Teória kvantifikácie a binárne predikáty

Miloš Kosterec

Univerzita Komenského v Bratislave

Abstract: The paper deals with a problem in formal theory of quantification. Firstly, by way of examples, I introduce important parts of the theory. Using type analysis, I present a problem which stems from inadequacy of a rule concerning semantic interpretation of sentences involving n-ary predicates and quantifiers. I propose four distinct principles for specific types of sentences. They are generalized into a general semantic rule, which is, finally, applied to particular examples.

Keywords: model, quantifier, relation, semantic content, truth value.

1 Úvod

V roku 2009 vyšla monografia s názvom *Teória kvantifikácie a extenzionálna sémantika prirodzeného jazyka*, v ktorej Marián Zouhar zhrnul a doplnil sériu článkov, ktoré vychádzali v časopise *Organon F*.[1] Kvantifikačné výrazy[2] z prirodzeného jazyka, napríklad *niektorý, každý, aspoň dvaja* atď., sa v jazyku spájajú s výrazmi pre predikáty, pričom vznikajú spojenia ako *niektorý študent, každý predavač, aspoň dvaja socialisti*. Zouhar predstavuje[3] extenzionálnu sémantiku založenú na jazyku teórie

---

1 Cyklus sa začína článkom Zouhar (2006).

2 „[B]udeme rozlišovať kvantifikátory od kvantifikačných výrazov a budeme predpokladať, že kvantifikátory sú objekty, na ktoré sa vzťahujú kvantifikačné výrazy, t. j. kvantifikátory budú sémantickým obsahom kvantifikačných výrazov“ (Zouhar 2009, 37).

3 Zouhar v (2009, 7) hovorí: „Teória, ktorú predstavím, je výlučne *extenzionálna*. Od konca sedemdesiatych rokov 20. storočia ju rozvíjali logici a lingvisti, ako sú Jon Barwise, Johan van Benthem, Robin Cooper, Edward Keenan, Stanley Peters či Dag Westerståhl a mnohí ďalší“. Práce spomenutých auto-

množín, pričom si je vedomý jej obmedzení (pozri Zouhar 2009, 58). Predikáty interpretuje ako množiny. Po analýze niekoľkých príkladov interpretuje kvantifikátory ako funkcie z množiny do množiny množín. Výsledkom aplikácie kvantifikátora na nejaký predikát je množina množín. Napríklad ak spojíme kvantifikačný výraz *niektorý* s výrazom *študent*, interpretácia výsledného celku *niektorý študent* bude množina množín, ktoré obsahujú aspoň jedného študenta.

Platí to minimálne pre unárne predikáty. Spojivo pri výstavbe formálnej teórie predstavuje princíp kompozicionality.[4] Význam zložitejších výrazov získame pomocou významov jednoduchších výrazov a spôsobu ich zloženia. Napríklad spojením kvantifikačných výrazov *každý predavač, aspoň dvaja socialisti* s výrazmi pre unárny predikát získame výrok.

(1) Každý predavač fajčí.
(2) Aspoň dvaja socialisti sú inteligentní.

V týchto výrokoch sa najprv kvantifikátory vyjadrené výrazmi *každý, aspoň dvaja* aplikujú na množiny označené výrazom *predavač*, resp. *socialista*. Týmto zloženiam zodpovedajú množiny množín. Napríklad kvantifikačnému výrazu *každý predavač* zodpovedá množina množín, ktoré obsahujú množinu zodpovedajúcu výrazu *predavač* ako podmnožinu. Výsledná pravdivostná hodnota viet (1) a (2) závisí od toho, či množiny zodpovedajúce výrazom *fajčí* a *inteligentný* patria do príslušných množín. Ak množina zodpovedajúca výrazu pre unárny predikát patrí do množiny množín prináležiacej kvantifikačnému výrazu, výrok je pravdivý.

Ak uznávame princíp kompozicionality, môžeme ako kontrolu našej analýzy použiť typovú analýzu. V analyzovanom výraze priradíme jednotlivým sémantickým obsahom tzv. typy. Pomocou týchto typov môžeme skúmať, či analýza priraďuje výrazom adekvátne sémantické obsahy. Napríklad typová analýza vety (1) je nasledujúca:

- Typy sémantických obsahov jednoduchých výrazov:

---

rov pozri napríklad v Barwise – Cooper (1981), Keenan (2002), van Benthem (1984), Westerståhl (1989).

[4] Zouharovu formuláciu pozri v Zouhar (2009, 57).

⟦predavač⟧:[5] i ⟶ o[6]
⟦fajčí⟧: i ⟶ o
⟦každý⟧: (i ⟶ o) ⟶ ((i ⟶ o) ⟶ o)

- Typy sémantických obsahov, ktoré vznikli zložením (kompozíciou) jednoduchých sémantických obsahov:
  ⟦každý predavač⟧: (i ⟶ o) ⟶ o
  ⟦každý predavač fajčí⟧: o

Typová analýza vety (1) ukazuje, že typy sémantických obsahov priradených jednotlivým výrazom umožňujú priradiť sémantickému obsahu vety (1) typ pravdivostnej hodnoty. Ak pracujeme v rámci extenzionálnej teórie, je to želaný výsledok. V nasledujúcom texte používam typovú analýzu na kontrolu sémantickej analýzy jazykových výrazov. Ak sa kompozíciou typov jednoduchých sémantických obsahov nedá zložiť (skomponovať) adekvátny typ zloženého výrazu, je to vážny signál o nedostatočnosti sémantickej analýzy.

Kvantifikátory prislúchajúce výrazom ako *každý predavač, aspoň dvaja socialisti* sú typu ⟨1⟩, pretože ich treba skombinovať s jedným unárnym predikátom, aby vznikol výrok.[7] Kvantifikátory označené výrazmi ako *každý, niektorý* sú typu ⟨⟨1⟩,1⟩. Treba ich postupne skombinovať s dvomi unárnymi predikátmi, aby vznikol výrok. Kvantifikátor zodpovedajúci výrazu *niektorý* priradí množine, nazvime ju M, (unárnemu predikátu) množinu takých množín, ktoré majú s množinou M neprázdny prienik. Kvantifikátor označený výrazom *každý* priradí množine M (unárnemu predikátu) množinu takých množín, ktoré obsahujú množinu M ako svoju podmnožinu. Tieto množiny množín sú príkladmi kvantifikátorov typu ⟨1⟩. Pravdivostná hodnota označená spojením kvantifikátora typu ⟨1⟩ a unárneho predikátu je daná tým, či množina zodpovedajúca predikátu patrí do množiny množín zodpovedajúcej kvantifikátoru typu ⟨1⟩. Formálne:

A) $[\![R^1(\delta_j P^1)]\!] = ([\![\delta_j]\!]([\![P^1]\!]))([\![R^1]\!])$

---

5 Zápis ⟦Q⟧ predstavuje hodnotu interpretačnej funkcie pre výraz Q. Napríklad výrazu *predavač* priradí interpretačná funkcia ⟦predavač⟧ množinu indivíduí, ktoré sú predavačmi.

6 V tomto článku budem využívať iba dva základné typy: typ indivíduí, i, a typ pravdivostnej hodnoty, o.

7 Výraz, ktorého sémantickým obsahom je v Zouharovej formálnej teórii pravdivostná hodnota.

> Tvrdí sa tu, že interpretačná funkcia ⟦ ⟧ priraďuje výrazu $R^1(\delta_j P^1)$ ako jeho sémantický obsah taký objekt, ktorý dostaneme, keď (i) na sémantický obsah výrazu P^1 aplikujeme sémantický obsah výrazu δ_j a (ii) objekt, ktorý takto dostaneme, potom aplikujeme na sémantický obsah výrazu R^1. (Zouhar 2009, 61)[8]

Typová analýza v prípade A je rovnaká ako pri vete (1). Stačí si len uvedomiť, že výrazu *každý* zodpovedá výraz δ_j, výrazu *predavač* zodpovedá výraz P^1 a výrazu *fajčí* zodpovedá výraz R^1.

2 Problém

Podľa textu by sme mali obdobne postupovať aj pri predikátoch s vyššou árnosťou (Zouhar 2009, 61):

B) $[\![R^N(\delta_1 P^1_1,\ldots, \delta_i P^1_j)]\!] = (([\![\delta_1]\!]([\![P^1_1]\!])),\ldots, ([\![\delta_i]\!]([\![P^1_j]\!])))([\![R^N]\!])$

Typová analýza však odhalí, že to nie je také jednoduché ako v prípade A:

$[\![\delta_{k(k=1,\ldots,i)}]\!]: (i \longrightarrow o) \longrightarrow ((i \longrightarrow o) \longrightarrow o)$
$[\![P^1_1]\!]: (i \longrightarrow o)$
$[\![R^n]\!]: \langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle \longrightarrow o$
$[\![\delta_1]\!]([\![P^1_1]\!]): (i \longrightarrow o) \longrightarrow o$
$(([\![\delta_1]\!]([\![P^1_1]\!])),\ldots, ([\![\delta_i]\!]([\![P^1_j]\!]))): \langle(i \longrightarrow o) \longrightarrow o, \ldots, (i \longrightarrow o) \longrightarrow o\rangle$
$(([\![\delta_1]\!]([\![P^1_1]\!])),\ldots, ([\![\delta_i]\!]([\![P^1_j]\!])))([\![R^n]\!])$: ???

Ak priradíme typy jednotlivým jednoduchým sémantickým obsahom rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch, narazíme na problém. Podľa predpisu B nevieme sémantickému obsahu analyzovaného výrazu $R^n(\delta_1 P^1_1,\ldots, \delta_i P^1_j)$ priradiť typ.

Na sémantický obsah výrazu R^n by sme mali aplikovať postupnosť sémantických obsahov výrazov $\delta_k P^1_l$, kde indexy k a l nadobúdajú hodnoty od 1 po i, resp. j. Dané pravidlo je však pomerne neurčité. Sémantický obsah výrazu R^n je n-árna relácia. Ako však máme rozumieť zápisu:

C) $(([\![\delta_1]\!]([\![P^1_1]\!])), \ldots, ([\![\delta_i]\!]([\![P^1_j]\!])))$

[8] R, P – unárne predikáty, δ_j – kvantifikátor typu ⟨⟨1⟩,1⟩

ktorý predstavuje prvý krok pri interpretácii celého výrazu? Ak sú prázdne miesta[9] pri výraze pre binárny predikát zaplnené indivíduovými výrazmi, formálne:

D) $R^2(a_1,a_2)$

tak

> Keďže sémantickým obsahom R^2 je binárna relácia (množina usporiadaných dvojíc) a sémantickými obsahmi a_1, a_2 sú indivíduá (*pričom záleží na ich poradí, ktoré zodpovedá poradiu výrazov vo formule*), tak sa tu tvrdí, že usporiadaná dvojica, v ktorej prvým členom je indivíduum označené prvým výrazom a druhým členom je indivíduum označené druhým výrazom, je prvkom príslušnej relácie. (Zouhar 2009, 60; kurzíva M. K.)

Výraz *(p, q, r, …, s)* zrejme zastupuje usporiadanú n-ticu. Sémantickým obsahom výrazu (a_1,a_2) je usporiadaná dvojica sémantických obsahov indivíduových výrazov a_1 a a_2. Ak aj výraz $(\delta_1 P^1{}_1, \ldots, \delta_i P^1{}_j)$ zastupuje usporiadanú n-ticu, tak jej sémantickému obsahu by rovnako mala zodpovedať usporiadaná n-tica sémantických obsahov jednotlivých výrazov. Ako však takúto usporiadanú n-ticu aplikovať na n-árnu reláciu?

Pozrime sa na jednoduchší prípad binárneho predikátu. Formálne:

$$[\![R^2(\delta_1 P^1{}_1, \delta_2 P^1{}_2)]\!] = (([\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!])), ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!])))([\![R^2]\!])$$

Typová analýza:

$[\![\delta_1]\!], [\![\delta_2]\!]: (i \longrightarrow o) \longrightarrow ((i \longrightarrow o) \longrightarrow o)$
$[\![P^1{}_1]\!], [\![P^1{}_2]\!]: (i \longrightarrow o)$
$[\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]), [\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]): (i \longrightarrow o) \longrightarrow o$
$([\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]), [\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!])): \langle (i \longrightarrow o) \longrightarrow o\ , (i \longrightarrow o) \longrightarrow o \rangle$
$[\![R^2]\!]: \langle i, i \rangle \longrightarrow o$

V posledných dvoch riadkoch typovej analýzy sa opäť ukazuje problém. Typ objektu, ktorý zodpovedá usporiadanej dvojici kvantifikátorov typu ⟨1⟩, nemôžem aplikovať na typ zodpovedajúci binárnej relácii. Pravidlo B v tomto ohľade nie je dostatočné. Ďalej v článku budem pracovať s hypotézou, že pravidlo B je iba skratkou za nejaké iné pra-

[9] Prázdne miesta pri predikátoch opisuje Zouhar napríklad v práci (2008, 175).

vidlo. Pravidlo B nám v existujúcej podobe iba ukazuje, že záleží na poradí aplikácie kvantifikátorov. Neukazuje však zreteľne, ako a na čo ich máme aplikovať.

Pozrime sa na konkrétny príklad:

(3) Každý farmár vlastní niektorého osla.

V tejto vete sú voľné miesta pri výraze *vlastní* saturované kvantifikačnými výrazmi *každý farmár* a *niektorý osol*, teda výrazmi pre kvantifikátory typu ⟨1⟩, ktorým prináležia množiny množín. V relácii ⟦vlastniť⟧ by podľa vety (3) pre každý prvok jej definičného oboru z množiny prináležiacej výrazu *farmár* mal byť aspoň jeden prvok z množiny prináležiacej výrazu *osol*. Na určenie pravdivostnej hodnoty vety (3) nestačí skúmať, či definičný obor a obor hodnôt relácie ⟦vlastniť⟧ patria do množín pre kvantifikačné výrazy. Stanovenie definičného oboru a oboru hodnôt totiž ešte žiadnym spôsobom nepredpisuje, ako majú byť kombinované prvky z týchto množín v relácii. Hoci pre prípady kombinácie unárnych predikátov s kvantifikátormi typu ⟨1⟩ – ako vo vetách (1), (2) – bola príslušnosť množiny, ktorá je predikátom, do množiny, ktorá je kvantifikátorom, dostatočným kritériom na určenie pravdivosti, nebude to stačiť pre vety typu (3). Pravidlá A a B, ktoré určujú postup pri priradení sémantického obsahu pre jednotlivé typy viet, sú teda napriek značnej formálnej podobnosti rozdielne. Otázkou teda je, ako máme rozumieť sémantickému pravidlu B, podľa ktorého máme pripisovať sémantický obsah (v prípade extenzionálnej teórie sú ním pravdivostné hodnoty) vetám ako (3). Formálna teória potrebuje v tomto smere dopracovanie.

3 Návrh

Nájdenie adekvátneho sémantického pravidla na priraďovanie pravdivostných hodnôt vetám typu (3) predpokladá, že vieme formulovať podmienky, za ktorých by sme podobné vety považovali za pravdivé. Pre vetu (3) som danú formuláciu poskytol. Preskúmajme ešte pravdivostné podmienky nasledujúcich viet, ktoré sa podobajú vete (3):

(4) Každý farmár vlastní každého osla.
(5) Niektorý farmár vlastní niektorého osla.
(6) Niektorý farmár vlastní každého osla.

V akých situáciách by som považoval tieto vety za pravdivé? Veta (4) je pravdivá, ak každý jeden farmár vlastní všetky osly. Veta (5) je pravdivá, ak existuje aspoň jeden farmár, ktorý vlastní aspoň jedného osla. Veta (6) je pravdivá, ak existuje aspoň jeden farmár, ktorý vlastní všetky osly. Ako som spomenul, veta (3) je pravdivá, ak každý jeden farmár vlastní aspoň jedného osla.

Môžeme vidieť, že poradie kvantifikačných výrazov vo vetách niekedy zásadne ovplyvňuje ich pravdivostné podmienky. V tomto zmysle musíme zrejme rozumieť aj pravidlu B. Všimnime si bližšie pravdivostné podmienky viet (3) a (4), v ktorých je prvé miesto pri výraze *vlastní* saturované kvantifikačným výrazom *každý farmár*. Pravdivosť oboch sa zakladá na splnení určitej podmienky pre všetky prvky z definičného oboru relácie ⟦vlastniť⟧, ktoré sú zároveň farmármi. Podobne si môžeme všimnúť určitú podobnosť v pravdivostných podmienkach viet (5) a (6). Pravdivosť oboch sa zakladá na splnení určitej podmienky pre aspoň jeden prvok z definičného oboru relácie ⟦vlastniť⟧, ktorý by bol zároveň farmárom. Takto sa saturácia prvého miesta pri výraze pre binárny predikát určitým kvantifikačným výrazom prejavuje v pravdivostných podmienkach celej vety, prinajmenšom pre kvantifikačné výrazy typu *každý A, niektorý A*.

Preskúmajme teraz vety (3), (4), (5) a (6) z druhej strany. Pozrime sa najprv na vety (3) a (5). Druhé miesto pri výraze *vlastní* saturoval kvantifikačný výraz *niektorý osol*. Podmienka, ktorú musel splniť určitý počet[10] a typ prvkov z definičného oboru relácie ⟦vlastniť⟧, je vo vetách (3) a (5) rovnaká. Požadovaný počet a typ prvkov z definičného oboru musí byť v relácii aspoň s jedným oslom. Vo vetách (4) a (6) sa druhé voľné miesto pri výraze *vlastní* saturovalo kvantifikačným výrazom *každý osol*. Podmienka, ktorú musel splniť určitý počet a typ prvkov z definičného oboru relácie ⟦vlastniť⟧, je opäť rovnaká. Požadovaný počet a typ prvkov z definičného oboru relácie ⟦vlastniť⟧ musí byť v tejto relácii so všetkými oslami. Takto sa saturácia druhého miesta pri výraze pre binárny predikát určitým kvantifikačným výrazom prejavuje v pravdivostných podmienkach celej vety, prinajmenšom pre kvantifikačné výrazy typu *každý A, niektorý A*.

Pre kvantifikačné výrazy typu *každý A*, *niektorý A* som formuloval, ako ich použitie vplýva na pravdivostné podmienky viet (3), (4), (5),

---

[10] Tento počet závisí od typu použitého kvantifikačného výrazu.

(6). Vďaka tomu teraz môžem pristúpiť k formulácii sémantického pravidla, ktoré považujem za dopracovanie pravidla B formálnej teórie.

> Nech R^2 je binárny predikát; A, B sú množiny, ktoré sú sémantickým obsahom unárnych predikátov; C je definičný obor relácie R^2; $X \urcorner R^2$ je zúženie relácie R^2 zľava na množinu X; D je obor hodnôt relácie $\{x\} \urcorner R^2$. Potom:

E) $[\![R^2(\textit{každý A, každý B})]\!] = [\![C]\!] \in [\![\textit{každý}\ A]\!] \wedge \forall x[(x \in C \cap A) \longrightarrow (D \in [\![\textit{každý B}]\!])]$

Veta tohto typu je pravdivá vtedy a len vtedy, keď definičný obor relácie R^2 patrí do množiny, na ktorú sa vzťahuje kvantifikačný výraz *každý A* a zároveň každý prvok definičného oboru R^2, ktorý je zároveň prvkom množiny A, je vo vzťahu so všetkými prvkami určitej množiny, ktorá patrí do kvantifikátora pre výraz *každý B*. Veta (4) je podľa tohto pravidla pravdivá vtedy a len vtedy, keď každý jeden farmár ($x \in C \cap A$) vlastní všetky osly ($D \in [\![\textit{každý B}]\!]$).

F) $[\![R^2(\textit{každý A, niektorý B})]\!] = [\![C]\!] \in [\![\textit{každý}\ A]\!] \wedge \forall x[(x \in C \cap A) \longrightarrow (D \in [\![\textit{niektorý B}]\!])]$

Veta tohto typu je pravdivá vtedy a len vtedy, keď definičný obor relácie R^2 patrí do množiny, ktorá je kvantifikátorom označeným výrazom *každý A* a zároveň každý prvok definičného oboru R^2, ktorý je zároveň prvkom množiny A, je v relácii R^2 s aspoň jedným prvkom množiny B. Veta (3) je podľa tohto pravidla pravdivá vtedy a len vtedy, keď každý jeden farmár vlastní aspoň jedného osla.

G) $[\![R^2(\textit{niektorý A, niektorý B})]\!] = [\![C]\!] \in [\![\textit{niektorý}\ A]\!] \wedge \exists x[(x \in C \cap A) \longrightarrow (D \in [\![\textit{niektorý B}]\!])]$

Veta tohto typu je pravdivá vtedy a len vtedy, keď definičný obor relácie R^2 patrí do množiny, ktorá je kvantifikátorom označeným výrazom *niektorý A* a existuje aspoň jeden prvok definičného oboru relácie R^2, ktorý je prvkom množiny A a zároveň je v relácii R^2 s aspoň jedným prvkom množiny B. Veta (5) je podľa tohto pravidla pravdivá vtedy a len vtedy, keď aspoň jeden farmár vlastní aspoň jedného osla.

H) $[\![R^2(\textit{niektorý A, každý B})]\!] = [\![C]\!] \in [\![\textit{niektorý}\ A]\!] \wedge \exists x[(x \in C \cap A) \longrightarrow (D \in [\![\textit{každý B}]\!])]$

Veta tohto typu je pravdivá vtedy a len vtedy, keď definičný obor relácie R^2 patrí do množiny, ktorá je kvantifikátorom označeným výrazom *niektorý A* a existuje aspoň jeden prvok z definičného oboru relácie R^2, ktorý je prvkom množiny A a zároveň je vo vzťahu so všetkými prvkami nejakej množiny, ktorá patrí do kvantifikátora pre výraz *každý B*. Veta (6) je podľa tohto pravidla pravdivá vtedy a len vtedy, keď aspoň jeden farmár vlastní všetky osly.

Spomenuté štyri prípady by mali byť konkrétnymi prípadmi použitia všeobecného sémantického pravidla. Pravidlo B v pôvodnej podobe nie je dostatočne zrozumiteľné. Keď si všimneme prípady E, F, G, H, môžeme vidieť, že majú niečo spoločné. Prvý použitý kvantifikačný výraz ovplyvňuje počet prvkov z definičného oboru relácie R^2, ktoré sú zároveň prvkami množiny A. Pri kvantifikačnom výraze *každý A* musela byť nejaká podmienka splnená pre všetky prvky z prieniku množín C a A. Pri kvantifikačnom výraze *niektorý A* musel nejakú podmienku splniť aspoň jeden prvok z toho prieniku. Druhý použitý kvantifikačný výraz určuje podmienku, ktorú muselo splniť požadovaný počet a typ prvkov. Pri kvantifikačnom výraze *každý B* musel určitý počet prvkov z definičného oboru relácie R^2 byť v tejto relácii so všetkými prvkami nejakej množiny, ktorá bola v kvantifikátore označenom výrazom *každý B*. Pri kvantifikačnom výraze *niektorý B* musel určitý počet prvkov z definičného oboru relácie R^2 byť v tejto relácii so všetkými prvkami nejakej množiny, ktorá bola v kvantifikátore označenom výrazom *nejaký B*. Splnenie týchto podmienok stačí na pripísanie pravdivostnej hodnoty vetám (3), (4), (5) a (6).

Na základe analýzy prípadov E, F, G a H môžem teraz formulovať všeobecný princíp na priradenie sémantického obsahu vetám, ktoré vzniknú saturáciou prázdnych miest pri výraze pre binárny predikát pomocou usporiadanej dvojice kvantifikačných výrazov:

> Nech $\delta_1 P^1{}_1$, $\delta_2 P^1{}_2$ sú kvantifikačné výrazy pre kvantifikátory typu $\langle 1 \rangle$; R^2 je binárny predikát; C je definičný obor relácie vyjadrenej predikátom R^2; Q je premenná za kvantifikátor; $X \urcorner R^2$ je zúženie relácie R^2 zľava na množinu $\{x\}$; D je obor hodnôt relácie $\{x\} \urcorner R^2$. Potom:

B*) $$[\![R^2(\delta_1 P^1{}_1, \delta_2 P^1{}_2)]\!] = ([\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]))(C \cap P^1{}_1)) \wedge Q[(x \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)]$$

Slovom: Sémantický obsah vety, ktorá vznikne saturovaním prázdnych miest pri výraze pre binárny predikát výrazmi pre kvantifikátory typu

⟨1⟩, je daný sémantickým obsahom konjunkcie, ktorá je pravdivá vtedy a len vtedy, keď je zároveň pravdivé, že:

a) $([\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]))(C \cap P^1{}_1)$
(Výsledkom aplikácie kvantifikátora typu ⟨1⟩, ktorý vznikne kompozíciou $([\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]))$ na množinu $C \cap P^1{}_1$, je pravdivostná hodnota Pravda.)

a

b) $Q[(x \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)]$
pre určitý počet prvkov (Q zastupuje kvantifikátory vo všeobecnosti) z prieniku $C \cap P^1{}_1$ platí, že sú v relácii R^2 s prvkami, ktoré tvoria množinu patriacu do kvantifikátora $([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))$.

Vzhľadom na nedostatočnosť pravidla B potrebujeme pravidlo, na ktorého základe môžeme priradiť sémantický obsah vetám ako (3). Pravidlo B* môžeme vnímať ako návod. Opisuje, ako máme postupne použiť jednotlivé prvky vety na to, aby sme získali celkový sémantický obsah. Pravidlo vlastne tvrdí, že vety $R^2(\delta_1 P^1{}_1, \delta_2 P^1{}_2)$ sú konjunkciami. Interpretácia konjunkcie v extenzionálnej teórii závisí od interpretácie konjunktov. Ak budú oba pravdivé, celá veta je pravdivá. Dalo by sa povedať: Najprv interpretuj $[\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]))(C \cap P^1{}_1)$, potom priraď pravdivostnú hodnotu $Q[(x \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)]$; na základe toho potom priraď pravdivostnú hodnotu celku. Pravidlo B však pôvodne slúžilo ako návod na kompozičnú determináciu sémantického obsahu určitého typu viet. Ponúkané pravidlo B* síce rieši problém priradenia sémantického obsahu danému typu viet, avšak pre kompozičnú determináciu postuluje nezjavné prvky vo vetách ako napríklad spomínanú konjunkciu. Toto riešenie preto nepovažujem za jediné a ani netvrdím, že je optimálne.

Navrhovaná formulácia pravidla B* na rozdiel od pôvodnej formulácie prejde aj typovou kontrolou:

$[\![\delta_1]\!], [\![\delta_2]\!]: (i \longrightarrow o) \longrightarrow ((i \longrightarrow o) \longrightarrow o)$
$[\![P^1{}_1]\!], [\![P^1{}_2]\!], (C \cap P^1{}_1): (i \longrightarrow o)$
$\wedge, \longrightarrow: o \longrightarrow (o \longrightarrow o)$
$[\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]), [\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]): (i \longrightarrow o) \longrightarrow o$
$([\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]))(C \cap P^1{}_1): o$

Analýza ďalšej časti vyžaduje určitú opatrnosť, pretože obsahuje výraz Q, ktorý sa bude pre rôzne kvantifikačné výrazy nahrádzať vhodným kvantifikátorom z predikátovej logiky.[11] Nová formulácia je teda určitou schémou na odvodenie pravidiel. Napríklad v prípade *každý A* vystupuje namiesto *Q* všeobecný kvantifikátor. Na priradenie typu využijeme tvrdenie: „všeobecné výroky môžeme zapísať ako konjunkciu určitých singulárnych výrokov".[12] Výskyty premennej x nahradíme jednotlivými indivíduovými konštantami $a_1, \ldots, a_n$.

$$\forall x[(x \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)] =_{df} (a_1 \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D) \wedge \ldots \wedge (a_n \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)$$

Typovo (m = 1, 2, …, n):

a_m: i
D: i $\longrightarrow$ o
$a_m \in C \cap P^1{}_m$: o
$([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)$: o
$a_m \in C \cap P^1{}_1 \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)$: o
$(a_m \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D) \wedge \ldots \wedge (a_n \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)$: o

Celé pravidlo pre daný prípad:

$$([\![\delta_1]\!]([\![P^1{}_1]\!]))(C \cap P^1{}_1)) \wedge \forall x[(x \in C \cap P^1{}_1) \longrightarrow ([\![\delta_2]\!]([\![P^1{}_2]\!]))(D)]: o$$

4 Použitie

Na ilustráciu použitia navrhovaného pravidla sa pozrime napríklad na vetu (4):

(4) Každý farmár vlastní každého osla.

Model:

Univerzum U = {a, b, c}
⟦farmár⟧ = {a}
⟦osol⟧ = {b, c}
⟦vlastniť⟧ = {⟨a, b⟩}

---

[11] V prípade kvantifikátorov ako *aspoň dvaja, práve traja* atď., vyžaduje daný prepis prostriedky predikátovej logiky prvého rádu s identitou. Zouhar však v (2009, 32-37) zdôvodňuje, že predikátová logika s identitou nestačí na zachytenie všetkých kvantifikátorov.

[12] Aj keď to platí len pri konečných univerzách; pozri Zouhar (2008, 189).

Interpretácia jednotlivých častí vety (4):

$[\![$každý farmár$]\!] = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
$[\![$každý osol$]\!] = \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Interpretácia celej vety (4) pomocou navrhovaného pravidla

$[\![$vlastniť (každý farmár, každý osol)$]\!] = ([\![$každý$]\!]([\![$farmár$]\!]))(\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])) \wedge \forall x[x \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$každý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{x\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])]$

Prejdime si obe časti danej konjunkcie:

$([\![$každý$]\!]\ ([\![$farmár$]\!]))(\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])) = 1$,

pretože množina {a}, ktorá je prienikom množín {a} a [[farmár]], patrí do množiny [[každý farmár]], ktorá je výsledkom kombinácie ([[každý]] ([[farmár]])).

$\forall x[x \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$každý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{x\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])] = 0$,

pretože existuje indivíduová konštanta, konkrétne *a*, pre ktorú formula

$a \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$každý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{a\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])$

je nepravdivá. Antecedent

$a \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])$

je totiž pravdivý, pretože a patrí do množiny {a}. Konzekvent

$([\![$každý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{a\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])$

je však nepravdivý. Množina {b}, ktorá je totožná s množinou {a} ˥ [[vlastniť]], totiž nepatrí do množiny [[každý osol]]. Sémantickým obsahom vety (4):

$([\![$každý$]\!]([\![$farmár$]\!]))(\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])) \wedge \forall x[x \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$každý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{x\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])]$

v danom modeli je Nepravda.

Preskúmajme teraz v danom modeli sémantický obsah vety (5).

(5) Niektorý farmár vlastní niektorého osla.

Model je totožný s modelom v predchádzajúcom prípade. Interpretácia jednotlivých častí vety (5):

$[\![$niektorý farmár$]\!] = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
$[\![$niektorý osol$]\!] = \{\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Interpretácia vety (5) pomocou navrhovaného pravidla:

$[\![$vlastniť (niektorý farmár, niektorý osol)$]\!] = ([\![$niektorý$]\!]([\![$farmár$]\!]))(\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])) \wedge \exists x$[13]$[x \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$niektorý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{x\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])]$

Prejdime si obe časti danej konjunkcie:

$([\![$niektorý$]\!]([\![$farmár$]\!]))(\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])) = 1$,

pretože množina {a}, ktorá je prienikom množín {a} a ⟦farmár⟧, patrí do množiny ⟦niektorý farmár⟧, ktorá je výsledkom kombinácie (⟦niektorý⟧(⟦farmár⟧)).

$\exists x[x \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$niektorý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{x\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])] = 1$,

pretože existuje indivíduová konštanta, konkrétne *a*, pre ktorú je formula

$a \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$každý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{a\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])$

pravdivá. Antecedent

$a \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])$

je totiž pravdivý, pretože a patrí do množiny {a}. Konzekvent

$([\![$niektorý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{a\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])$

je tiež pravdivý. Množina {b}, ktorá je totožná s množinou {a} ⅂ ⟦vlastniť⟧, totiž patrí do množiny ⟦niektorý osol⟧. Sémantickým obsahom vety (5)

$[\![$niektorý$]\!]([\![$farmár$]\!]))(\{a\} \cap [\![$farmár$]\!])) \wedge \exists x[x \in (\{a\} \cap [\![$farmár$]\!]) \longrightarrow ([\![$niektorý$]\!]([\![$osol$]\!]))(\{x\} \urcorner [\![$vlastniť$]\!])]$

je v danom modeli Pravda.

[13] V prípade kvantifikačného výrazu *niektorý A* nahradíme Qx v schéme B* existenčným kvantifikátorom.

5 Záver

Keď sme chceli využiť formálnu teóriu z teórie kvantifikácie, narazili sme na problém. Teória kvantifikácie v existujúcej podobe nebola dostatočná a jednoznačne nepriraďovala sémantický obsah vetám ako (3), (4), (5), (6). Pravidlo B, ktoré malo slúžiť ako návod na kompozičnú determináciu sémantického obsahu podobných druhov viet, nebolo dostatočne určité. Následne som sa pokúsil formulovať adekvátne pravdivostné podmienky jednotlivých typov viet, ktoré som ďalej aj analyzoval. Výsledky analýzy som zhrnul do štyroch pravidiel E, F, G a H. Pomocou nich formuloval všeobecný princíp, podľa ktorého je možné získať vhodné sémantické pravidlo pre naše vety. Pomocou daného princípu je možné formulovať sémantické pravidlá aj pre vety obsahujúce iné kvantifikačné výrazy označujúce kvantifikátory typu $\langle 1 \rangle$, ako napríklad *aspoň dvaja študenti, najviac traja žiaci* atď. Navrhované pravidlo prešlo aj typovou analýzou.[14]

Katedra logiky a metodológie vied
Filozofická fakulta
Univerzita Komenského v Bratislave
Šafárikovo nám. 6
814 99 Bratislava
Slovenská republika
milos.kosterec@gmail.com

Literatúra

BARWISE, J. – COOPER, R. (1981): Generalized Quantifiers and Natural Language. *Linguistics and Philosophy* 4, 159-219.

KEENAN, E. (2002): Some Properties of Natural Language Quantifiers: Generalized Quantifier Theory. *Linguistics and Philosophy* 25, 627-654.

VAN BENTHEM, J. (1984): Questions about Quantifiers. *The Journal of Symbolic Logic*, No. 49, 443-466.

WESTERSTÅHL, D. (1989): Quantifiers in Formal and Natural Languages. In: Gabbay, D. – Guenthner, F. (eds.) (1989): *Handbook of Philosophical Logic.*

[14] Táto štúdia vznikla na Katedre logiky a metodológie vied Filozofickej fakulty UK v Bratislave v rámci projektu podporeného grantom VEGA č. 1/0046/11 *Sémantické modely, ich explanačná sila a aplikácia*. Ďakujem Mariánovi Zouharovi za kritické pripomienky k predchádzajúcim verziám článku.

Vol. 4. Topics in the Philosophy of Language. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1-131.

ZOUHAR, M. (2006): Kvantifikácia v prirodzenom jazyku (I). *Organon F* 13, č. 1, 101-122.

ZOUHAR, M. (2008): *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory.* Bratislava: Veda.

ZOUHAR, M. (2009): *Teória kvantifikácie a extenzionálna sémantika prirodzeného jazyka*. Bratislava: Filozofický ústav SAV.