ÚVOD DO PROBLEMATIKY METODOLÓGIE VIED (VII)

Pavel CMOREJ

VEDECKÉ TEÓRIE

Jazykové prostriedky teórie

Na otázku, čo je vedecká teória, nejestvuje v literatúre jedna všeobecne prijatá odpoveď. Väčšina autorov sa zhoduje v tom, že ide o súbor (množinu) výrokových výrazov spĺňajúci určité podmienky, o ktorých budeme hovoriť neskôr. To znamená, že v tomto súbore sa okrem výrokov môžu vyskytovať aj výrokové formy alebo dokonca len výrokové formy. Také teórie sa vyskytujú najmä v logike a matematike, ale nechýbajú ani v niektorých empirických disciplínach. Výroky a výrokové formy, ktoré utvárajú teóriu, budeme nazývať nazývať **tvrdeniami teórie**. V aritmetike prirodzených čísel sa za tvrdenia teórie považujú napríklad formy

$x + y = y + x,$
$x + (y + z) = (x + y) + z,$
$x . (y + z) = x . y + x . z,$
$x + 0 = 0$

a pod., v logike k nim patria logické zákony, vždy-pravdivé formy výrokov.

Tvrdenia teórie sa formulujú v jazyku, ktorý sa utvára so zreteľom na jej predmet, hoci nemožno povedať, že je ním celkom jednoznačne určený (predmetom nie je jednoznačne určený napr. výber logických výrazových prostriedkov). Jazyk teórie T, v ktorom chceme formulovať získané poznatky o indivíduách nejakého univerza U, o ich vlastnostiach P_1 , ..., P_k a vzťahoch R_1,..., R_m medzi nimi, by mal obsahovať aspoň predikáty, vyjadrujúce skúmané vlastnosti a vzťahy, niektoré výrokové spojky a kvantifikátory alebo iné výrazy používané na formuláciu všeobecných a existenčných výrokov. *Indivíduové mená* sa v niektorých jazykoch vyskytujú, v iných nachádzame len indivíduové premenné, ktoré viažeme kvantifikátormi, a tak konštruujeme všeobecné a existenčné výroky. V jednoduchších prípadoch možno všeobecné a existenčné tvrdenia formulovať aj bez premenných, a to pomocou výrazov "každý", "všetci", "niektorí" atď. a predikátov (v podobe kategorických výrokov). Napriek tomu, že v jazyku niektorých vedných disciplín sa premenné nenachádzajú a všeobecné i existenčné tvrdenia sa formulujú bez nich, v našich úvahách sústredíme pozornosť na

ORGANON F **8** (2001), No. 3, 323-340

teórie formulované v jazyku prvého rádu,[1] v ktorom sa používajú indivíduové premenné (a v ktorom sa – ako vieme – viažu len tieto premenné). Oprávňuje nás na to aj skutočnosť, že jazyk prvého rádu možno v mnohých prípadoch pokladať za logickú rekonštrukciu príslušného fragmentu prirodzeného jazyka (obohateného o odborné termíny), ktorý slúži niektorým vedným disciplínam na formuláciu ich poznatkov, vedeckých zákonov a hypotéz.

Predpokladajme, že J je jazyk prvého rádu obsahujúci okrem bežných výrokových spojok, kvantifikátorov a indivíduových premenných aj predikáty vyjadrujúce vlastnosti a vzťahy indivíduí z univerza U jazyka J. V jazyku J možno formulovať neobmedzené množstvo výrokových výrazov. Množinu všetkých výrokových výrazov formulovateľných v J budeme označovať symbolom S. Táto množina je nekonečná. V S sa vyskytujú všetky pravdivé i nepravdivé výroky a všetky výrokové formy bez ohľadu na to, akú hodnotu pri tom-ktorom ohodnotení nadobúdajú. Výrokové formy jazyka J, ktoré nadobúdajú hodnotu pravda pri každom ohodnotení danom univerzom U, sa nazývajú **vždy-pravdivé** (v U).

Pojem inferenčného a sémantického dôsledku

Už vieme, že teórie sú isté množiny tvrdení (výrokov alebo ich foriem), čiže každá teória formulovateľná v jazyku J je podmnožinou množiny S. Na druhej strane niet pochybností o tom, že niektoré množiny výrokových výrazov nie sú teórie, teda platí, že nie každá podmnožina množiny S je teória. Čím sa líšia teórie od ostatných podmnožín množiny S? Kľúč k odpovedi na túto otázku sa skrýva v postupe, ktorý vedec uplatňuje pri rozvíjaní teórie: zo známych, uznávaných tvrdení odvodzuje pomocou určitých odvodzovacích pravidiel ich dôsledky, ktoré začleňuje medzi uznávané tvrdenia. To znamená, že okrem už známych tvrdení do teórie sa vždy zaraďujú aj *všetky* dôsledky *odvoditeľné* z uznávaných tvrdení pomocou používaných odvodzovacích pravidiel.

Pojem odvoditeľnosti, resp. pojem tzv. *inferenčného* dôsledku odvoditeľného z množiny výrokových výrazov možno špecifikovať až po určení deduktívnych pravidiel, ktoré sa používajú pri odvodzovaní. Hoci vedec má k dispozícii nekonečnú množinu deduktívnych pravidiel ponúkaných logikou, pri rozvíjaní teórie spravidla používa iba niektoré z nich, zvyčajne len nepatrný konečný zlomok. Pravda, treba pamätať na to, že na základe vhodne zvolených základných pravidiel môže zdôvodniť *oprávnenosť používania rôznych* odvodených pravidiel, od ktorých tu môžeme abstrahovať, lebo každé odvodenie, v ktorom sa uplatňuje nejaké odvodené pravidlo, možno vždy nahradiť odvodením, v ktorom sa používajú iba základné pravidlá. Pojem inferenčného dôsledku vymedzíme pomocou pojmu odvodenia. Intuitívne možno **inferenčný dôsledok** nejakej množiny výrokových výrazov M vymedziť ako výrokový výraz, ktorý sa dá odvodiť z M pomocou zvolených odvodzovacích pravidiel.

[1] Pozri [4], 23 – 25, 133 – 135.

Pojem odvodenia *výroku* V z množiny *výrokov* $\{V_1, ..., V_n\}$ sme už definovali v [3], 81 – 82. V nasledujúcich úvahách tento pojem nahradíme všeobecnejším pojmom odvodenia *výrokového výrazu* V z množiny *výrokových výrazov* X, ktorá môže byť aj nekonečná. Ďalej budeme predpokladať, že pri odvodzovaní sa používajú základné odvodzovacie pravidlá $R_1, R_2, ...,$ ktoré nebudeme bližšie špecifikovať, budeme však predpokladať, že sú deduktívne a majú konečný počet premís. Množinu týchto pravidiel budeme označovať symbolom **R**.

Postupnosť výrokových výrazov $V_1, ..., V_z$ je **odvodením výrokového výrazu** V **z množiny výrokových výrazov** X pomocou odvodzovacích pravidiel množiny **R** vtedy a len vtedy, keď 1. pre každý člen V_i platí ($1 \leq i \leq z$), že a) V_i je prvok množiny X alebo b) V_i je odvoditeľný z predchádzajúcich členov postupnosti $V_1, ...,$ V_z pomocou niektorého z pravidiel množiny **R** a 2. V je posledný člen tejto postupnosti, teda $V = V_z$. Výrokový výraz je **odvoditeľný** z množiny X pomocou pravidiel množiny **R** práve vtedy, keď existuje odvodenie výrazu V z X pomocou pravidiel množiny **R**.

Teda odvodenie výrazu V z množiny výrokových výrazov X je postupnosť, v ktorej sa vyskytujú prvky množiny X a výrokové výrazy, ktoré sa dajú získať z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou nejakého pravidla množiny **R**, pričom posledným členom tejto postupnosti je výraz V. Azda nezaškodí pripomenúť, že podľa uvedenej definície odvodením výrazu V z množiny X je aj jednočlenná postupnosť, ktorej jediným členom je výrokový výraz V, pričom $V \in X$. Taká postupnosť spĺňa obidve podmienky, ktoré na odvodenie kladie uvedená definícia. Pomocou pojmu odovodenia môžeme teraz definovať pojem inferenčného dôsledku množiny výrokových výrazov X odvoditeľného z X pomocou pravidiel množiny **R**.

Výrokový výraz V je **inferenčným dôsledkom** množiny výrokových výrazov X odvoditeľným **pomocou pravidiel** množiny **R** vtedy a len vtedy, keď existuje odvodenie výrazu V z výrokových výrazov množiny X pomocou pravidiel množiny **R**.

Množinu všetkých inferenčných dôsledkov odvoditeľných z množiny X pomocou pravidiel množiny **R** budeme označovať symbolom $Cn_{\mathbf{R}}(X)$. Teda $V \in Cn_{\mathbf{R}}(X)$ práve vtedy, keď existuje postupnosť výrokových výrazov $V_1, ..., V_z$ taká, že $V = V_z$ a pre každý člen V_i ($1 \leq i \leq z$) tejto postupnosti platí, že $V_i \in X$ alebo V_i možno získať z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou niektorého z pravidiel množiny **R**.

Poznamenávame, že množinu odvodzovacích pravidiel **R** sme bližšie neurčili a že konkrétny pojem inferenčného dôsledku odvoditeľného z X získame až po jej špecifikácii. Ak **R'**, **R''** sú rôzne množiny odvodzovacích pravidiel, tak pojmy vyjadrené symbolmi $Cn_{\mathbf{R'}}$, $Cn_{\mathbf{R''}}$ sú tiež rôzne, hoci nie je vylúčené, že množina dôsledkov odvoditeľných z X pomocou pravidiel množiny **R'**, čiže množina $Cn_{\mathbf{R'}}(X)$, bude totožná s množinou $Cn_{\mathbf{R''}}(X)$, inak povedané, je možné, že pomocou pravidiel množiny **R'** sa budú dať z X odvodiť tie isté výrokové výrazy ako pomocou pravidiel množiny **R''** (to závisí od povahy pravidiel v **R'**, **R''** a od X).

Všimnime si teraz niektoré vlastnosti množín $Cn_{\mathbf{R}}(X)$. Keďže X je množina výrokových výrazov a pomocou pravidiel množiny **R** sa z výrokových výrazov odvodzujú výrokové výrazy, triviálne platí, že

(1) $Cn_{\mathbf{R}}(X) \subseteq S$,

čiže inferenčné dôsledky odvoditeľné z X pomocou pravidiel množiny **R** sú výrokové výrazy. Platí tiež, že

(2) $X \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(X)$,

inak povedané, každý výrokový výraz množiny X je inferenčným dôsledkom odvoditeľným z X pomocou pravidiel množiny **R**. Platnosť (2) vyplýva zo skutočnosti, na ktorú sme čitateľa už upozornili – z toho, že každá jednoprvková postupnosť obsahujúca prvok množiny X je odvodenie tohto prvku z množiny X.

Pretože $Cn_{\mathbf{R}}(X)$ je množina výrokových výrazov (pozri (1)), aj z nej sú pomocou pravidiel množiny **R** odvoditeľné isté inferenčné dôsledky, existuje teda množina $Cn_{\mathbf{R}}(Cn_{\mathbf{R}}(X)$ dôsledkov odvoditeľných z $Cn_{\mathbf{R}}(X)$ pomocou pravidiel množiny **R**. Niekoho možno trochu prekvapí skutočnosť, že

(3) $Cn_{\mathbf{R}}(Cn_{\mathbf{R}}(X)) \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(X)$,

teda že každý dôsledok odvoditeľný z $Cn_{\mathbf{R}}(X)$ je odvoditeľný aj z X. Vieme však, že ak $V \in Cn_{\mathbf{R}}(Cn_{\mathbf{R}}(X))$, tak existuje odvodenie $V_1, ..., V_z$ výrazu V z množiny $Cn_{\mathbf{R}}(X)$, v ktorom $V = V_z$ a pre každé V_i platí, že $V_i \in Cn_{\mathbf{R}}(X)$ alebo ho možno získať z predchádzajúcich členov odvodenia pomocou niektorého z pravidiel množiny **R**. Toto odvodenie označme symbolom D. Ukážeme, že na základe odvodenia D vždy možno skonštruovať také odvodenie D' výrazu V, v ktorom sa vyskytujú iba prvky množiny X a členy odvodené z predchádzajúcich členov D' pomocou pravidiel množiny **R**. Predpokladajme, že $W_1, ..., W_k$ sú všetky členy postupnosti $V_1, ..., V_z$, ktoré patria do $Cn_{\mathbf{R}}(X)$ (teda $W_1, ..., W_k$ sú totožné s tými členmi odvodenia D, ktoré patria do $Cn_{\mathbf{R}}(X)$). Z toho, že $W_j \in Cn_{\mathbf{R}}(X)$ $(1 \leq j \leq k)$, vyplýva, že existuje odvodenie každého W_j z množiny X. Nech DW_j je odvodenie výrazu W_j z X. Utvorme postupnosť zloženú z členov postupností $D(W_1), ..., D(W_k)$ a odvodenia $V_1, ..., V_z$, a to takto:

(*) $D(W_1), ..., D(W_k), V_1, ..., V_z$

(prvkami tejto postupnosti nie sú odvodenia $D(W_1), ..., D(W_k)$ ako celky, ale ich členy). O každom W_j vystupujúcom v postupnosti (*) na konci čiastkovej postupnosti $D(W_j)$ *platí, že patrí do množiny X alebo je odvodené z predchádzajúcich členov* $D(W_j)$ pomocou pravidiel množiny **R** (lebo $W_j \in Cn_{\mathbf{R}}(X)$). Teda to isté možno povedať aj o W_j, ktoré sa vyskytuje v časti $V_1, ..., V_z$ postupnosti (*), z čoho vyplýva, že v celej postupnosti (*) sa vyskytujú iba výrazy, ktoré patria do X alebo sú odvodené z predchádzajúcich členov (*) pomocou pravidiel množiny **R**. To znamená, že postupnosť (*) je hľadané odvodenie D' výrazu V (= V_z) z množiny X, čiže $V \in Cn_{\mathbf{R}}(X)$.

Veta (2) platí o ľubovoľnej množine výrokových výrazov X, a teda aj o $Cn_{\mathbf{R}}(X)$, z čoho vyplýva, že $Cn_{\mathbf{R}}(X) \in Cn_{\mathbf{R}}(Cn_{\mathbf{R}}(X))$. Na základe toho a (3) hneď dostávame

(4) $Cn_{\mathbf{R}}(X) = Cn_{\mathbf{R}}(Cn_{\mathbf{R}}(X))$.

Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že

(5) ak $X \subseteq Y$, tak $Cn_{\mathbf{R}}(X) \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(Y)$,

lebo každé odvodenie z množiny X je aj odvodením z jej nadmnožiny Y. Dá sa tiež dokázať, že

(6) ak $X \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(Y)$ a $Y \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(Z)$, tak $X \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(Z)$.

Predpokladajme, že V je ľubovoľný výrokový výraz množiny X a že $Y \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(Z)$. Potom $V \in Cn_{\mathbf{R}}(Y)$ (lebo $X \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(Y)$), z čoho vyplýva, že existuje odvodenie výrazu V z množiny Y. Keďže každý prvok y tejto množiny patrí do $Cn_{\mathbf{R}}(Z)$, každé y možno odvodiť z množiny Z. Keď v odvodení výrazu V z množiny Y každý prvok množiny Y nahradíme jeho odvodením z množiny Z, dostaneme odvodenie výrazu V z množiny Z, a preto platí, že $V \in Cn_{\mathbf{R}}(Z)$.

Pretože každé odvodenie je *konečná* postupnosť výrokových výrazov, zrejme platí, že

(7) ak $V \in Cn_{\mathbf{R}}(X)$, tak existuje konečná podmnožina Y množiny X taká, že $V \in Cn_{\mathbf{R}}(Y)$,

lebo z toho, že $V \in Cn_{\mathbf{R}}(X)$, vyplýva, že jestvuje odvodenie výrazu V z množiny X, v ktorom sa vyskytujú iba prvky množiny X a výrazy, ktoré možno získať z predchádzajúcich členov odvodenia pomocou pravidiel množiny **R**. Množina všetkých členov odvodenia, ktoré patria do X, je konečná a V je inferenčným dôsledkom tejto množiny odvoditeľným pomocou pravidiel množiny **R**.

Čím sa líši pojem inferenčného dôsledku od pojmu dôsledku, ktorý sme zaviedli vo IV. pokračovaní nášho výkladu (pozri [3], 79)? Prvý pojem má nápadne syntaktický charakter. O odvoditeľnosti výrokového výrazu V z množiny výrokových výrazov X rozhoduje iba jeho stavba a štruktúra odvodzovacích pravidiel množiny **R**, ktoré sa uplatňujú v odvodení V z množiny X. Pri odvodzovaní V z množiny X a pri zisťovaní, či daná postupnosť výrokových výrazov je odvodením V z X pomocou pravidiel množiny **R**, stačí poznať štruktúru týchto pravidiel, stavbu V a tých výrazov množiny X, ktoré sa uplatňujú v odvodení V z X. Na druhej strane druhý pojem dôsledku, zavedený v [3], má výrazne sémantický charakter: výrokový výraz je **dôsledkom** množiny X práve vtedy, keď vyplýva z množiny X. O sémantickosti vyplývania výrokového výrazu V z množiny výrokových výrazov X svedčí jeho závislosť od významu niektorých výrazov, ktoré sa vyskytujú vo V a vo výrazoch množiny X. So zreteľom na tento charakter vzťahu medzi dôsledkom V a množinou X, z ktorej vyplýva, by sme ho mohli nazvať **sémantickým dôsledkom** množiny X, zvyčajne sa však používa iba termín „dôsledok".

Aký je vzťah medzi inferenčným a sémantickým dôsledkom V množiny X? Keďže odvodzovacie pravidlá množiny **R** sú deduktívne, ak V je inferenčným dôsledkom množiny X, tak V je aj sémantickým dôsledkom tejto množiny. Obrátená implikácia vždy neplatí. Ak množina **R** neobsahuje dostatočne silné odvodzovacie pravidlá, môže nastať situácia, že pomocou pravidiel množiny **R** sa nebude dať odvodiť každý sémantický dôsledok V množiny X. V niektorých prípadoch možno k pravidlám množiny **R** pridať ďalšie a tak ju rozšíriť na množinu **R'**, ktorá bude dostatočne silná na odvodenie všetkých sémantických dôsledkov množiny X. Existujú však aj také množiny X, že nijaké efektívne rozšírenie množiny **R** nebude stačiť na odvodenie všetkých sémantických dôsledkov množiny X (to je tiež jeden z výsledkov K. Gödela).

Deduktívne systémy – teórie

Vráťme sa teraz k otázke, ktoré podmnožiny súboru S (všetkých výrokových výrazov formulovateľných v jazyku J) sú teórie. Teórie konštruujeme najmä preto, aby sme z našich poznatkov o určitej oblasti skúmania utvorili systém, ktorý by sa dal deduktívne ďalej rozvíjať a operatívne využívať vo sfére rozmanitých aplikácií teórie (v prvom rade pri explanácii a predikcii). Mimoriadny význam majú teórie v matematike a logike, lebo poznanie sa v týchto disciplínach rozvíja prevažne v rámci špeciálne osnovaných teórií, ktoré svoj predmet nielen opisujú, ale do istej miery aj konštituujú. Teória ako systém predstavuje množinu výrokových výrazov usporiadaných vzťahmi, ktoré sú dané odvodzovacími pravidlami množiny **R**. Každým odvodzovacím pravidlom R_i množiny **R**, ktoré nám dovoľuje z premís foriem $F_1,...,F_n$ odvodiť záver formy F, je určený (n+1)-argumentový vzťah, v ktorom sú nejaké výrokové výrazy $V_1,..., V_n$, V práve vtedy, keď výraz V je odvoditeľný z výrazov $V_1,..., V_n$ pomocou pravidla R_i. Pochopiteľne, nejde o lineárne usporiadaný útvar.

Príznačným rysom teórií je ich deduktívna uzavretosť, o ktorej sme sa už zmienili. Spočíva v tom, že každý inferenčný dôsledok odvoditeľný z ľubovoľnej množiny tvrdení teórie pomocou odvodzovacích pravidiel množiny **R** tiež patrí do teórie. To znamená, že tvrdeniami teórie sú nielen známe, odvodené (a teda aj dokázané) výroky či výrokové formy, ale aj všetky inferenčné dôsledky týchto výrokových výrazov, teda aj tvrdenia, ktoré ešte nik netvrdil, nedokázal ani si ich nepomyslel. O túto vlastnosť teórií sa opiera aj nasledujúca definícia.

Ak T je množina výrokových výrazov formulovateľných v jazyku J, tak T je **teória** s odvodzovacími pravidlami množiny **R** vtedy a len vtedy, keď do T patria všetky inferenčné dôsledky odvoditeľné z T pomocou pravidiel množiny **R**, teda keď platí, že

(8) $Cn_{\mathbf{R}}(T) \subseteq T$.

Voľnejšie povedané, odvodzovaním inferenčných dôsledkov z tvrdení teórie T pomocou jej odvodzovacích pravidiel nezískame nič, čo by do teórie už nepatrilo. Teória v zmysle uvedenej definície sa nazýva aj **deduktívnym systémom**. Pretože podľa (2) $T \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(T)$, **teóriu**, resp. **deduktívny systém** možno tiež definovať ako ľubovoľný súbor tvrdení T, pre ktorý platí, že $Cn_{\mathbf{R}}(T) = T$. Určiť teóriu v tomto zmysle znamená uviesť alebo skonštruovať jej jazyk J, určiť množinu jej odvodzovacích pravidiel a množinu všetkých jej tvrdení.

Teóriou je napríklad množina všetkých pravdivých výrokov jazyka J spolu s odvodzovacím pravidlom modus ponens. Vieme, že pomocou tohto pravidla možno z pravdivých výrokov odvodiť len pravdivé výroky, čo je zárukou deduktívnej uzavretosti množiny pravdivých výrokov so zreteľom na pravidlo modus ponens. Inou podobne určenou teóriou formulovanou v jazyku prvého rádu, je množina všetkých výrokových výrazov aritmetiky prirodzených čísel, ktoré sú pravdivé alebo pri každom ohodnotení danom univerzom jazyka nadobúdajú hodnotu pravda, pričom **R** je množina všetkých deduktívnych pravidiel logiky prvého rádu. Keďže aplikáciou deduktívnych pravidiel možno z pravdivých alebo vždy-pravdivých výrazov získať len pravdivé alebo vždy-pravdivé výrazy, uvedená množina je deduktívne uzavretá, a preto je teóriou s odvodzovacími pravidlami množiny **R**.

V uvedených príkladoch sa teórie charakterizujú bez bližšieho určenia nejakej množiny tvrdení, od ktorých by sa malo odvíjať odvodzovanie. Treba si však všimnúť, že definícia teórie to vôbec nevyžaduje. Je natoľko všeobecná, že za teórie považuje aj súbory tvrdení, z ktorých sa také podmnožiny nevyčleňujú. Z tohto hľadiska sú obidve charakteristiky teórií celkom jednoznačné a opísané súbory výrokových výrazov plne vyhovujú definícii teórie. Na druhej strane nemožno nevidieť, že bežne používané teórie sa vždy opierajú o istú množinu osobitne vyčlenených tvrdení, ktoré tvoria – spolu s odvodzovacími pravidlami – deduktívny základ celej teórie. Ich určením sa teória zvyčajne aj vymedzuje, resp. konštituuje. V tejto súvislosti sa vynára otázka, aký zmysel má definícia, ktorá necharakterizuje teóriu ako súbor tvrdení *odvoditeľných* z explicitne danej množiny základných výrokových výrazov pomocou zvolených odvodzovacích pravidiel.

Jestvujú prinajmenej dva dôvody na prijatie uvedeného širšieho chápania teórie:

1. tvrdenia toho istého súboru môžu byť pomocou daných odvodzovacích pravidiel odvoditeľné z viacerých množín základných tvrdení;

2. existujú také deduktívne systémy tvrdení, ktoré sa nedajú vybudovať na báze žiadnej efektívne určenej množiny základných tvrdení (k pojmu efektívne určenej množiny sa hneď vrátime), lebo z týchto tvrdení sa nedajú odvodiť *všetky* tvrdenia systému. Uvedené dôvody budú čitateľovi jasnejšie po prečítaní nasledujúcej časti. Našu pozornosť sústredíme teraz na teórie, ktoré sú súbormi tvrdení odvoditeľných z istej efektívne určenej množiny základných tvrdení.

Axiomatické teórie

Pri výstavbe teórie sa zvyčajne postupuje tak, že najprv sa vyberie istý počet tvrdení (formulovaných v jazyku danej vednej disciplíny alebo v nejakom fragmente prirodzeného jazyka obohateného o príslušné odborné termíny), ktoré sú intuitívne zrejmé, evidentné, a potom sa z nich postupne odvodzujú ich dôsledky, ktoré sa zaraďujú medzi ostatné, už známe a akceptované tvrdenia. Základné tvrdenia, ktoré sa prijímajú bez dôkazu, sa nazývajú **axiómy**. Súbor axióm spolu s dôsledkami, ktoré sú z nich *odvoditeľné* (teda nemusia byť už odvodené), sa nazýva **axiomatickou teóriou** alebo **axiomatickým systémom**. Odvodzovacie pravidlá sa zväčša explicitne neformulujú. Predpokladá sa, že pravidlá používané pri odvodzovaní sú deduktívne a že o tom, či daný výrokový výraz vyplýva z určitej množiny premís, rozhoduje intuícia, cit pre logiku, resp. pre logické vyplývanie. Dá sa povedať, že implicitne sa pritom predpokladá celá logika použiteľná pri odvodzovaní dôsledkov, hoci v praxi sa uplatňuje iba malý, konečný počet pravidiel.

Okrem členenia tvrdení teórie na základné a odvodené významnú úlohu pri jej utváraní a rozvíjaní má členenie termínov (a im zodpovedajúcich pojmov, ktoré môžeme považovať za významy termínov) na základné (primitívne) a termíny či pojmy, ktoré sa dajú pomocou základných definovať. Termínmi bývajú výrazy rôznych logických kategórií, ale prevažne ide o predikáty a indivíduové mená. Axiómy sa zvyčajne formulujú pomocou základných termínov, logických spojok a výrazov, pomocou ktorých možno formulovať všeobecné a existenčné tvrdenia (čiže výrazov ako "každý", "niektorí" atď. alebo kvantifikátorov a premenných). Axiómami sa *do istej miery* určuje význam základných termínov, presnejšie povedané, nimi sa vytyčujú medze ich chápania, resp. okruh ich prípustných interpretácií. Preto sa axiómy niekedy nazývajú **implicitnými definíciami** základných termínov.

Pri logickej rekonštrukcii pojmu axiomatickej teórie sa abstrahuje od konkrétneho procesu jej utvárania a podstatne väčšia pozornosť sa venuje aspektom, ktoré sa pri faktickom konštituovaní teórií nie vždy dostatočne uvedomujú, hoci sú na jej určenie a fungovanie podstatné. Pretože k jednoznačnému určeniu teórie patrí opis jej jazyka J, ďalej vyčlenenie množiny axióm formulovaných v jazyku J a množiny deduktívnych prostriedkov, pomocou ktorých sa z axióm odvodzujú ich dôsledky, **axiomatická teória** sa často charakterizuje ako usporiadaná trojica ⟨J, Ax, **R**⟩, kde Ax predstavuje množinu axióm a **R** množinu odvodzovacích pravidiel. Všimnime si jednotlivé zložky tejto trojice.

Pretože našu pozornosť sústredíme na teórie formulované v jazyku prvého rádu, budeme predpokladať, že J je jazyk obsahujúci okrem indivíduových premenných, výrokových spojok a kvantifikátorov (viažucich indivíduové premenné) určité predikáty (prípadne aj indivíduové mená), ktoré vyjadrujú základné pojmy teórie.

Množina axióm by mala byť určená efektívne (táto podmienka sa v literatúre niekedy vynecháva). Čo to znamená? Množinu výrazov M nazývame **efektívne určenou** práve vtedy, keď existuje metóda, ktorá nám umožňuje v konečnom počte krokov mechanicky rozhodnúť, či ľubovoľný daný výraz do M patrí alebo nie. Taká metóda je vlastne algoritmus, ktorý môžeme v podobe istého programu vložiť do počítača. Programom je v tomto prípade návod, podľa ktorého počítač môže v konečnom počte krokov nájsť odpoveď na otázku, či daný výraz je prvkom množiny M. Efektívne určenou je napríklad množina správne utvorených formúl výrokovej či predikátovej logiky alebo množina tautológií výrokovej logiky. Existujú totiž efektívne metódy, pomocou ktorých možno v konečnom počte krokov zistiť, či daný výraz je správne utvorená formula, resp. či je tautológiou výrokovej logiky. Známou metódou, pomocou ktorej možno mechanicky rozhodnúť, či daná formula je tautológia, je tabuľková metóda.

Efektívne určenie množiny axióm nám umožňuje v konečnom počte krokov mechanicky rozhodnúť, ktoré výrokové výrazy sú axiómy teórie. Keď počet axióm je konečný, stačí uviesť ich zoznam. Na základe konečného zoznamu vždy možno v konečnom počte krokov rozhodnúť, či daný výrokový výraz je axióma – stačí porovnať tento výraz s jednotlivými položkami zoznamu. Určenie konečnej množiny axióm pomocou ich zoznamu je zrejme efektívne. Jestvujú však aj axiomatické teórie, ktoré sa opierajú o nekonečne veľa axióm. Nie každé určenie nekonečnej množiny je efektívne a existujú nekonečné množiny, ktoré sa efektívne určiť vôbec nedajú. Keby množina axióm nebola určená efektívne, nie vždy by sme mohli v konečnom počte krokov rozhodnúť, či daný výrokový výraz je axióma, a teda ani rozhodnúť, či ho môžeme použiť ako axiómu pri odvodzovaní.

Nekonečná množina axióm sa zvyčajne určuje pomocou konečného počtu tzv. axiómových schém, z ktorých každá predstavuje nekonečne veľa axióm podobnej štruktúry. Axiómovou schémou by mohol byť napríklad výraz tvaru

$A \supset (B \supset A)$,

v ktorom písmená A, B zastupujú ľubovoľné výrokové výrazy. Určité axiómy možno z tejto schémy získať dosadením konkrétnych výrokových výrazov za písmená A, B (pričom za každý výskyt toho istého písmena sa dosadzuje ten istý výraz). Schéma nie je výraz jazyka teórie, ale jeho metajazyka. Na základe tejto schémy budeme môcť o ľubovoľnom výrokovom výraze jazyka J v konečnom počte krokov rozhodnúť, či je axiómou tvaru $A \supset (B \supset A)$. Stačí porovnať daný výraz s touto schémou, teda zistiť, či je to implikácia, ktorej antecedent je nejaký výrokový výraz V_1 a konzekvent je implikácia s ľubovoľným antecedentom V_2 (tiež výrokovým výrazom) a konzekventom V_1. Ak je axiómových schém viac, daný výraz porovnávame so schémami dovtedy, kým sa neukáže, že predstavuje konkrétny prípad niektorej schémy alebo že nemá tvar žiadnej schémy, a preto nie je axióma. Keďže počet axiómových schém je konečný, o každom výraze budeme môcť v konečnom počte krokov rozhodnúť, či je axióma.

Požiadavka efektívnej určenosti sa vzťahuje aj na množinu odvodzovacích pravidiel **R** (od tejto podmienky sa niekedy tiež upúšťa). Aj v tomto prípade sa musí dať efektívne, t. j. v konečnom počte krokov mechanicky rozhodnúť, či určité odvodzovacie pravidlo do **R** patrí, alebo nie. Navyše pravidlo musí byť formulované tak, aby sa v konečnom počte krokov dalo mechanicky rozhodnúť, či daný výrokový výraz V je odvoditeľný pomocou tohto pravidla z daných výrazov $V_1, \ldots, V_n$, alebo nie. Túto podmienku by nemuselo spĺňať napríklad pravidlo s nekonečným počtom premís. Otázkou efektívneho určenia množiny **R** a jej prvkov sa však nemusíme zaoberať, lebo uvažujeme iba o pravidlách s konečným počtom premís a množstvo logických pravidiel používaných pri odvodzovaní sa dá zredukovať na nepatrné *minimum* (ak sú axiómy dané axiómovými schémami, zvyčajne to býva modus ponens a prípadne nejaké pravidlá pre kvantifikátory). Ak výrokový výraz V logicky vyplýva z množiny výrokových výrazov $\{V_1, \ldots, V_n\}$, môžeme ho z tejto množiny odvodiť buď 1. priamo, jednorazovým uplatnením nejakého úsudkového pravidla $F_1, \ldots, F_n \mid F$, alebo 2. sprostredkovane, pomocou pravidla modus ponens a logických zákonov, resp. logicky pravdivých výrokov, ktoré sú špeciálnymi prípadmi logických zákonov.

Ad 1. Podľa predpokladu výrokový výraz V logicky vyplýva z $V_1, \ldots, V_n$, to znamená, že výraz $(V_1 \wedge \ldots \wedge V_n) \supset V$ je špeciálnym prípadom nejakého logického zákona tvaru $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \supset F$ (kde F_i, F sú logické formy výrokov V_i, V). Tomuto zákonu zodpovedá deduktívne úsudkové pravidlo $F_1, \dots, F_n \mid F$, ktoré môžeme použiť na priame odvodenie výroku V z $V_1, \dots, V_n$.

Ad 2. Ak pravidlo $F_1, \dots, F_n \mid F$ opísané v predchádzajúcom odseku nie je modus ponens, priame odvodenie výrokového výrazu V z výrazov $V_1, \dots, V_n$ pomocou tohto pravidla možno nahradiť odvodením, v ktorom sa toto pravidlo vôbec nepoužije. V tomto odvodení sa vyskytujú a) výrazy $V_1, \dots, V_n$, b) výraz $(V_1 \wedge \dots \wedge V_n) \supset V$, ktorý môžeme použiť, lebo je vzhľadom na vyplývanie výrazu V z $V_1, \dots, V_n$ logicky pravdivý, c) konjunkcia $V_1 \wedge \dots \wedge V_n$, ktorú možno získať z výrokov $V_1, \dots, V_n$ a logicky pravdivého výroku

$$V_1 \supset (V_2 \supset \dots \supset (V_n \supset (V_1 \wedge \dots \wedge V_n))\dots)$$

postupným uplatňovaním pravidla modus ponens, d) výrok V odvodený pomocou modus ponens z výrokov uvedených v b) a c). To znamená, že bez úsudkového pravidla $F_1, \dots, F_n \mid F$ sa môžeme zaobísť, pretože výrok V vyplývajúci z výrokov $V_1, \dots, V_n$ môžeme odvodiť aj bez uplatnenia tohto pravidla. Táto okolnosť svedčí o tom, že nekonečnú množinu odvodzovacích pravidiel zodpovedajúcich logickým zákonom logiky prvého rádu možno nahradiť konečnou množinou obsahujúcou modus ponens, prípadne niekoľko ďalších pravidiel zjednodušujúcich odvodzovanie. Ďalej budeme predpokladať, že množina odvodzovacích pravidiel **R** je konečná a so zreteľom na povahu pravidiel v nej obsiahnutých efektívne určená.

V duchu našich úvah o teóriách vo všeobecnosti môžeme axiomatickú teóriu vymedziť ako množinu tvrdení formulovateľných v nejakom jazyku J a odvoditeľných z efektívne určenej množiny axióm Ax pomocou odvodzovacích pravidiel nejakej efektívne určenej množiny **R**. Inak povedané, množina výrokových výrazov X je **axiomatická teória** práve vtedy, keď existuje efektívne určená množina výrokových výrazov Ax (nazývaných **axiómami teórie**) a efektívne určená množina odvodzovacích pravidiel **R**, pre ktoré platí, $Cn_{\mathbf{R}}(Ax) = X$.

Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že $Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$ je deduktívne uzavretá množina, t. j. že $Cn_{\mathbf{R}}(Cn_{\mathbf{R}}(Ax)) \subseteq Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$, z čoho vyplýva, že $Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$, a teda aj X, je teória v pôvodnom zmysle. V danej súvislosti azda nebude od veci vrátiť sa k otázke, prečo treba rozlišovať deduktívne systémy, resp. teórie vo všeobecnosti od axiomatických teórií. Nemožno v každej teórii T vyčleniť nejakú efektívne určenú podmnožinu jej tvrdení, z ktorých by sa dali odvodiť všetky ostatné tvrdenia T? Inak povedané, nie je každá teória axiomatizovateľná?

Teória T s odvodzovacími pravidlami množiny **R** sa nazýva **axiomatizovateľná** práve vtedy, keď existuje *efektívne* určená podmnožina Y teórie T, pre ktorú platí, že $Cn_{\mathbf{R}}(Y) = T$.

K najvýznamnejším výsledkom logiky minulého storočia patrí veta (dokázaná vynikajúcim rakúskym matematikom K. Gödlom v práci, ktorá vyšla r.1931), z ktorej vyplýva, že niektoré teórie sú neaxiomatizovateľné. Takou teóriou je napríklad už spomenutá množina všetkých pravdivých, resp. pri každom ohodnotení hodnotu pravda nadobúdajúcich výrokových výrazov aritmetiky prirodzených čísel. K. Gödel dokázal, že žiadna efektívne určená množina takých výrokových výrazov nie je dostatočne silná na to, aby sa z nej dali odvodiť *všetky* ostatné výrokové výrazy, ktoré sú pravdivé alebo vždy-pravdivé (a len také výrazy). Je zrejmé, že každá teória obsahujúca aritmetiku prirodzených čísel ako svoju časť je tiež neaxiomatizovateľná. Vo vrchovatej miere to platí o teórii množín. Neaxiomatizovateľnosť určitej teórie nám, samozrejme, nebráni budovať axiomatické systémy, ktoré generujú istú časť celej teórie, to znamená, že tieto systémy sú neúplné. Všimnime si úplnosť a niekoľko ďalších možných vlastností axiomatických systémov trochu dôkladnejšie.

Niektoré vlastnosti axiomatických teórií

Z intuitívneho hľadiska axiomatická teória je úplná, keď z jej axióm sú pomocou jej odvodzovacích pravidiel odvoditeľné všetky vždy-pravdivé výrokové formy a všetky pravdivé výroky o objektoch z univerza jazyka teórie, resp. o objektoch, ktoré sú predmetom skúmania teórie. Výrokové formy môžeme však v danej súvislosti pustiť zo zreteľa, lebo ak $F(x_1, ..., x_n)$ je vždy-pravdivá výroková forma, v ktorej sa ako voľné vyskytujú práve premenné $x_1, ..., x_n$, tak $F(x_1, ..., x_n)$ je vždy-pravdivá forma vtedy a len vtedy, keď $(\forall x_1)...(\forall x_n)F(x_1, ..., x_n)$ je pravdivý výrok. Napríklad z toho, že forma $x + 0 = x$ je vždy-pravdivý výrokový výraz aritmetiky prirodzených čísel, vyplýva, že výrok $(\forall x)(x + 0 = x)$ je pravdivý a naopak.

Ak teória obsahuje všetky pravdivé výroky, sú v nej odvoditeľné aj všetky vždy-pravdivé výrokové formy, lebo každá forma $F(x_1, ..., x_n)$, v ktorej sa ako voľné vyskytujú práve premenné $x_1, ..., x_n$, je odvoditeľná z $(\forall x_1)...(\forall x_n)F(x_1, ..., x_n)$ na základe logického zákona $(\forall x)P(x) \supset P(x)$. So zreteľom na to by sme mohli úplnú axiomatickú teóriu charakterizovať ako teóriu, v ktorej možno z jej axióm odvodiť každý pravdivý výrok. Jestvuje však aj širšie chápanie úplnosti, ktoré vychádza skôr z toho, či teória dáva odpoveď na každú otázku formy "Je to pravda, že V?", pričom V je ľubovoľný výrok formulovateľný v jazyku teórie. V tomto prípade sa nekladie dôraz na pravdivosť odpovede, ale skôr na spôsobilosť teórie dať na každú takú otázku kladnú alebo zápornú odpoveď (v tom zmysle, že z axióm teórie je odvoditeľné V alebo ~V). Preto sa pojem úplnej axiomatickej teórie definuje zvyčajne takto:

> Axiomatická teória $\langle J, Ax, \mathbf{R}\rangle$ je **úplná** vtedy a len vtedy, keď pre každý výrok V jazyka J platí, že $V \in Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$ alebo $\sim V \in Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$.

Ak axiómy úplnej teórie $\langle J, Ax, \mathbf{R}\rangle$ sú pravdivé výroky a pravidlá množiny **R** sú deduktívne (čo predpokladáme), tak ľubovoľný výrok V jazyka J je pravdivý práve vtedy, keď $V \in Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$. Inak to možno povedať aj tak, že v úplnej axiomatickej teórii s pravdivými axiómami sú odvoditeľné všetky pravdivé (a len pravdivé) výroky jazyka J. V takej teórii sa nachádza *pravdivá* odpoveď na *každú* otázku "Je to pravda, že V?", utvorenú z ľubovoľného výroku jazyka J, a to v tom zmysle, že buď odpoveď V, alebo ~ V je odvoditeľná z axióm Ax. Ak niektoré z axióm sú nepravdivé, aj niektoré tvrdenia úplnej teórie, čiže aj niektoré odpovede na uvedenú otázku, budú tiež nepravdivé, ale jedna z odpovedí V, ~ V bude z Ax určite odvoditeľná.

V logike sa používajú aj iné pojmy úplnosti, ale v našom výklade sa nebudeme nimi zaoberať. Treba zdôrazniť, že v zmysle uvedenej definície úplnou je aj teória, v ktorej sa dajú dokázať *všetky* výroky či výrokové výrazy, čiže aj teória obsahujúca protirečiace si výroky V, ~ V(„alebo" v spomenutej definícii je nevylučujúce). Lenže teória, v ktorej možno z jej axióm odvodiť každý výrokový výraz formulovateľný v jej jazyku, je bezcenná – nie je totiž spôsobilá odlíšiť pravdivé výroky od nepravdivých (tým, že by pravdivé boli a nepravdivé neboli odvoditeľné z jej axióm).

V danej súvislosti si treba uvedomiť, že teórie nekonštruujeme na to, aby sme v jednej množine zhromaždili hocijaké výroky, ale na to, aby sme zosystematizovali naše *poznatky* o predmetoch určitej oblasti skúmania (nepravdivé výroky nevyjadrujú poznatky!) a utvorili deduktívny rámec na odvodzovanie nových poznatkov z výrokov, o ktorých pravdivosti sme sa už presvedčili. Spoľahlivá axiomatická teória by mala obsahovať iba pravdivé výroky či vždy-pravdivé výrokové formy a podľa možnosti všetky také výroky a formy formulovateľné v jej jazyku. Pretože to v prípade niektorých teórií nie je možné, musíme sa snažiť aspoň o to, aby sa nám do teórie nevkradli nepravdivé výroky. Žiaľ, všeobecný návod na vybudovanie takej teórie nejestvuje, a preto musíme počítať s tým, že v niektorých teóriách sa môžu nepravdivé tvrdenia vyskytovať. Nepravdivé výroky sa vyskytujú v každej teórii, v ktorej možno z jej axióm odvodiť spor, t. j. dvojicu výrokov V, ~ V, z ktorých jeden je určite nepravdivý. Preto sa pri výstavbe teórie usilujeme vyhnúť sporu a teóriu, v ktorej na spor natrafíme, musíme prepracovať alebo nahradiť inou, neprotirečivou.

Axiomatická teória ⟨J, Ax, **R**⟩ sa nazýva **neprotirečivá** (**konzistentná**) práve vtedy, keď nejestvuje výrok V formulovateľný v jazyku J, pre ktorý platí, že V $\in$ $Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$ a zároveň ~ V $\in$ $Cn_{\mathbf{R}}(Ax)$. Teória, ktorá nie je konzistentná, sa nazýva **nekonzistentná** alebo **protirečivá**.

Podľa tejto definície v konzistentnej axiomatickej teórii je z jej axióm odvoditeľný nanajvýš jeden z výrokov V, ~ V. To isté platí pre výrokové formy, lebo keby sa v nej dali dokázať dve protirečiace si formy, dali by sa dokázať i protirečiace si výroky V, ~ V, takže teória by nebola konzistentná vo vymedzenom zmysle. Vyplýva to z tvrdenia, ktoré dokážeme nižšie. Miernou modifikáciou uvedenej definície získame pojem konzistentnosti aplikovateľný nielen na axiomatické, ale aj na ostatné teórie.

Ak T je ľubovoľná teória (axiomatická či neaxiomatická), tak T je **neprotirečivá** (**konzistentná**) práve vtedy, keď neexistuje nijaká dvojica výrokových výrazov V, ~ V taká, že V $\in$ $Cn_{\mathbf{R}}$ (T) a zároveň ~ V $\in$ $Cn_{\mathbf{R}}$ (T). Inak povedané, na základe tvrdení teórie T sa nedá dokázať spor (nech sa pritom opierame o ktorékoľvek tvrdenia teórie T).

Ľahko sa možno presvedčiť, že v teórii, v ktorej sa vyskytujú protirečiace si tvrdenia V, ~ V, možno dokázať každý výrokový výraz W. Dôkaz tohto výrazu by mohol vyzerať napríklad takto:

V,
$\sim V$,
$V \supset (\sim V \supset W)$,
$(\sim V \supset W)$,
W.

Legenda k dôkazu: 1. a 2. člen postupnosti 1. – 5. sú tvrdenia teórie (podľa predpokladu), 3. člen je logicky pravdivý výrokový výraz a posledné dva členy postupnosti možno získať z predchádzajúcich členov pomocou pravidla modus ponens. To znamená, že v protirečivej teórii sa dajú dokázať všetky výroky bez ohľadu na to, či sú pravdivé alebo nepravdivé (a takisto všetky výrokové formy); za výraz W v naznačenom dôkaze môžeme totiž dosadiť ľubovoľný výrokový výraz. Preto by axiomatická teória, v ktorej by boli dokázateľné protirečiace si formy, nemohla byť konzistentná v zmysle prvej definície, lebo pomocou týchto foriem by sa dal dokázať ľubovoľný výrok W i jeho negácia ~ W.

Hoci každá protirečivá teória obsahuje nepravdivé výroky alebo výrokové formy, ktoré aspoň niekedy nadobúdajú hodnotu nepravda (ba dokonca všetky také výroky a formy), nie každá teória, v ktorej sa medzi jej tvrdeniami vyskytujú nepravdivé výroky alebo výrokové formy, ktoré nie sú vždy-pravdivé, je nekonzistentná. Voľnejšie povedané, teória obsahujúca nepravdivé tvrdenia nemusí byť protirečivá. Skutočnosť, že nepravdivé tvrdenia takej teórie protirečia pravdivým výrokom, ešte nesvedčí o jej protirečivosti, lebo pravdivé koreláty nepravdivých tvrdení nemusia byť v teórii odvoditeľné. Konzistentná teória s nepravdivými tvrdeniami neopisuje síce skutočný stav vecí, ale vyznačuje sa tým, že stav vecí, ktorý opisuje, je *možný*, logicky mysliteľný.

Možný stav vecí by mohla opisovať napríklad teória obsahujúca okrem pravdivých všeobecných tvrdení o fajčení a fajčiaroch aj nepravdivé výroky "X je fajčiar", "Y je nefajčiar" (predpokladajme, že v skutočnosti je to naopak) a logické dôsledky týchto tvrdení a výrokov. Táto teória je síce nepravdivá, lebo obsahuje nepravdivé tvrdenia, ale opisuje situáciu, ktorá môže nastať napríklad vtedy, keď X začne a Y prestane fajčiť; nie je však vôbec dôležité, či taká situácia naozaj i nastane, podstatná je tu jej možnosť. Naproti tomu protirečivá teória neopisuje nijaký možný stav vecí, pretože nikdy, za žiadnych okolností nemôže nastať situácia, v ktorej by platilo nejaké V a zároveň ~ V – to vyplýva z pravdivostnej podmienky pre negáciu.

Každá protirečivá teória je úplná, ale so zreteľom na odvoditeľnosť ľubovoľného výrokového výrazu v nej vonkoncom nezaujímavá. Napriek tomu v našich úvahách o teóriách musíme s protirečivými teóriami počítať, lebo nejestvuje spoľahlivý *všeobecný* návod na výstavbu konzistentných teórií. Protirečivosť teórie môže byť dlho skrytá alebo vôbec nemusí vyjsť najavo. O niektorých teóriách možno dokázať, že sú konzistentné, ale ak neprotirečivá teória je taká bohatá na výrazové prostriedky, že v nej možno vyjadriť aritmetiku prirodzených čísel, jej neprotirečivosť sa nedá bežným spôsobom, v konečnom počte dôkazových krokov, vôbec dokázať (dôkaz nemožnosti takého dôkazu predložil r.1931 K. Gödel).

Niektoré neúplné axiomatické teórie možno rozšíriť na úplné konzistentné teórie pripojením efektívne určenej množiny ďalších axióm, ale existujú aj teórie, ktoré po každom pripojení takej množiny nových axióm ostávajú naďalej neúplné – platí to napríklad o axiomatickom systéme aritmetiky prirodzených čísel (čo tiež dokázal K. Gödel). Samozrejme, také teórie možno hravo rozšíriť na úplné tak, že do nich zavedieme spor, ale tým nezískame nič pozoruhodné, lebo tieto teórie nerozoznávajú pravdu od nepravdy.

Ďalšou vlastnosťou prislúchajúcou niektorým axiomatickým teóriám je tzv. rozhodnuteľnosť. Táto vlastnosť súvisí so spôsobom, ktorým možno zistiť, či daný výrokový výraz je tvrdenie teórie, t. j výraz odvoditeľný z jej axióm. Všeobecne uplatniteľným postupom, ktorým to zisťujeme, je odvodenie, resp. dôkaz: keď sa nám podarí daný výrok či výrokovú formu dokázať, odvodiť z jej axióm, môžeme si byť istí, že ide o tvrdenie teórie. Kam však máme zaradiť výrokový výraz, ktorý sa nám nedarí dokázať? Zostrojenie dôkazu je často veľmi náročná úloha, ktorá vyžaduje nielen isté skúsenosti, ale aj dôvtip a v nemalej miere i šťastie. Kým kontrola, overovanie už hotového dôkazu je mechanická záležitosť (pri ktorej postupne zisťujeme, či daný člen dôkazu je axióma, alebo ho možno získať z predchádzajúcich členov pomocou nejakého odvodzovacieho pravidla), návod na jeho zostrojenie tento charakter zvyčajne nemá. Vieme síce, že dôkaz nejakého výroku V je istá postupnosť výrokových výrazov $V_1, \ldots, V_n$, kde $V_n = V$ a V_i je axióma alebo výraz získaný z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou nejakého odvodzovacieho pravidla, ale nemusíme vedieť, ktoré axiómy máme zvoliť a v akom poradí ich vybrať, aby sme príslušnú postupnosť s vopred daným V dostali. Na to mechanický návod zväčša nejestvuje.

Existujú však teórie, v ktorých možno dokazovanie nahradiť postupom umožňujúcim v konečnom počte krokov mechanicky rozhodnúť, či daný výrokový výraz je tvrdenie príslušnej teórie, alebo nie. Tento postup je vlastne určitý algoritmus alebo procedúra, pomocou ktorej možno efektívne riešiť každý problém typu "Je výrokový výraz V tvrdenie danej teórie T?", kde "V" zastupuje ľubovoľný výrokový výraz formulovateľný v jazyku teórie T.

Axiomatická teória $\langle$J, Ax, **R**$\rangle$ sa nazýva **rozhodnuteľná** práve vtedy, keď existuje efektívna procedúra (postup), pomocou ktorej možno v konečnom počte krokov mechanicky rozhodnúť, či ľubovoľný daný výrokový výraz V jazyka J je odvoditeľný z axióm Ax pomocou pravidiel množiny **R**, alebo nie.

Ak teória T je rozhodnuteľná, tak problém, či ľubovoľný daný výrok V (prípadne výroková forma, formula) je odvoditeľný z axióm teórie T, možno po konštrukcii príslušného algoritmu či programu zveriť počítaču. Z rozhodnuteľnosti teórie vyplýva, že existuje mechanický návod, algoritmus, pomocou ktorého môže počítač, aspoň principiálne, nájsť odpoveď na každú otázku formy "Je výrokový výraz V tvrdením teórie T?". O *principiálnej* možnosti sa tu zmieňujeme preto, že kapacita, výkonnosť konkrétneho počítača je vždy niečím obmedzená (napr. veľkosťou jeho pamäte), takže pri hľadaní odpovede na uvedenú otázku možno skôr či neskôr naraziť na isté medze, ktoré limitujú jeho spôsobilosť odpovedať na ňu vo všetkých možných prípadoch. V teoretických úvahách sa abstrahuje od fyzikálnych a technologických obmedzení počítačov a do úvahy sa berie v prvom rade logická *možnosť* ich zostrojenia a *možnosť* mechanicky (algoritmicky) riešiť uvažovaný problém. Ak T je naozaj rozhodnuteľná teória, tak problém "Je V tvrdením teórie T?" je mechanicky *riešiteľný* v konečnom počte krokov v prípade ľubovoľného výrokového výrazu V.

Rozhodnuteľnosť teórií sa skúma v podstate len v matematike a logike. Je zaujímavé, že matematické a logické teórie sú zväčša nerozhodnuteľné, čo svedčí o tom, že intelektuálna činnosť v tejto oblasti sa vôbec nedá redukovať na strojové riešenie úloh, na "počty" podľa nejakého vzorca, formuly či návodu, že táto činnosť kladie vysoké nároky na tvorivosť a nápaditosť. K rozhodnuteľným logickým teóriam patrí napríklad axiomatický systém klasickej výrokovej logiky alebo predikátovej logiky prvého rádu, v ktorej sa vyskytujú (okrem spojok, kvantifikátorov a indivíduových premenných) iba *jednoargumentové* predikátové premenné. Predikátová logika prvého rádu obsahujúca aj viacargumentové predikátové premenné a logiky vyšších rádov (v ktorých sa kvantifikujú aj predikátové premenné a používajú premenné, ktorých hodnotami sú i vlastnosti a vzťahy iných entít ako sú indivíduá) sú napospol nerozhodnuteľné.

Pri voľbe axióm, pre ktoré sa rozhodujeme pri výstavbe axiomatickej teórie, sa zvyčajne dbá na to, aby zvolené axiómy boli navzájom nezávislé. **Axióma** A_i množiny $\{A_1, A_2, ...\}$ je **nezávislá** od ostatných axióm tejto množiny práve vtedy, keď A_i je neodvoditeľná z množiny $\{A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ...\}$ pomocou odvodzovacích pravidiel danej teórie. V opačnom prípade hovoríme, že axióma A_i je závislá. **Množina axióm** Ax sa nazýva **nezávislá** vtedy a len vtedy, keď každá axióma množiny Ax je nezávislá od ostatných axióm tejto množiny.

Závislé axiómy sú v istom zmysle redundantné, ich vylúčením spomedzi axióm získame teóriu, ktorá obsahuje tie isté tvrdenia ako pôvodná teória. Napriek tomu sa niekedy z istých technických dôvodov (napr. kvôli zjednodušeniu niektorých dôkazov) budujú aj systémy so závislými axiómami. Neraz sa až dodatočne ukáže, že niektoré axiómy sú závislé a potom sa v prípade potreby pôvodný systém axióm nahrádza novým, bez závislých axióm.

Ak A_i je nezávislá axióma nejakej neprotirečivej teórie T, tak nahradením tejto axiómy jej negáciou dostaneme teóriu, ktorá je tiež neprotirečivá (lebo zo zvyšku axióm je A_i neodvoditeľné). Viacej než nezávislosť sama osebe nás dnes zaujíma možnosť výstavby alternatívneho axiomatického systému, ktorý dostaneme z pôvodného nahradením nezávislej axiómy jej negáciou.

Vznik a utváranie axiomatických teórií

V predchádzajúcom výklade sme pod axiomatickou teóriou rozumeli množinu výrokových výrazov nejakého jazyka J odvoditeľných z *efektívne* určenej množiny axióm Ax pomocou *explicitne* stanovených odvodzovacích pravidiel množiny **R** (ktorá spolu s logickými zákonmi predstavuje logiku teórie). Pritom sa predpokladá, že všetky tri zložky teórie sú exaktne vymedzené. Ak ide o tzv. formalizovanú teóriu, predpokladá sa, že pojem výrokového výrazu, axiómy a odvodzovacieho pravidla je vymedzený čisto syntakticky, resp. štrukturálne, teda výlučne so zreteľom na tvar symbolov a ich postupností (čiže stanovením, že výrokovými výrazmi a axiómami sú postupnosti jednoduchých symbolov takého a takého tvaru a že z premís takého a takého tvaru je odvoditeľný záver takého a takého tvaru).

Axiomatická teória ⟨J, Ax, **R**⟩ so *štrukturálne* vymedzenými zložkami J, Ax, **R** a efektívne určenými množinami Ax a **R** sa nazýva **formalizovanou axiomatickou teóriou**. Jazykom formalizovanej teórie je symbolický jazyk modernej logiky obohatený o špeciálne výrazy vyjadrujúce základné pojmy teórie.

Je zrejmé, že formalizovaná axiomatická teória predstavuje značnú idealizáciu teórií používaných v skutočnosti. Ani v matematike a logike nemá každá teória formalizovanú podobu, a to buď preto, že v danom štádiu jej rozvoja nie sú ešte všetky detaily jej stavby celkom vyjasnené, alebo preto, že potrebám mnohých skúmaní dostatočne vyhovuje aj voľnejšie budovaná teória. Rozhodujúca je azda okolnosť, že formalizovaná teória príliš zväzuje intuitívne matematické myslenie a invenciu. Striktný rámec formalizovanej teórie by mohol niektoré skúmania zbytočne skomplikovať. Dôkazy vyzerajú v matematike len málokedy tak ako vo formalizovanej teórii – je v nich veľa skokov, skratiek, často v nich chýbajú celé bloky, ktoré matematici vynechávajú pre ich triviálnosť alebo nezaujímavosť. Precízne rozpracované formalizované teórie sa nebudujú primárne na to, aby sme ich používali na bežné účely a v nich dokazovali potrebné tvrdenia (hoci pri ich budovaní sa nemožno vyhnúť ani tomu), ale aby sme ich skúmali. Ako exaktne konštruované útvary predstavujú totiž ideálne objekty rôznych metalogických skúmaní, pri ktorých možno získať spoľahlivo zdôvodnené výsledky. Tieto výsledky možno extrapolovať aj na bežné teórie, pretože formalizovaná teória je spravidla idealizovanou rekonštrukciou nejakej skutočne používanej teórie alebo teórie, ktorá sa môže takou stať.

Formalizované teórie v ich súčasnej podobe sa objavili až v 20. storočí (ale významné pokusy o výstavbu logicky priezračnejšie osnovaných teórií sa vynorili už v druhej polovici minulého storočia). Prvá axiomatická teória vznikla v starom Grécku pred vyše dvoma tisícročiami – bol to axiomatický systém Euklidovej geometrie. Pokúsme sa aspoň o približnú a viac-menej len schematickú rekonštrukciu vývinu axiomatickej metódy budovania vedeckých teórií od prvých pokusov až po súčasné štádium. Pôjde nám v prvom rade o charakteristiku kľúčových momentov vo vývine axiomatických teórií, momentov, ktoré sa zvyčajne opakujú, i keď nie vždy všetky, v "ontogenéze" nejednej konkrétnej teórie. Budeme pritom vychádzať z Ajdukiewiczovej periodizácie vývinu deduktívnych vied (pozri [1], 181 – 192), ktorú mierne modifikujeme (jeho tri etapy rozložíme na päť) a prispôsobíme našim potrebám.

1. Ako prvé treba uviesť *prípravné predaxiomatické štádium*, v ktorom sa z rôznych, vzájomne izolovaných tvrdení alebo malých skupiniek tvrdení, považovaných za intuitívne zrejmé a očividne pravdivé, vyvodzujú isté dôsledky. Logika, ktorá sa pritom uplatňuje, sa vôbec neskúma, ba ani neuvedomuje. O použití určitého logického kroku rozhoduje výlučne jazykový cit a logická intuícia. Vo východiskových tvrdeniach sa vyskytujú iba zrozumiteľné výrazy, ktoré sa nevymedzujú, ale pomocou nich sa príležitostne definujú iné výrazy. Charakteristická pre toto štádium je

neuzavretosť súboru východiskových tvrdení: na jednej strane k pôvodným východiskovým tvrdeniam môžu pribudnúť ďalšie, na druhej strane po objavení určitých logických väzieb medzi niektorými východiskovými tvrdeniami (po zistení, že z jedného vyplýva druhé alebo naopak) môže dôjsť k redukcii pôvodne prijatých východísk.

2. Potom nasleduje *intuitívne axiomatické štádium*, v ktorom sa súbor východiskových tvrdení a základných, nedefinovaných výrazov *uzatvára* a začína sa systematické rozvíjanie teórie na báze prijatých axióm – odvodzujú sa dôsledky vyplývajúce z axióm a dokázaných tvrdení a pomocou základných termínov sa definujú nové pojmy. Axiómy sa považujú za intuitívne zrejmé a očividne pravdivé a ostatné tvrdenia sa dokazujú intuitívne, o správnosti jednotlivých krokov pri odvodzovaní rozhoduje i v tomto štádiu len logická intuícia. Teória je formulovaná vo fragmente prirodzeného jazyka, do ktorého sa v prípade potreby zavádzajú špeciálne symboly a označenia. Toto štádium dosiahla Euklidova geometria už v 3. storočí pred n. l. a zotrvala v ňom asi dve tisícročia.

3. V treťom štádiu sa začína skúmať a vyčleňovať logika teórie, niektoré jej odvodzovacie pravidlá a logické zákony. Ako v predchádzajúcich dvoch štádiách, aj v tomto štádiu sa teória formuluje v prirodzenom jazyku obohatenom o špeciálne termíny a symboly teórie, prípadne aj o premenné. Axiómami sú naďalej intuitívne zrejmé tvrdenia, odvodzovacími pravidlami intuitívne evidentné prechody od premís k záveru. Logika sa už uvedomuje, ale ešte nie je dostatočne ostro oddelená od mimologickej časti teórie. Známe sú niektoré logické zákony a úsudkové pravidlá, ale ešte chýba logický systém ako celok.

4. Keď pokusy odvodiť piaty postulát Euklidovej geometrie z ostatných axióm tohto systému definitívne zlyhali a na scéne sa začali zjavovať rôzne systémy neeuklidovských geometrií, pôvodná požiadavka intuitívnej evidentnosti axióm začína ustupovať do úzadia. V neeuklidovských geometriách sa prijímali aj axiómy, ktoré naša intuícia jednoznačne odmieta. Jednou z takých axióm bola negácia spomenutého piateho postulátu Euklidovej geometrie. Táto negácia je logicky ekvivalentná tvrdeniu, že bodom ležiacim mimo danej priamky prechádza v rovine (určenej touto priamkou a bodom) viacej rôznych priamok, ktoré sú s danou priamkou rovnobežné. Toto tvrdenie je v príkrom rozpore s našimi bežnými geometrickými intuíciami, teda sotva ho možno považovať za očividne pravdivé, ako napríklad jeho negáciu. Napriek tomu po neúspešných pokusoch odvodiť Euklidov piaty postulát z ostatných axióm jeho systému N. I. Lobačevskij a J. Bolyai začali rozvíjať axiomatický systém, ktorý toto neintuitívne tvrdenie prijíma ako jednu zo svojich axióm. Miesto pôvodnej požiadavky evidentnosti axióm zaujala jednoznačnejšia požiadavka konzistentnosti axiomatického systému. Záujem o logiku teórie ostáva na úrovni predchádzajúceho štádia.

5. Posledné štádium je úzko späté so vznikom modernej logiky, jej jazyka, symboliky a celého systému logických prostriedkov, nevyhnutných pri rozvíjaní teórie. Pravda, bez použitia istých logických prostriedkov sa teória nedala rozvíjať ani v jednom z predchádzajúcich štádií, ale v nich sa logika používala bez toho, že by sa bola stala predmetom osobitného systematického skúmania. Veď logicky myslieť

môžu aj ľudia, ktorí logiku neštudujú, ba dokonca aj takí, ktorí si ju vôbec neuvedomujú.

Príznačnou črtou poslednej etapy vývinu axiomatickej metódy je explicitné stanovenie logických axióm a pravidiel, ktoré sa uplatňujú v dôkazoch tvrdení teórie. To neznamená, že explicitné určenie logiky nevyhnutnej na rozvíjanie teórie je v súčasnosti záväzné. Keď sa axiomatický systém opiera o klasickú modernú logiku a teória sa neformalizuje, logické axiómy a pravidlá sa zvyčajne neuvádzajú (ale mlčky predpokladajú). Podstatné však je, že v prípade potreby môžeme teóriu formalizovať a v tejto podobe podrobiť exaktnému metalogickému skúmaniu. Túto možnosť využívame najmä vtedy, keď pri intuitívnom rozvíjaní teórie narazíme na ťažkosti, nejasnosti, prípadne na logický spor v teórii. Od formalizovanej teórie treba odlišovať **formálnu teóriu**, ktorá je rýdzo syntaktickým, výlučne štrukturálne vymedzeným útvarom daným pravidlami určujúcimi, 1. ktoré postupnosti jednoduchých symbolov jazyka teórie sú výrokové výrazy, 2. aký tvar majú axiómy a 3. aký tvar majú odvodzovacie pravidlá, resp. premisy a závery v nich. Pri výstavbe kalkulu sa od významovej stránky jazykových výrazov úplne abstrahuje.

Na rozdiel od *formalizovanej* teórie, ktorá vzniká logickou rekonštrukciou nejakej obsahovej teórie v jazyku modernej logiky (a má ten istý predmet ako teória, ktorú sme formalizovali), formálna teória nie je pevnejšie spätá so žiadnym univerzom indivíduí (ani s vlastnosťami a vzťahmi týchto indivíduí), ale slúži ako formálny podklad, ktorý interpretujeme v rôznych univerzách a skúmame vlastnosti týchto interpretácií a vzťahy medzi nimi. Pritom sa axiómy vždy interpretujú tak, aby sa z nich stali pravdivé výroky alebo vždy-pravdivé výrokové formy a odvodzovacie pravidlá tak, aby sa pomocou nich z pravdivých premís dali odvodiť len pravdivé závery.

Treba však podotnúť, že s pokusmi rôznymi spôsobmi interpretovať základné termíny a axiómy teórie sa možno stretnúť už vo 4. štádiu vývinu axiomatickej metódy výstavby teórií. Už vtedy sa matematici pokúšali pri dokazovaní nezávislosti nejakej axiómy od ostatných axióm nájsť takú interpretáciu, pri ktorej by daná axióma bola nepravdivá a ostatné axiómy pravdivé. Ak pri nájdenej interpretácii axiómy sú pravdivé a odvodzovacie pravidlá vedú od pravdivých premís vždy k pravdivému záveru, tak axióma, ktorá je pri tejto interpretácii nepravdivá, nemôže byť z ostatných axióm odvoditeľná, a teda je nezávislá. Pravda, pojem formálnej teórie nebol vtedy vôbec známy.

LITERATÚRA

[1] AJDUKIEWICZ, K. (1965): **Logika pragmatyczna**. PWN, Warszawa.
[2] CMOREJ, P. (2000): Úvod do problematiky metodológie vied (III). Deduktívne uvažovanie. **Organon F** VII, č. 3, 326 – 337.
[3] CMOREJ, P. (2001): Úvod do problematiky metodológie vied (IV). Dôkazy a argumenty. **Organon F** VIII, č. 1, 79–90.
[4] CMOREJ, P. (2001): **Úvod do logickej syntaxe a sémantiky**. Iris, Bratislava.