich testoch na identifikáciu intersektívnych, resp. ko-intersektívnych kvantifikátorov sme sa v podstate opierali o túto definičnú črtu sortálne redukovateľných kvantifikátorov. Keenan preto dokazuje, že konzervatívny kvantifikátor je sortálne redukovateľný vtedy a len vtedy, keď je buď intersektívny, alebo ko-intersektívny ([2], 318 – 319). Sortálne redukovateľné sú teda existenčné a všeobecné kvantifikátory, no nie proporcionálne kvantifikátory.

1.14 Monotónnosť

Štandardné kvantifikované výroky obsahujúce determinátory, ktoré vyjadrujú kvantifikátory typu ⟨⟨1⟩, 1⟩, spravidla zahŕňajú dva výrazy kategórie N a tie označujú nejaké množiny (indivíduí). Môžeme si teraz položiť otázku: Ak takýto kvantifikovaný výrok zmeníme tak, že aspoň jeden výraz kategórie N nahradíme iným výrazom tej istej kategórie, ktorý bude označovať buď podmnožinu, alebo nadmnožinu tej množiny, ktorú označoval pôvodný výraz kategórie N, aký to bude mať vplyv na pravdivostnú hodnotu výslednej vety? Prirodzene, odpoveď bude závisieť od toho, (*i*) aký výraz kategórie DET príslušná veta obsahuje; (*ii*) ktorý výraz kategórie N nahrádzame (či ten, ktorý je súčasťou DP, alebo ten, ktorý je súčasťou VP); (*iii*) či výraz kategórie N nahrádzame výrazom označujúcim nadmnožinu, alebo výrazom označujúcim podmnožinu pôvodnej množiny.

V závislosti od toho, ktoré nahradenia zachovávajú pravdivostnú hodnotu, môžeme povedať, že kvantifikátory označené príslušnými determinátormi sa vyznačujú určitou vlastnosťou, ktorá sa nazýva *monotónnosť*. Vyskytuje sa v štyroch podobách zachytených v nasledujúcej definícii:[6]

[6] Barwise a Cooper v [1] používajú čiastočne odlišnú terminológiu.

Nech $\mathcal{M} = \langle \mathbf{U}, [\![\ ]\!] \rangle$ je model a δ determinátor. Pre ľubovoľné $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}^*, \boldsymbol{\psi}^* \subseteq \mathbf{U}$, pričom $\boldsymbol{\varphi} \subseteq \boldsymbol{\varphi}^*$ a $\boldsymbol{\psi} \subseteq \boldsymbol{\psi}^*$, platí:

a) kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **monotónny sprava rastúci** vtedy a len vtedy, keď $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Rightarrow \boldsymbol{\psi}^* \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi})$;

b) kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **monotónny sprava klesajúci** vtedy a len vtedy, keď $\boldsymbol{\psi}^* \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Rightarrow \boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi})$;

c) kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **monotónny zľava rastúci** vtedy a len vtedy, keď $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}) \Rightarrow \boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}^*)$;

d) kvantifikátor $[\![\delta]\!]$ je **monotónny zľava klesajúci** vtedy a len vtedy, keď $\boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi}^*) \Rightarrow \boldsymbol{\psi} \in [\![\delta]\!](\boldsymbol{\varphi})$.

Množinu všetkých monotónnych sprava rastúcich kvantifikátorov budeme označovať ako MON↑; množinu všetkých monotónnych sprava klesajúcich kvantifikátorov označíme ako MON↓; množinu všetkých monotónnych zľava rastúcich kvantifikátorov označíme ako ↑MON; a napokon množinu všetkých monotónnych zľava klesajúcich kvantifikátorov označíme ako ↓MON.

Uvedená definícia nám poskytuje jednoduchý test, ako zistiť, ktorú z monotónnych vlastností daný kvantifikátor má (ak vôbec nejakú z nich má). Jednotlivé body definície totiž predstavujú akési úsudky, ktoré majú nasledujúcu podobu:

a) δ φ je ψ.
Každé ψ je ψ*.
―――――――――
δ φ je ψ*.

b) δ φ je ψ.
Každé ψ* je ψ.
―――――――――
δ φ je ψ*.

c) δ φ je ψ.
Každé φ je φ*.
―――――――――
δ φ* je ψ.

d) δ φ je ψ.
Každé φ* je φ.
―――――――――
δ φ* je ψ.

Vezmime si ako príklad kvantifikátor vyjadrený determinátorom „niektorý“. Posúďme teraz platnosť nasledujúcich úsudkov:

(24) *a.* Niektorí poslanci sú štátnici.
Všetci štátnici sú politici.
―――――――――
Niektorí poslanci sú politici.

b. Niektorí poslanci sú štátnici.
Všetci prezidenti sú štátnici.
―――――――――
Niektorí poslanci sú prezidenti.

c. Niektorí poslanci sú štátnici.
Všetci poslanci sú politici.
―――――――――
Niektorí politici sú štátnici.

d. Niektorí poslanci sú štátnici.
Všetci politici sú poslanci.
―――――――――
Niektorí politici sú štátnici.

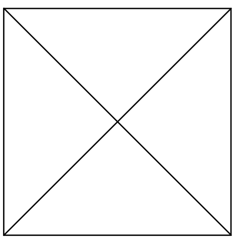
Keď sa teraz pozrieme na platnosť týchto úsudkov, zistíme, že (24*a*) je platný úsudok (jeho záver vyplýva z premís); (24*b*) nie je platný úsudok, lebo ak niektorí poslanci sú štátnici a všetci prezidenti sú štátnici, ešte to neznamená, že niektorí poslanci sú prezidenti – obe premisy môžu byť pravdivé aj v prípade, že množina poslancov a množina prezidentov sú disjunktné, a v takom prípade je záver úsudku nepravdivý; úsudok (24*c*) je zase platný. Ľahko sa o tom možno presvedčiť na základe toho, že ak sú premisy pravdivé, záver musí byť pravdivý prinajmenšom o tých politikoch, ktorí sú poslancami, takže naozaj niektorí politici sú štátnici. A napokon úsudok (24*d*) bude neplatný, lebo množina politikov je len podmnožinou množiny poslancov (podľa druhej premisy), čo je pravda aj vtedy, keď medzi poslancami nájdeme aj (všetkých) politikov, aj (aspoň niektorých) nepolitikov. Medzi politikmi sa teda nemusia nachádzať štátnici, pretože sa môže stať, že tí niektorí poslanci, ktorí sú štátnici, nie sú politici.

Na základe tohto príkladu vidíme, že kvantifikátor ⟦niektorý⟧ patrí do množín **MON**↑ a ↑**MON**, takže patrí do ich prieniku, ktorý môžeme skrátene označiť ako ↑**MON**↑. Kvantifikátor ⟦niektorý⟧ je teda *dvojnásobne monotónny*. V zásade máme štyri možné kombinácie vlastností monotónnosti: ↑**MON**↑, ↓**MON**↓, ↑**MON**↓ a ↓**MON**↑. Johan van Benthem ukázal (pozri [6]), že tieto štyri druhy dvojnásobnej monotónnosti exemplifikujú kvantifikátory zmienené v logickom štvorci. Ľahko sa o tom môžeme presvedčiť, ak sa pozrieme na vety z logického štvorca:

(25) Každé φ je ψ.
(26) Niektoré φ je ψ.
(27) Žiadne φ nie je ψ.
(28) Nie každé φ je ψ.[7]

Už sme videli, že ⟦niektorý⟧ patrí do ↑**MON**↑. Analogickou úvahou zistíme, že ⟦každý⟧ patrí do ↓**MON**↑, ⟦žiadny⟧ patrí do ↓**MON**↓ a ⟦nie každý⟧ patrí do ↑**MON**↓. (Príslušné testy nechávam na čitateľovi.) Keď si to znázorníme v logickom štvorci, uvidíme pozoruhodnú symetriu:

↓**MON**↑ ⟦každý⟧ ⟦žiadny⟧ ↓**MON**↓



↑**MON**↓ ⟦nie každý⟧ ⟦niektorý⟧ ↑**MON**↑

[7] Namiesto vety „Nie každé φ je ψ" sa zvyčajne používa veta „Niektoré φ nie je ψ". Z hľadiska pravdivostných podmienok však medzi týmito vetami nie je rozdiel, takže na účely tejto úvahy budeme používať prvú z nich, aby sme nedostali dvakrát výraz „niektorý".

Vidíme, že dvojice výrokov, ktoré sú vo vzťahu subalternácie, t. j. (25) – (26) a (27) – (28), obsahujú determinátory označujúce také kvantifikátory, ktoré majú presne opačné vlastnosti monotónnosti. Kontradiktorické výroky zase vyjadrujú kvantifikátory, ktoré majú totožné vlastnosti pravej monotónnosti, a kontrárne, resp. subkontrárne výroky vyjadrujú kvantifikátory, ktoré majú totožné vlastnosti ľavej monotónnosti. Samozrejme, existujú aj ďalšie kvantifikátory, ktoré sú dvojnásobne monotónne; napríklad ⟦najmenej sedem⟧; ⟦najmenej dva⟧; ⟦nekonečne veľa⟧; ⟦najviac traja⟧; ⟦najviac konečne veľa⟧; atď.

* * *

Skúmanie kvantifikácie v prirodzenom jazyku sa pohybuje na rozhraní niekoľkých disciplín: logiky, lingvistiky, ale aj matematiky. V rámci tohto úvodu sme si všimli len zopár najzákladnejších poznatkov, ku ktorým sa dospelo počas štvrťstoročia výskumov v tejto oblasti. Záujemcovia o hlbšie preniknutie do tejto problematiky môžu siahnuť po troch výborných obsiahlejších štúdiách [4], [5] a [8].

(*pokračovanie*)

Filozofický ústav SAV
Klemensova 19
813 64 Bratislava
filomazo@savba.sk

LITERATÚRA

[1] BARWISE, J. – COOPER, R. (1981): Generalized Quantifiers and Natural Language. *Linguistics and Philosophy* 4, 159 – 219.

[2] KEENAN, E. (1993): Natural Language, Sortal Reducibility and Generalized Quantifiers. *The Journal of Symbolic Logic* 58, 314 – 325.

[3] KEENAN, E. (2002): Some Properties of Natural Language Quantifiers: Generalized Quantifier Theory. *Linguistics and Philosophy* 25, 627 – 654.

[4] KEENAN, E. – WESTERSTÅHL, D. (1997): Generalized Quantifiers in Linguistics and Logic. In: van Benthem, J. – ter Meulen, A. (eds.) (1997): *Handbook of Logic and Language*. MIT Press, Cambridge (Mass.), 837 – 893.

[5] PETERS, S. – WESTERSTÅHL, D. (2002): *Quantifiers* (draft). http://www.stanford.edu/group/nasslli/courses/peters-wes/PWbookdraft2-3.pdf

[6] VAN BENTHEM, J. (1984): Questions about Quantifiers. *The Journal of Symbolic Logic* 49, č. 2, 443 – 466.

[7] WESTERSTÅHL, D. (1985): Logical Constants in Quantifier Languages. *Linguistics and Philosophy* 8, 387 – 413.

[8] WESTERSTÅHL, D. (1989): Quantifiers in Formal and Natural Languages. In: Gabbay, D. – Guenthner, F. (eds.) (1989): *Handbook of Philosophical Logic, Vol. 4, Topics in the Philosophy of Language*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1 – 131.

[9] ZOUHAR, M. (2006): Kvantifikácia v prirodzenom jazyku (II). *Organon F* 13, č. 2, 232 – 251.

[10] ZOUHAR, M. (2006): Kvantifikácia v prirodzenom jazyku (III). *Organon F* 13, č. 3, 379 – 394.