Matematika a skutočnosť

Ladislav Kvasz
Akademie věd České republiky, Praha

Abstrakt: The aim of the present paper is to offer a new analysis of the multifarious relations between mathematics and reality. We believe that the relation of mathematics to reality is, just like in the case of the natural sciences, mediated by instruments (such as algebraic symbolism, or ruler and compass). Therefore the kind of realism we aim to develop for mathematics can be called instrumental realism. It is a kind of realism, because it is based on the thesis, that mathematics describes certain patterns of reality. And it is instrumental realism, because it pays attention to the role of instruments by means of which mathematics identifies these patterns.

Keywords: realism in mathematics, structuralism, instrumental realism.

Predkladaná stať nadväzuje na článok „Matematika a skúsenosť" (Kvasz 2009), ktorého cieľom bolo ukázať, že aj matematika má skúsenostný rozmer. Argumentoval som v ňom proti logicizmu, ktorý je zdrojom skresleného obrazu matematiky ako súboru analytických tvrdení nezávislých od skúsenosti. V článku „Penelope Maddy medzi realizmom a naturalizmom" (Kvasz 2010) som sa pokúsil predstaviť súčasnú diskusiu o jednom variante realizmu v matematike. Cieľom predkladanej state je preskúmať vzťah matematiky a skutočnosti. Tak, ako je vzťah matematiky k skúsenosti skreslený logicizmom, jej vzťah k skutočnosti je skreslený empirizmom. Empirizmus (a v nadväznosti naň pragmatizmus) pokladá novovekú vedu za priame pokračovanie bežnej skúsenosti a svet vedy stotožňuje so svetom každodenného života. Po takom stotožnení nezostáva pre matematickú realitu miesto a empirici sú preto vo vzťahu k matematike najčastejšie nominalistami.

Variant realizmu, ku ktorému smerujem, nazývam *inštrumentálnym realizmom*. Je to realistická pozícia, teda obhajuje názor, že matematika vypovedá o skutočnosti rovnako ako prírodné vedy.[1] Skutočnosť, o ktorej hovorí matematika, rovnako ako skutočnosť, o ktorej hovorí veda, však nie je daná bezprostredne. Prístup k nej je sprostredkovaný nástrojmi, medzi ktoré v matematike patria číselné systémy a symbolika. Inštrumentálny realizmus je pozícia medzi *substančným realizmom*, ktorý za reálnu pokladá určitú (často materiálnu) podstatu – nositeľku atribútov – a *transcendentálnym realizmom*, ktorý sa vlastne prístupu k skutočnosti zrieka a vec osebe pokladá za nepoznateľný pól skúsenosti. Na rozdiel od substančného realizmu inštrumentálny realizmus tvrdí, že *k podstatám vecí* nemáme prístup. *Reálne nie sú substancie, ale rozlíšenia*.[2] Termín „*rozlíšenia*" používam v zmysle inštrumentálneho rozlíšenia pomocou určitého prístroja. Napríklad lupa umožní stabilným a reprodukovateľným spôsobom rozlíšiť dva body, ktoré voľnému pohľadu splývajú, mikroskop umožní rozlíšiť body, ktoré splývajú pri pohľade cez lupu atď. V stati Kvasz (2004c) som sa usiloval ukázať, že zásadnejšie zmeny v dejinách fyziky sú spojené s novými druhmi meracích prístrojov založenými na nových princípoch (napríklad teória relativity s interferometrom). Nový typ prístrojov umožnil rozlíšiť javy, ktoré pre predchádzajúcu experimentálnu prax splývali. Základná idea predkladanej state je pozerať sa na matematickú symboliku ako na inštrumenty plniace úlohu umožniť jemnejšie rozlišovanie.

Na rozdiel od transcendentálneho realizmu inštrumentálny realizmus vychádza z predpokladu, že k realite prístup máme – síce spro-

---

1 Touto tézou chcem vyjadriť presvedčenie, že každá disciplína vypovedá iba o určitom aspekte skutočnosti. Žiadnej disciplíne, ani prírodným vedám ako celku, neprináleží privilegovaný prístup k skutočnosti. Matematika opisuje určité aspekty skutočnosti, prírodné vedy opisujú iné. To, že matematika postupuje deduktívne a prírodoveda postupuje empiricky, nie je až taký zásadný rozdiel. Boli doby, kedy aj matematika fungovala ako empirická veda (v starom Egypte a Babylone) a niektoré disciplíny, ktoré ešte nedávno patrili do oblasti empirickej vedy, sa dnes budujú deduktívne (klasická mechanika). Navyše, numerické experimenty prinášajú empirický rozmer aj do matematiky.

2 Čo sa substancií týka, inštrumentálny realizmus je vo vzťahu k nim neutrálny. Niekedy je užitočné postulovať určité substancie, inokedy je lepšie s postulovaním substancií počkať. Zástancovi substančného realizmu sa môže zdať inštrumentálny realizmus úhybným manévrom, lebo veď každé rozlíšenie predpokladá entity, ktoré rozlišujeme. Inštrumentálny realizmus to však vníma opačne. Prvotné sú určité rozlíšenia, a v prípade ich stability a reprodukovateľnosti si ich vyložíme ako entity.

stredkovaný inštrumentmi, ale napriek tomu dosť robustný na to, aby sme mohli tvrdiť, že čísla, trojuholníky a ďalšie podobné objekty reálne existujú. Veľká časť matematických tvrdení je pravdivá preto, že tieto tvrdenia verne opisujú vlastnosti týchto objektov. Pojem inštrumentálneho realizmu môže pôsobiť paradoxne, je však dôležité nestotožniť ho s inštrumentalizmom. Klasicky sa inštrumentalizmus vymedzoval proti realizmu a tak prevláda názor, že inštrumentalizmus je nutne antirealistický. Keď však problém preskúmame z historického odstupu, zistíme, že inštrumentalizmus sa v 20. rokoch minulého storočia, v dobe zrodu kvantovej mechaniky, vymedzoval proti realizmu klasickej fyziky ukazujúcemu sa ako chybný. Chybnosť starej formy realizmu jasne ukazovali pokusy, v ktorých rozhodujúcu úlohu mali nové inštrumenty. Vedci, ktorí objavili čudné fakty rodiacej sa kvantovej mechaniky, argumentovali inštrumentálne. Dokonca v metaforickom zmysle celú vedu pripodobňovali k inštrumentu slúžiacemu na predpovedanie javov. Naproti tomu zástancovia starej mechanistickej fyziky argumentovali realisticky. Preto mohol vzniknúť mylný dojem (a viacerí filozofi vyvodili z diskusií vedcov práve toto ponaučenie), že problémy mechanistickej fyziky pramenia z jej realizmu a na prekonanie týchto problémov je nutné realizmus opustiť. Tento názor je však dôsledkom nedostatočného časového odstupu.

Musíme si uvedomiť, že aj klasická predkvantová fyzika vďačila za svoj vznik inštrumentom iba o niečo menej presným, ako boli inštrumenty schopné namerať kvantové efekty. Pri každej zmene paradigmy stoja proti starej, realisticky formulovanej paradigme nové fakty, ktoré realistický výklad nemajú, fakty, ktorých porozumenie je zatiaľ iba inštrumentálne. Po čase sa však aj pre javy novej paradigmy vytvorí realistický výklad, ktorý nahradí realizmus starej paradigmy. Tak sa niekoľko storočí pred vznikom kvantovej mechaniky vytvoril realistický výklad pre sily pôsobiace na diaľku. Newtonovské sily boli pre každého karteziána čisto *inštrumentálnou hypotézou* bez vzťahu k skutočnosti, a to ešte omnoho absurdnejšou, než sú pre klasického fyzika Planckove kvantá. Časom sme si na inštrumentálne postulované sily pôsobiace na diaľku do tej miery zvykli, že ich pokladáme za reálne. Práve konštitúciu reality spočívajúcu v tom, že hypotetickým entitám (silám, poliam, kvantám), ktoré boli pôvodne iba postulované bez nároku na reálnu existenciu (v rámci formálneho aparátu teórie, aby vysvetlili niektoré fakty získané pomocou inštrumentov), prisúdime status objektov ontologicky rovnocenných s predmetmi bežnej skúsenosti, vyjadruje názov *inštrumentálny realizmus*. Inštrumentálny realizmus nie je pozícia, ktorá drží s inštrumentalistami proti realistom. Inštrumentálny realizmus chápe, že každá paradigma obsahuje ako inštrumentálny tak aj realistický aspekt. Namiesto toho, aby sa postavil na stranu inštrumentalizmu alebo realizmu, usiluje sa ich spojiť tým, že sa usiluje porozumieť procesu *konštituovania reality* na základe *inštrumentálnej skúsenosti*.[3]

Jaroslav Peregrin formuloval v stati Peregrin (2010) niekoľko kritických výhrad proti môjmu výkladu skúsenostného rozmeru matematiky. Jeho výhrady nastoľujú témy, ktoré musí zodpovedať asi každý pokus o realistický výklad matematiky. Navyše sú formulované jasne a prehľadne, preto ich použijem ako osnovu. V úvode svojej state Peregrin zavádza základné vymedzenia:

> realismem budu rozumět zhruba řečeno názor, že matematická realita je daná nezávisle na nás a my ji jazyky matematiky jenom popisujeme, zatímco antirealismus budu říkat stanovisku, že tyto jazyky matematickou realitu *v nějakém smyslu* toho slova spoluutvářejí. (Peregrin 2010, 71; kurzíva L. K.)

Prv než pristúpim ku konkrétnym výhradám, pokladám za potrebné upozorniť na nesymetrickosť takto vymedzených pozícií. Realizmus označuje pozíciu, podľa ktorej je realita daná natvrdo, nezávisle od nás, kým antirealizmus je podstatne mäkšia pozícia hovoriaca o akomsi spoluvytváraní. Navrhujem preto rozlíšiť štyri pozície:

- *dogmatický realizmus* – matematická realita je daná nezávisle od nás a od našej kultúry; aj keby nás nebolo, existovali by tie isté matematické objekty a platili by o nich tie isté tvrdenia;

---

[3] Inštrumentálna skúsenosť charakteristická pre matematiku sa vo filozofii často ignorovala. Kant sa ju usiloval vtesnať do sféry zmyslovej skúsenosti, kým Carnap naopak do sféry analytického poznania. Podľa mojej argumentácie v Kvasz (2007) a (2009) sú oba tieto výklady matematickej skúsenosti pomýlené. Zdá sa, že diskusia o hranici analytického a syntetického poznania sa zakladá na ignorovaní symbolickej skúsenosti, t. j. skúsenosti získanej na základe formálnych kalkulov, ako je napríklad dekadická sústava či algebraická symbolika. Quinovo riešenie založené na rozostrení hranice je neprijateľné. Problém nie je v tom, že by hranica medzi analytickým a syntetickým bola neostrá, ako problém interpretuje Quine, ale v tom, že tieto dve oblasti spolu nehraničia. Nachádza sa medzi nimi pás symbolickej skúsenosti. Nemožnosť viesť medzi analytickou a syntetickou skúsenosťou ostrú hranicu je dôsledkom tejto skutočnosti.

- *umiernený realizmus* – mnohé vlastnosti matematickej reality sú dané objektívne, nezávisle od našich želaní a konvencií; keby nás nebolo, niektoré matematické objekty by si zachovali existenciu a základné tvrdenia o nich by si zachovali svoju platnosť;
- *umiernený antirealizmus* – mnohé vlastnosti matematickej reality sú v nejakom zmysle tohto slova spoluvytvárané ľudskou kultúrou a jazykom; keby nás však nebolo, nemala by zmysel ani otázka existencie matematických objektov;
- *dogmatický antirealizmus* – matematická realita je výtvorom človeka, je súčasťou sociálne konštruovanej skutočnosti; keby nás nebolo, neexistovali by žiadne matematické objekty a neplatili by žiadne matematické tvrdenia.

Peregrin postavil spor realizmu a antirealizmu ako alternatívu k prvej a tretej pozícii. Prirodzene, keď sa realizmus formuluje v dogmatickej podobe a antirealizmus v umiernenej verzii, je vopred rozhodnuté, kto zvíťazí. Protipólom dogmatického realizmu je dogmatický antirealizmus (v duchu silného programu edinburgskej školy Davida Bloora – pozri Bloor 1976), ani jedna z týchto pozícií však nie je lákavá. Zaujímavejšie, než voliť medzi dogmatickým realizmom a dogmatickým antirealizmom, mi pripadá pokúsiť sa spojiť umiernený realizmus s umierneným antirealizmom a vyložiť, ako sa na konštitúcii matematickej reality podieľa jazyk a kultúra. Pokúsiť sa vyložiť to však tak, aby matematické tvrdenia (aj tie existenčné) mali jasné kritériá pravdivosti nezávislé od toho, či sa tu zhodou okolností nachádzame. S Peregrinom ma tak spája umiernený antirealizmus. Jeho pragmatizmus však nepokladám za prijateľný. Pokúsim sa vyložiť, prečo.

1 Vzťah formálneho sveta a sveta bežnej skúsenosti

Najväčší rozdiel medzi inštrumentálnym realizmom a pragmatizmom sa týka vzťahu formálneho sveta matematiky a sveta bežnej skúsenosti.[4] Peregrin na s. 73 píše: „dostaneme-li se však k otázce, kde se tento svět formálního bere, nemůžeme než popsat, jak se skrz naše

[4] Tento vzťah sa týka ***idealizácie***, čo je epistemická zmena, ktorá znamená zrod matematiky ako deduktívnej vedy v antickom Grécku a tiež zrod fyziky ako experimentálnej vedy v 17. storočí. Výklad idealizácií mal tvoriť prvú kapitolu knihy Kvasz (2008), ale zatiaľ sa mi nepodarilo idealizácii

praktiky a posléze definice rodí v lůně světa přirozeného.“ Na prvý pohľad sa pragmatická pozícia postulujúca kontinuitu medzi praktikami žitého sveta a praktikami formálnych vied zdá plauzibilná. Podľa mňa však žitý svet a svet formálnych disciplín, akými sú matematika alebo fyzika, od seba oddeľuje hlboká priepasť.

Svet matematiky sa často (mylne) stotožňuje so svetom počtov a mnohí filozofi vykladajú namiesto matematiky počty. Podľa mňa sú to dva zásadne odlišné svety. Existujú teda *tri formálne svety* – svet počtov, svet matematiky a svet fyziky. Čo však majú spoločné, je zásadná bariéra, ktorá ich oddeľuje od zodpovedajúcej oblasti prirodzeného sveta. V prípade *počtov* táto bariéra oddeľuje počítanie v lone prirodzeného sveta (ako možno označiť aritmetické systémy domorodých kmeňov Afriky, Austrálie či Južnej Ameriky obsahujúce medzu, za ktorou číselný rad končí) od číselných systémov civilizácií starovekého Egypta, Babylonu alebo Číny, v ktorých číselný rad prekračuje každú medzu a ubieha do nekonečna. V prípade *matematiky* táto bariéra oddeľuje „matematiku“ v lone prirodzeného sveta (ako možno označiť matematické znalosti obsiahnuté v zbierkach návodov na riešenie praktických problémov, ako sú *Rhindov papyrus* zo starovekého Egypta alebo *Matematika v deviatich knihách* zo starovekej Číny, ktoré neobsahujú žiadne zdôvodnenie) od matematiky antického Grécka založenej na systematickom dokazovaní v explicitne formulovanom axiomatickom systéme. V prípade *fyziky* táto bariéra oddeľuje fyziku v lone prirodzeného sveta (ako možno označiť systém aristotelovskej fyziky, podľa ktorej každý pozemský pohyb po čase zastane) od newtonovskej fyziky opisujúcej zotrvačný pohyb interagujúcich telies.

1.1 Vzťah matematiky a sveta našej bežnej skúsenosti

Matematika (ako axiomaticky budovaná disciplína) vznikla ako reakcia na objav nesúmerateľnosti. Nesúmerateľnosť je zásadný rozpor v pytagorejskom systéme. Je čímsi radikálne neprirodzeným (pytagorejci ju nazvali *kai alogion kai aneidon* – čímsi nevysloviteľným a nepredstaviteľným). Človeku z ulice by sme iba ťažko vysvetlili, čo je to nesúmerateľnosť strany a uhlopriečky štvorca, a sotva by chápal, prečo sa takou nepraktickou otázkou zaoberáme. Formálne disciplíny sa konštituujú ako *protiklad prirodzeného postoja*, keď sa ukáže, že intuície,

---

dostatočne porozumieť. Preto kniha začína druhou kapitolou venovanou re-prezentáciám.

na ktorých je založený prirodzený postoj, sú nekonzistentné. Formálne disciplíny predstavujú nástroj na prácu s kontraintuitívnymi poznatkami, ktorý postupuje tak, že niektoré zo súboru prirodzených intuícií urobí *plne explicitnými* a prehlási ich za postuláty, ostatné prirodzené intuície *potlačí ako nelegitímne* a ďalej napreduje *prísne deduktívne*.

Praktiky, ktoré sa rodia v lone prirodzeného sveta, nás môžu viesť len po hranicu vytýčenú objavením sa sporu. Cesta zo sporu sa v prípadoch spojených so zrodom novej exaktnej disciplíny (ako bol zrod matematiky alebo zrod fyziky) zakladá na *opustení prirodzeného postoja*. Proces konštitúcie formálneho sveta som vyložil na príklade fyziky v trojici článkov Kvasz (2000), (2001) a (2004a). Tam som opísal prechody *od aristotelovskej fyziky ku galileovskej* (z ktorej hľadiska je aristotelovská fyzika chybná, lebo postuluje nehybnú Zem), *od galileovskej fyziky ku karteziánskej* (z ktorej pohľadu je chybná Galileova fyzika, lebo pokladá rovnomerný pohyb po kružnici za zotrvačný) a *od karteziánskej fyziky k newtonovskej* (z ktorej pohľadu je chybná Descartova fyzika, lebo postuluje vír jemnej látky, ktorý by sa onedlho zastavil). Zdá sa, že aristotelovská fyzika je verným obrazom bežnej skúsenosti s pohybom (psychologické experimenty ukazujú, že pre deti sú mnohé tézy aristotelovskej fyziky plauzibilnejšie než tézy newtonovské). Ak je to pravda, znamená to, že od sveta newtonovskej fyziky je bežná skúsenosť oddelená aspoň tromi radikálnymi ruptúrami – galileovskou, karteziánskou a newtonovskou. Formálny svet fyziky sa teda nerodí v lone prirodzeného sveta. Práve naopak, rodí sa v protiklade k nemu, v jeho trojnásobnom zapretí.

Verím, že v prípade matematiky to bolo rovnako. Aj cesta od prirodzenej skúsenosti s tvarom k jeho uchopeniu u Euklida vedie cez viaceré ruptúry, z ktorých každá spočíva v odmietnutí predchádzajúceho systému a jeho nahradení systémom iným. Samozrejme, kým túto predstavu nerozpracujem do detailov, nemôžem ňou argumentovať. Uvádzam však príklad fyziky ako poukaz na radikálnu diskontinuitu medzi prirodzeným svetom a svetom formálnym. Je možné vybásniť si cestu vedúcu od nervového vzruchu až ku klasickej mechanike a v rámci tejto básne opísať, ako sa z praktík prirodzeného sveta rodí formálny svet matematiky. Je možné veriť, že v prirodzenej skúsenosti sa stretávame s telesami newtonovskej mechaniky (s jej priestorom, časom a pôsobením – nech už je tým čokoľvek). Filozofické básnenie je však cesta, po ktorej sa nechcem vydať.

Svet matematiky rovnako ako svet fyziky je konštituovaný nielen bežnou skúsenosťou získanou praktikami v prirodzenom svete, ale aj symbolickou skúsenosťou získanou praktikami vo formálnych jazykoch. V prípade fyziky musíme rozlíšiť aspoň štyri jazyky – jazyk aristotelovskej fyziky, jazyk galileovskej fyziky, jazyk karteziánskej fyziky a jazyk newtonovskej fyziky. Jazyk aristotelovskej fyziky sa rodí v dostatočnom kontakte s prirodzeným svetom, ale zvyšné tri jazyky sú umelé, vytvorené na zachytenie kontraintuitívnej inštrumentálnej skúsenosti, ktorá hovorí v rozpore so zdravým rozumom, že v tomto momente letíme závratnou rýchlosťou 30 kilometrov za sekundu, že Mesiac na nás pôsobí obrovskou silou dvíhajúcou pohoria o niekoľko metrov a že táto sila sa šíri prázdnom bez toho, aby ju čokoľvek prenášalo. Pritom úspešný, teda dostatočne konzistentný je iba newtonovský jazyk. Predpokladám, že ani v matematike sa jazyk euklidovskej geometrie nezrodil na prvý pokus, ale je výsledkom podobnej korekcie neúspešných pokusov – Tálesovho a Pytagorovho. Skúsenosť týchto neúspechov a syntaktické poučenie z nej tvorí *inštrumentálnu* zložku poznania. *Realizmus* je potrebný ako vodidlo pri konštrukcii formálnych jazykov. V Kvasz (2010) som tento argument nazval argumentom konštitutívnej nevyhnutnosti. Na to, aby sa vôbec nejaká formálna disciplína mohla vytvoriť, musia objekty, o ktorých hovorí, existovať. Ako by mohli tvorcovia týchto disciplín vytvoriť také zložité lingvistické systémy, keby ich nebolo možné testovať na realite, ktorá je od príslušných systémov nezávislá?

Podľa mňa tkvie *problém pragmatizmu v tom, že vedu pokladá za niečo dané*, a tým bagatelizuje jej nesamozrejmosť.[5] Keď chceme vysvetliť,

---

[5] Keď porovnáme pragmatizmus, ktorý je predmetom kritiky v tejto stati, a logicizmus, ktorý sme kritizovali v stati „Matematika a skúsenosť", objavuje sa tu zaujímavá súvislosť. Pragmatizmus kritizujeme za to, že idealizácie ignoruje a tvári sa, ako keby veda bola priamym pokračovaním prirodzenej skúsenosti. Logicizmu sme naproti tomu vytýkali, že jednu konkrétnu re-prezentáciu absolutizuje a usiluje sa na ňu redukovať celú matematiku. Čo majú tieto koncepcie, ktoré skresľujú vzťah matematiky k skutočnosti a k skúsenosti spoločné, je ich ignorovanie dynamiky procesu idealizácie, resp. re-prezentácie. Pragmatizmus sa tvári, že k žiadnej idealizácii nikdy nedošlo a naše poznanie tvorí súvislú tkaninu, kým logicizmus uznáva jedinú re-prezentáciu, tú, ktorú vytvorili Frege, Peano a Russell. Výklad súvisu inštrumentálneho realizmu a idealizácie presahuje možnosti tejto state.

ako sa niečo také nesamozrejmé ako veda (či matematika) vôbec mohlo zrodiť, musíme k umiernenému antirealizmu pridať určitú formu realizmu. Realistický pól inštrumentálneho realizmu je nevyhnutný, keď chceme opísať vznik prvého jazyka úplne nového druhu, teda *prvého jazyka, v ktorom bolo možné viesť dôkazy*, alebo *prvého jazyka, v ktorom bolo možné predpovedať časový vývin dynamického systému*. Keď tvoríme „novú gramatiku“, musíme sa opierať o niečo pevné. Pragmatizmus predpokladá, že pytagorejsko-euklidovský resp. galileovsko-newtonovský zlom sú už dávno zavŕšené a už sa zabudlo, že tu nejaké zlomy vôbec boli. Potom sa samozrejme môžeme realizmu vzdať. V „gramatike“ jazyka je už nasedimentovaná dostatočne bohatá štruktúra, o ktorú sa môžeme pri dokazovaní či temporálnej predikcii oprieť. Ak však chceme pochopiť proces vzniku formálnych jazykov, bez realizmu sa nezaobídeme. Samozrejme, keď už máme určitý formálny jazyk k dispozícii, ďalší je možné vytvoriť jeho variovaním. Prvý formálny jazyk určitého typu (kosistická algebra, Leibnizov diferenciálny počet, Fregeho predikátový počet, Cantorova teória množín) sa však rodili na báze realizmu hraničiaceho až s platonizmom.

1.2 Vzťah fyziky a reálneho sveta

Jedným z rozdielov medzi inštrumentálnym realizmom a pragmatizmom je názor na fyziku. Peregrin píše:

> Fyzika má nepochybně co dělat s reálným, hmatatelným světem, a nástroje, které používá, mají co dělat s dobýváním poznatků týkajících se bezprostředně tohoto světa. Nyní by bylo třeba vyjasnit, co je na místě tohoto světa v případě matematiky: chápe Kvasz matematiku jako úsilí o objevování téhož reálného, hmatatelného světa, s nímž má co dělat fyzika, nebo ji chápe jako věc zkoumání nějakých abstraktních světů (světů, ve kterých nacházíme čísla, funkce, atd.)? (Peregrin 2010, 74)

Ja si nemyslím, že fyzika má privilegované postavenie vo vzťahu k reálnemu svetu. Pôsobia v reálnom svete sily na diaľku, ako hovorí newtonovská fyzika? Alebo sa v ňom preháňajú polia, ako nás učí teória relativity? Je reálny svet nekonečný, alebo konečný? Majú telesá reálneho sveta presnú polohu a hybnosť, ako učí klasická fyzika, alebo pre ne platí princíp neurčitosti, ako učí kvantová mechanika? Problém je v tom, že neexistuje nijaká jednotná fyzika. Existuje súbor rôznych fyzikálnych teórií, ktoré sú vo vzájomnom spore. Z hľadiska klasickej mechaniky existujú dokonale tuhé telesá, ktoré teória relativity zakazuje. Maxwellova elektrodynamika tvrdí, že náboj nie je možné udržať stabilne v ohraničenej oblasti pomocou elektromagnetických síl, kvantová mechanika to dokáže. Môžeme zastávať pozíciu, že tá pravá fyzika, ktorá hovorí o realite, o tom, aká skutočne je, je zjednotená fyzika, ktorú dnes síce nik nepozná, ale *es kommt der Tag*. Viera v existenciu takej fyziky je však pravdepodobne teologické rezíduum, preto by ho pragmatik nemal zastávať.

Keď prijmeme názor, že svet opisuje rad teórií – klasická mechanika, teória poľa, kvantová mechanika, kvantová teória poľa, štatistická fyzika, teória pružnosti, hydrodynamika – z ktorých si viaceré protirečia, tak nevidím dôvod, prečo by sme mali z voľného zoskupenia protirečiacich si teórií opisujúcich svet vylúčiť práve tie matematické. V hmatateľnom, reálnom svete, o ktorom hovorí Peregrin, asi neexistujú sily pôsobiace na diaľku (ktoré postuluje klasická mechanika a zakazuje teória relativity), podobne ako v ňom neexistujú spojité polia (ktoré postuluje teória poľa a zakazuje kvantová fyzika). Myslím si, že fyzici majú s realistickým nárokom svojich teoretických konštrukcií (lebo čo iného je sila pôsobiaca na diaľku či pole rozprestierajúce sa do nekonečna) väčšie problémy ako my matematici. Preto by som výzvy vedené k matematike zo strany fyziky nepokladal za znepokojujúce. Neverím, že fyzika má privilegovaný prístup k reálnemu svetu. Nekonečný priestor či zakrivený časopriestor sú rovnako abstraktné konštrukcie ako čísla, funkcie či variety. V tom sa fyzika nelíši od svojej staršej sestry, matematiky. Vychádza z určitého súboru javov, pri ktorých výklade postuluje rad teoretických konštrukcií. Niektoré z nich sa po čase ukážu ako problematické, iné sa udržia dlhšie. Nevidím v tom žiadny rozdiel.

1.3 Reálne objekty existujú v čase a priestore

Častou námietkou proti realistickému výkladu matematiky je to, že reálne objekty existujú v priestore a čase, kým objekty, o ktorých hovorí matematika, sú abstraktné objekty, ktoré existujú mimo čas a priestor. Túto námietku formuloval už roku 1973 Paul Benacerraf v stati „Mathematical truth“. Roku 1994 ju zopakoval Mark Balaguer v kritike názorov Penelope Maddy. To, že takáto námietka vôbec môže pôsobiť presvedčivo, ukazuje, „ako hlboko sme klesli“ v akceptácii scientizmu. Antická filozofia od Tálesa po Plotina rovnako ako celý stredovek od

Augustína až po sv. Tomáša pojem priestoru nepoznajú. Ako to vyjadril Carl Friedrich von Weizsäcker:

> Letmý pohľad na dejiny filozofie a fyziky ukazuje, že priestor, ktorý bol sto rokov po Newtonovi pokladaný za apriórnu danosť našej schopnosti poznávať, sto rokov pred Newtonom nik nepoznal. (Weizsäcker 1990, 203)

Priestor je matematická konštrukcia (u Newtona s teologickým základom – *Sensorium Dei* – pozri Kvasz 2006).[6] Preto ak niekto tvrdí, že objekty reálneho sveta existujú v priestore a čase, nutne zastáva matematický realizmus (nanajvýš si to neuvedomuje). Lebo priestor je súvislý, homogénny, izotropný, trojrozmerný, orientovateľný a nekonečný (prípadne má vlastnosti Riemannovej variety), čo sú vlastnosti matematického charakteru. Newton „vložil" reálny svet do matematického priestoru, reálne objekty nahradil telesami, ktoré majú ostré, jednoznačné, merateľné vlastnosti, zadané pomocou matematických

---

6 Tu by bolo možné namietať, že matematickou konštrukciou je iba pojem priestoru, kým sám priestor, v ktorom sa nachádza Zem, hviezdy a galaxie so všetkým, čo na nich existuje, je čosi reálne. Je však dôležité si uvedomiť, že priestor nie je čosi faktické. Existovať môžu polia, prípadne vákuum postulované kvantovou elektrodynamikou, ale priestor ako taký nemá status súcna. Práve „vloženie sveta do geometrického priestoru" bolo jedným z rozhodujúcich krokov na ceste k modernej vede. Priestor je aspektom vedeckého opisu skutočnosti. Je to matematická konštrukcia, ktorú Newton premietol na skutočnosť a naučil nás chápať svet ako umiestnený v priestore. Keď sa niekto rozhodne pozerať sa na svet takto, asi nemožno namietať. A koniec koncov konám tak aj ja, len s tým rozdielom, že si uvedomujem, že to už rozprávam o modeli fyzikálnej skutočnosti, ktorý konštruujem v rámci určitého matematického objektu (menovite priestoru). Samozrejme, je možné tento model stotožniť so skutočnosťou, zabudnúť na to, že ide o matematický model, a uveriť, že sama Zem, hviezdy a galaxie sú v nekonečnom, súvislom, nekonečne deliteľnom homogénnom a izotropnom priestore. Dúfam však, že sa čitateľ nenahnevá, ak ho v tomto stotožnení nebudem nasledovať.

Keď projektujeme náš vedecký obraz sveta späť do minulosti, máme pocit, že Newton iba nahradil pôvodné intuitívne chápanie priestoru exaktnejším, matematickým chápaním. Faktom však je, že svet (vesmír, univerzum) sa dlho pokladal za konečný a žiadne intuitívne chápanie priestoru neexistovalo. Napríklad Aristoteles popieral, že by mohlo existovať prázdno a jeho vesmír (podľa Weizsäckerovho výroku aj väčšina ostatných) určite nebol umiestnený v priestore. Sférou hviezd svet končil. Až Bruno svet rozšíril do nekonečna a Newton napokon pozadie tohto nekonečného sveta matematizoval.

veličín, pričom na seba pôsobia na diaľku. Bolo to pôsobenie na diaľku, ktoré prinútilo Newtona vložiť reálny svet do prázdneho priestoru. Descartes prázdny priestor nepotreboval, v jeho svete sa pôsobenie šírilo dotykom. Žiaľ, karteziánske pôsobenie nefunguje a Newton bol nútený prejsť k silám pôsobiacim na diaľku v prázdnom priestore. Pôsobenie na diaľku je v rozpore so zdravým rozumom. Vyhlásiť jeho nositeľa – prázdny priestor – za kritérium reálnosti, je absurdné, a upierať matematickým objektom reálnosť len preto, že existujú mimo tohto priestoru a času, je absurdné na druhú. Priestor a čas sú matematické objekty. Preto tu ide o vnútromatematický spor, kedy sa určitý matematický objekt (priestor a čas) vyhlási za arbitra reálnosti iných matematických objektov, ako sú sily, polia a kvantá, respektíve čísla, trojuholníky a polynómy. Pritom mi nie je zrejmé, prečo sa za arbitra reálnosti zvolili práve priestor a čas, a nie niečo iné.

2 Otázka úlohy reprezentačných nástrojov pri konštitúcii skutočnosti

V realizme, ktorý zastávam, je svet matematiky konštituovaný nástrojmi symbolickej a ikonickej reprezentácie.[7] V Kvasz (2009) som neobjasnil, ako si tú konštitúciu predstavujem, a tak sa Peregrin oprávnene pýta, či si ju predstavujem v slabšom alebo v silnejšom zmysle. Píše:

> V *slabším smyslu* slova zprostředkování nám nástroje umožňují poznávat něco navíc oproti tomu, co poznáváme i bez nich, něco, co tu sice je tak i tak, k čemu se my ale bez takových nástrojů nedokážeme dostat. Například mikroskop nám může ukázat bakterie, které jsou bez ohledu na to, zda my mikroskop máme nebo nemáme, stejně reálné, jako třeba sloni… Je tu ale i *silnější způsob*, jak ono zprostředkování číst. Můžeme si představit, že každá lidská zkušenost je poznamenána tím, jaké smyslové orgány či externí nástroje pro její vnímání používáme. Z tohoto hlediska pak vlastně nelze říci, že tato zkušenost existuje nezávisle na

---

[7] Tu prechádzame od idealizácií k *re-prezentáciám*. Predpokladáme, že proces idealizácie je završený, univerzum matematiky je konštituované a my ideme opísať dynamiku, ktorej pomocou sa toto univerzum rozširuje. Jeho nové oblasti sa odkrývajú pomocou nástrojov ikonickej a symbolickej reprezentácie. Kontakt matematiky so skutočnosťou sa zakladá v rovine idealizácie. Jednotlivé re-prezentácie už iba prenášajú ontologický náboj pre nové a nové oblasti, ktoré odkrývajú.

nás, protože naše zkušenost je vždy věcí interakce mezi světem a naším poznávacím aparátem. (Peregrin 2010, 73; kurzíva L. K.)

V tomto rozlíšení Peregrin inklinuje asi k druhej alternatíve. Z pohľadu matematiky je však situácia zložitejšia. Najprv sa musím spýtať, *ako reálne sú slony*? Opis prvej alternatívy sa zakladá na predstave, že existuje určitá neproblematická oblasť reality zahŕňajúca slony, ku ktorej máme akýsi bezproblémový mimojazykový prístup. Baktérie sú členy tej istej reality ako slony, len zhodou okolností nám evolúcia vytvorila jednošošovkové oči (miesto dvojšošovkových, čo je princíp, na ktorom funguje mikroskop), a preto baktérie nevidíme, kým slony vidíme. Predstava, ktorá je implicitne obsiahnutá v Peregrinovej alternatíve, chápe realizmus ako *vzťah jazyka k bezproblémovo danému svetu* (slonov a baktérií). Našou úlohou je potom posúdiť, do akej miery výrazom jazyka v danom svete zodpovedajú objekty. Na miesto tejto predstavy sa pokúsim postaviť predstavu, že aj svet, v ktorom žijú slony a baktérie, je svetom určitého jazyka.[8] Preto namiesto vzťahu jazyka a sveta sa budem usilovať realizmus chápať ako *vzťah dvoch jazykov*. To neznamená, že tu svojvoľne prinášam do hry ďalší jazyk. Ten tu už totiž je. Keď Peregrin hovorí o slonoch a baktériách, používa určitý jazyk. Ide mi o to urobiť explicitnými predpoklady, na ktorých stojí jeho rozlíšenie dvoch spôsobov konštitúcie.

Vedľa *teoretického jazyka*, ktorého status skúmame (v našom prípade je to jazyk matematiky, pričom chceme zistiť, či jeho termom zodpove-

---

[8] To samozrejme neznamená, že v dobách, keď neexistoval žiadny jazyk, sa „guče bielkovín" (ktoré nazývame slonmi) nepreháňali po povrchu Zeme. Ide však o to, že existuje nespočetné množstvo spôsobov, akými je možné rozkrájať skutočnosť a určité bloky prehlásiť za súcna. Jazyk z nekonečného množstva rôznych rozkrájaní vyberie jednu, ktorú ontologizuje. Proces krájania a ontologického postulovania označujem termínom *konštitúcia*. Teda nepopieram, že to, čo tu je, tu naozaj je. Realitou sa to však stáva až v dôsledku rozkrájania a následného postulovania súcien. Na rozdiel od bežného relativizmu si myslím, že krájanie sa deje prostredníctvom určitých inštrumentov, ktoré do procesu krájania skutočnosti vnášajú medze. Na jednej strane inštrumenty musia byť dostatočne jemné, aby určité krájanie umožnili, na druhej strane postulované entity musia byť v zhode so skúsenosťou, ktorú prostredníctvom inštrumentov získame. Umiestnenie Zeme a galaxií do priestoru je jedno takéto krájanie. Zem i galaxie, alebo presnejšie to, čo takto označujeme, je tam, kde to je. Výklad ich vzťahov ako priestorových, teda výklad, že Zem a galaxie sú v priestore, je však dielom určitého jazyka.

dajú objekty v realite), teda zavedieme ešte jeden jazyk, ktorý nazveme *ontologickým jazykom*. V ňom sú opísané slony, baktérie a všetko, čo „naozaj je“. Problém realizmu je potom problémom prekladu teoretického jazyka do ontologického jazyka, o ktorom predpokladáme, že verne opisuje realitu.[9] Tento krok nie je ničím novým. Vymyslel ho okolo roku 1630 Desargues, keď pochopil, že perspektívu nemusí interpretovať ako vzťah dvojrozmerného obrazu a trojrozmernej skutočnosti (ako perspektíve rozumeli maliari). Dokonalý perspektivistický obraz je definovaný tak, že pri pohľade na tento obraz vzniká v oku diváka úplne rovnaký dojem ako pri pohľade na trojrozmerný originál. Preto namiesto maľovania obrazu skutočnej vázy si môžeme postaviť úlohu namaľovať obraz dokonalého perspektivistického obrazu tejto vázy. Na plátne by sa malo diať to isté. Perspektíve možno porozumieť ako vzťahu dvoch obrazov. Namiesto otázky, ako vzniká perspektíva, tak Desargues položil otázku, ako sa perspektíva zachováva (pri kopírovaní perspektivistického obrazu). Rovnakú myšlienku (s explicitným odkazom ku geometrii) použil Frege, keď otázku, čo je číslo, nahradil otázkou, kedy sú dva pojmy rovnopočetné. V oboch prípadoch sa tento trik ukázal účinný, a preto sa možno pokúsiť ho preniesť do diskusie o realizme v matematike.

Preto miesto otázky, *aký je vzťah určitého teoretického jazyka k mimojazykovej realite* (analógia otázky o vzťahu dvojrozmerného obrazu k trojrozmernej skutočnosti alebo vzťahu čísla k počítaným veciam), položíme otázku, *kedy je teoretický jazyk preložiteľný do ontologického jazyka* (analógia otázky, kedy dva obrazy vyjadrujú rovnakú perspektívu alebo kedy sú dva súbory rovnopočetné). Domnievam sa, že až takto možno problém realizmu v matematike adekvátne formulovať. Ukazuje sa však, že miesto dvoch pozícií (umierneného realizmu a umier-

---

[9] Niečo podobné robili logickí pozitivisti, keď zaviedli jazyk protokolárnych viet, do ktorého chceli preložiť teoretické termíny vedeckých teórií. Ukázalo sa, že nič také ako protokolárne vety neexistuje, a ich projekt stroskotal. Keď však nebudeme trvať na definitívnom, fundamentálnom, neutrálnom jazyku ako logickí pozitivisti, ale za ontologický jazyk prijmeme bežný jazyk, je možné, že sa nám v porozumení otázkam spojeným s konštitúciou skutočnosti podarí pokročiť kúsok ďalej. Nepotrebujeme, aby ontologický jazyk zachytával realitu v absolútnom a definitívnom zmysle. Úplne stačí, aby bol vhodným základom pre interpretáciu daného, konkrétneho teoretického jazyka.

neného antirealizmu), ktoré tvoria vyváženú alternatívu Peregrinovej formulácie problému realizmu, je nutné rozlíšiť pozície tri.

2.1 Historický pohľad na úlohy reprezentačných nástrojov

Matematika nemá jeden homogénny jazyk, ale práve naopak, obsahuje celý súbor odlišných jazykov. Pritom štandardný historický scenár vývoja určitej disciplíny (napr. algebry) je nasledovný:

Štádium A – máme určitý jazyk, v našom prípade *jazyk aritmetiky*, o ktorom predpokladáme, že je ontologickým jazykom opisujúcim „aritmetické slony", čo sú v tomto prípade prirodzené čísla. Zrodí sa nový teoretický jazyk, *jazyk algebry*, ktorý spočiatku chápeme v slabom zmysle ako *deskriptívny* nástroj, ktorý sprostredkúva prístup k „aritmetickým baktériám". Sú to objekty konštituované v ontologickom jazyku aritmetiky (sú rovnako reálne ako „slony", t. j. prirodzené čísla), ktoré by sme ale bez „algebraického mikroskopu" nevideli. Napríklad v jazyku aritmetiky možno formulovať úlohu vedúcu na rovnicu tretieho stupňa, ktorej korene aritmetika nevie nájsť. Keď tieto korene („aritmetické baktérie") nájdeme pomocou algebraických metód, vidíme, že sú to čísla, teda objekty rovnakého druhu ako „slony".

Štádium B – niekedy sa stáva (a v dejinách matematiky je to skôr pravidlo než výnimka), že „mikroskop" ukáže niečo, čo nie je možné do „sveta slonov" zaradiť, niečo, čo by vo „svete slonov" vôbec nemohlo existovať.[10] V prípade *„algebraického mikroskopu"* to boli komplexné čísla. Tie určite nemôžu existovať vo svete aritmetických „slonov" (kde každý „slon" je väčší, rovný alebo menší ako nula, komplexné čísla sa však nedajú usporiadať – túto čudnú vlastnosť komplexných čísel objavil Euler, a preto ich nazýval neskutočnými číslami). Dlho sa držalo presvedčenie, že skutočné sú iba reálne čísla. Roku 1799 Gauss vytvoril model komplexných čísel, vďaka ktorému sa tieto objekty uznali za skutočné. Takto sa *jazyk algebry* stáva *konštitutívnym* pre nový druh objektov, ktorých opisy nie je možné preložiť do ontologického jazyka aritmetiky. Jazyk algebry je silnejší než jazyk aritmetiky. Každý term

[10] Jednou z úloh matematiky je umožniť prístup k zložitým objektom, ako sú fraktály či chaos. Filozofi matematiku často trivializujú. Niektorí tým, že sa obmedzia na diskusiu banalít typu 7 + 5 = 12 a vyhnú sa zložitým príkladom. Iní matematiku trivializujú tým, že ju zbavia jej otvorenosti a uväznia ju do svojvoľne zvolených medzí (logiky), kde už od nej neočakávajú nič zásadne nové.

slabšieho jazyka je termom aj v silnejšom jazyku, ale nie naopak. Preto aj v novom jazyku existujú „aritmetické slony“, ale okrem nich existujú aj „jednorožce“ (komplexné čísla). To je dôvod, prečo sa nemôžem rozhodnúť pre jednu z Peregrinových interpretácií (slabšiu alebo silnejšiu) toho, ako nástroje konštituujú matematickú realitu. Obe opisujú relevantné prípady a rozhodnutie v prospech jednej z nich je rozhodnutím sa pre časť. Filozofia by však mala rešpektovať celok.

Štádium C – po čase sa zrodil ešte „divokejší“ jazyk, v našom príklade to bol diferenciálny a integrálny počet. Krátko po jeho vzniku Berkeley v spise *The Analyst* vystúpil s jeho kritikou. Vtedy Lagrangea napadlo založiť diferenciálny a integrálny počet na algebraických základoch. Diferenciály interpretoval ako výrazy analogické symbolu x v algebre a našiel súbor pravidiel pre prácu s nimi. Funkcie stotožnil s ich Taylorovými radmi a našiel pre ne súbor pravidiel analogický pravidlám pre manipuláciu s polynómami. Diferenciálny a integrálny počet tak poňal ako určité rozšírenie algebry. Tu *jazyk algebry* dostal novú úlohu – úlohu *fundovať* rodiaci sa jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu, úlohu stať sa preň ontologickým jazykom. Pritom na to, že aj jazyk algebry je problematický, sa akosi pozabudlo. Veď je tu jazyk, ktorého problémy sú omnoho naliehavejšie než problémy algebry. Pomocou komplexných čísel rozhodne nevznikali také absurdnosti, na aké upozornil Berkeley.

Vidíme, že tri funkcie jazyka – deskriptívna, konštitutívna a fundačná – reálne existujú. Nie sú to alternatívy, medzi ktorými by sme sa mali rozhodovať. Viažu sa skôr na rôzne etapy rozvoja disciplíny zviazanej s daným jazykom. Každý reprezentačný nástroj najprv slúži na opis objektov, ktorých existenciu zaručuje iný nástroj. Potom prinesie vlastné objekty, ktorými obohatí matematické univerzum, a nakoniec môže prebrať úlohu pri vytváraní ontologickej bázy pre ďalšiu disciplínu.

2.2 Platonizmus a jeho príbuzní

V stati „Matematika a skúsenosť“ som načrtol rôzne redukcionistické projekty v dejinách matematiky od „aritmeticizmu“ a „algebraizmu“ cez „analyticizmus“ a „logicizmus“ až po „algoritmicizmus“ (Kvasz 2009, 169-172). Cieľom náčrtu bolo ukázať, že logicizmus ani zďaleka nebol prvým pokusom redukovať celú matematiku na jediný reprezentačný rámec. Usiloval som sa ukázať, že redukcionistické programy sa prirodzeným spôsobom viažu na reprezentačné nástroje a sú artikuláciou skúsenosti s nárastom logickej, expresívnej a integratívnej sily jazyka, ktorú nový nástroj spravidla prináša.

Analogicky možno argumentovať, že nielen redukcionizmus, ale aj hlavné realistické pozície vo filozofii matematiky – od pytagoreizmu a platonizmu po Fregeho a Maddyovej realizmus, sú úzko zviazané s reprezentačnými nástrojmi. Tu sa už nedarí ku každému nástroju nájsť zodpovedajúcu formu realizmu, napriek tomu je evidencia dostatočne bohatá. Pytagorejské presvedčenie, že podstatou sveta je harmónia protikladov vyjadrená pomerom čísel, možno označiť ako *A-realizmus*, kde A znamená aritmetický. Platonizmus možno vyložiť ako *G-realizmus*, kde G je geometrický, lebo svet ideí silne pripomína geometrický svet – či už v tom, že ich oba nazeráme, alebo v tom, akým spôsobom majú účasť na reálnych objektoch. Fregeho realizmus je *L-realizmom*, kde L je logický a Maddyovej realizmus možno označiť ako *M-realizmus*, kde M znamená množinový. Tento zoznam si nenárokuje na úplnosť. Chce iba upozorniť na skutočnosť, že realistické výklady sú v matematike spojené s tým, že určitý *reprezentačný nástroj* (elementárna aritmetika, syntetická geometria, predikátový počet, teória množín) *preberá fundačnú úlohu* voči matematike ako celku.

Je zaujímavé uvedomiť si, že algebra ani matematická analýza nevytvorili vlastné formy realizmu. Teda v *ontologickej rovine* nechceli vytvoriť základy pre celú matematiku. V *epistemologickej rovine* však obe vytvorili redukcionistické programy. Napríklad, Francois Viète v knihe *In Artem Analyticam Isagoge* vyslovil presvedčenie, že jeho metóda umožní vyriešiť všetky problémy, a teda celú matematiku bude možné redukovať na algebraické postupy. Inštrumentálny realizmus dokáže tento rozdiel vysvetliť. Epistemologická redukcia sa týka *deskriptívnej úlohy* jazyka a spája sa preto so skorším obdobím rozvoja disciplíny. Ontologická redukcia sa týka *fundačnej úlohy* jazyka a algebra ešte nedospela do štádia, kedy by predložila fundačný program pre celú matematiku. Bourbakiho projekt možno do určitej miery za niečo také pokladať, aj keď Bourbaki neartikuloval filozofické pozadie svojej pozície. Nech je to však s Bourbakiho pozíciou akokoľvek, inštrumentálny realizmus predpovedá, že viac reprezentačných nástrojov by malo dospieť k redukcionistickým programom skôr v epistemologickej než ontologickej rovine, a historická evidencia túto predpoveď potvrdzuje.

2.3 Pohľad na matematiku ako konglomerát reprezentačných nástrojov

Prvé dva reprezentačné nástroje matematiky tvoria *elementárna aritmetika* a *syntetická geometria*. Obe sú spojené s bežným svetom, ich ontologickým jazykom je bežný jazyk. Po tom, ako sa tieto nástroje konštituujú a stabilizujú vo forme Euklidových *Základov*, nastupuje *dynamika re-prezentácií* (Kvasz 2008, 14 – 84) od *algebry, analytickej geometrie, infinitezimálneho počtu* a *iteratívnej geometrie* až po *formálnu logiku, teóriu množín* a *teóriu algoritmov*. Pritom každý z týchto nových reprezentačných nástrojov začína najprv ako *deskriptívny nástroj* umožňujúci lepšie skúmať „baktérie" patriace do univerza konštituovaného predchádzajúcim nástrojom. Al Chwárizmí vymyslel algebru ako pomôcku na riešenie úloh o číslach („aritmetických slonoch"), Descartes vymyslel analytickú geometriu ako pomôcku na riešenie úloh syntetickej geometrie, Leibniz a Newton dospeli k diferenciálnemu a integrálnemu počtu ako nástroju na riešenie problémov kvadratúr a kubatúr atď. Spočiatku teda fungujú reprezentačné nástroje v duchu prvej Peregrinovej alternatívy a ponúkajú iba lepší prístup k objektom, ktoré existujú aj nezávisle od nich.

Po čase však každý z uvedených nástrojov priniesol objekty nového druhu, ktoré v rámci starého univerza neexistovali. *Algebra* priniesla komplexné čísla (kvaternióny, alternujúcu grupu A_5, moduly, konečné polia,…), *analytická geometria* priniesla rad nových kriviek, ktoré sa prostriedkami jazyka syntetickej geometrie nedajú ani len definovať, *diferenciálny a integrálny počet* priniesol celý rad transcendentných čísel, počínajúc číslom e, cez Liouvillovo číslo *l* (prvé číslo, o ktorom sa podarilo dokázať, že je transcendentné), *iteratívna geometria* priniesla rad objektov, ktoré dnes označujeme spoločným názvom fraktály a pre ktoré však v univerze analytickej geometrie niet miesta atď. Po určitom čase plnom neistôt a váhania sa týmto objektom prizná legitímne miesto v univerze matematiky, čím príslušný reprezentačný nástroj preberá *konštitutívnu úlohu* presne v duchu druhej z Peregrinových alternatív a podieľa sa neredukovateľným spôsobom na existencii týchto objektov.

Vývoj tu však nekončí. Po čase si matematici do tej miery zvyknú na určitý reprezentačný nástroj, že ho začnú používať vo *fundačnej úlohe*, a objekty, ktorých existencia bola pôvodne daná nezávisle od príslušného nástroja, začínajú zavádzať v jeho rámci. Napríklad na celé čísla sa začína hľadieť cez prizmu algebry ako na komutatívny okruh s jednotkou – celé čísla tak prestávajú byť základnou matematickou realitou a stávajú sa jednou špeciálnou algebraickou štruktúrou. Podobne analytická geometria prestane vnímať priamky ako primitívne objekty geometrie a začne sa na ne pozerať ako na špeciálne krivky zadané lineárnymi rovnicami.

Jazyk matematiky, presnejšie rôzne jeho fragmenty, neustále hrajú tieto tri úlohy – *deskriptívnu*, *konštitutívnu* a *fundačnú*. Občas sa vyskytnú jedinci, ktorým z neznámych príčin toto bohatstvo mentálne nevyhovuje a chcú matematiku redukovať na jednu z týchto úloh. Na jednej strane stoja empirici, ktorí popierajú konštitutívnu a fundačnú úlohu jazyka matematiky (lebo tie zverili svojim protežantom – bežnému jazyku, jazyku fyziky alebo jazyku zmyslových vnemov) a priznávajú jej iba *deskriptívnu úlohu*. Na druhej strane stoja fundacionalisti ako logicisti alebo množinovo teoretickí realisti typu Maddyovej, ktorí zvolia jeden fragment systému jazykov matematiky, ten prehlásia za základný a všetky ostatné sa usilujú z neho odvodiť, čím sa obmedzujú na jeho *fundačnú úlohu*. Inštrumentálnym realizmom rozumiem pozíciu, ktorá zastáva nasledovné tézy:

- jazyk matematiky predstavuje *neredukovateľnú pluralitu* reprezentačných nástrojov;
- tieto nástroje vystupujú voči sebe navzájom v *deskriptívnej, konštitutívnej a fundačnej* roli;
- žiadna z týchto rolí nie je redukovateľná na ostatné a spolu zakladajú *matematickú realitu*;
- matematická realita nie je jazykom iba opisovaná – *neplatí platonizmus*;
- matematická realita nie je jazykom iba konštituovaná – *neplatí konštruktivizmus*;
- matematická realita nie je jazykom iba fundovaná – *neplatí logicizmus či množinový realizmus*.

Svojimi spodnými poschodiami (jazykom aritmetiky a syntetickej geometrie) je matematika zakotvená v prirodzenom svete. Medzi jednotlivými jej fragmentmi dochádza k prekladu dostatočne vernému na to, aby sa realistický obsah „prečerpal“ aj do vyšších poschodí.[11] Na-

[11] Tu niekde treba hľadať odpoveď na Benacerrafovu dilemu, podľa ktorej realistické výklady matematiky nedokážu objasniť, ako poznávame matematické objekty, kým formalistické výklady matematiky zas nedokážu objasniť, čo robí tvrdenia matematiky pravdivými. Podľa mňa riešenie tejto

príklad algebra verne opisuje určitú, od nej nezávislú realitu číselných vzťahov. Preto hovorím o *realizme*. Tento realizmus nie je *naturalizovaným* realizmom, neupredností̌uje biologickú výbavu našich tiel, ale je *inštrumentálnym* realizmom. Kontakt s realitou zveruje reprezentačným nástrojom. Matematickú realitu tvoria stabilizované obsahy inštrumentálnych reprezentácií. Naturalizmus nie je od tejto pozície až taký vzdialený, iba namiesto *lingvistických* nástrojov používa „*bielkovinové*" nástroje, akými sú očná guľa či chuťové poháriky. Dôležitosť bielkovinových nástrojov nepopieram, preto má moja pozícia s Peregrinovou mnoho spoločné. Nevidím však dôvod bielkovinové nástroje uprednostňovať, a preto mi je celý naturalizmus cudzí.

3 Realizmus rozlíšení verzus realizmus výplní

Blok, ktorý bráni prisúdiť objektom matematiky reálnu existenciu, je pravdepodobne psychologického charakteru. Ontológie možno rozdeliť do dvoch skupín: ontológie výplní a ontológie rozlíšení.[12] *Ontológie výplní* prisudzujú status skutočnosti určitej látke či substancii, ktorá je nositeľom vlastností. K tomuto prístupu zvádza sémantika bežného jazyka. Je prirodzené myslieť si, že stôl je reálny preto, lebo je vyrobený z dreva, a všetko ostatné, čo je reálne, je reálne podobným spôsobom, iba namiesto dreva je tam niečo iné. Takto je *nositeľom skutočnosti určitá látka*. Táto predstava stála pri zrode filozofie u Tálesa, tiahne sa cez Aristotela až po súčasnosť.

Druhú pozíciu predstavujú *ontológie rozlíšení*, podľa ktorých skutočnosť nemusí mať substrát, lebo *reálne sú rozlíšenia, a nie výplne*. Táto predstava sa zrodila v pytagoreizme a cez Platóna sa tiahne až po súčasnosť. Téza o realite rozlíšení nachádza silnú oporu v histórii fyziky. Napríklad, Fourier odvodil rovnicu vedenia tepla a vychádzal pritom z teórie kalorika. Veril, že podstatou tepelných javov je tok tejto nevážiteľnej substancie a napísal rovnicu popisujúcu šírenie kalorika prostre-

---

dilemy spočíva v tom, že matematika nie je homogénny monolit, ale že sa skladá z radu fragmentov, ktoré majú deskriptívnu, konštitutívnu a fundačnú úlohu voči sebe. Možnosť prekladu medzi týmito fragmentmi zabezpečí prepojenie realistického a formalistického pólu matematiky.

12 Tu sa dostávame na úroveň *objektácií*, čo je tretí typ zmien vo vývine matematiky. Na úrovni idealizácií, re-prezentácií aj objektácií sa jazyk matematiky dostáva do kontaktu s realitou, ale dotýka sa jej iným spôsobom. Väčšina výkladov realizmu sa obmedzuje na jednu z týchto úrovní.

dím. Po čase sa ukázalo, že žiadna substancia typu kalorika neexistuje. Napriek tomu, že kalorikum – chápané ako *substancia* – neexistuje, rovnica vedenia tepla – určitá *črta* charakterizujúca tepelné javy – ostala. Substancie teda prichádzajú a odchádzajú, rozlíšenia trvajú. Keď naše inštrumenty dosiahli určitú presnosť, ďalšie inštrumenty túto presnosť iba zvyšujú.

Každý jazyk, aj ontologický jazyk zavedený v kapitole 3, má určitú „hrubosť" či „zrnitosť", aby som zotrval pri metafore mikroskopu uvedenej Peregrinom. *Hrubosťou či zrnitosťou jazyka rozumiem objektívne medze, ktoré má jeho rozlišovacia schopnosť*. Napríklad, jazyk klasickej mechaniky nedokáže odlíšiť izotermické a adiabatické stláčanie plynu, čo spôsobilo, že Newton vypočítal nesprávnu hodnotu rýchlosti zvuku (Kvasz 2004b). Pre klasickú mechaniku sa zvuk chápaný ako izotermické kmitanie vzduchu a zvuk chápaný ako adiabatické kmitanie vzduchu zlievajú. Jazyk klasickej mechaniky je príliš hrubý na to, aby ich rozlíšil. Nesprávna hodnota rýchlosti zvuku, ktorú Newton dostal, nebola nedostatkom jeho postupu. Newtonov postup bol geniálny, ale jazyk, ktorý používal, bol príliš hrubý. Neschopnosť jazyka opísať určité baktérie je opakujúcim sa motívom v dejinách matematiky a fyziky. *Ontológia výplní je úsilím vyplniť medzery jazyka postulovaním určitej substancie*. Dnes vieme, že tepelné javy sú spôsobené molekulárnym pohybom. Fourierov jazyk nebol schopný opísať molekuly. Tento nedostatok fyzici odstránili postulovaním kalorika. Namiesto toho, aby bolo nutné prejsť k molekulárnym rozlíšeniam, *postulovaním kalorika sa jazyk uzavrel* na makroskopickej úrovni a bolo v ňom možné pracovať.

Pri každom meraní rovnako ako pri každom pohľade naša schopnosť rozlišovať naráža na určité medze. Čo je za týmito medzami jazyk, ktorý je viazaný na príslušné inštrumenty, neumožňuje spoľahlivým spôsobom určiť. Pocity obmedzenosti a neistoty sú nepríjemné, a preto ich odstraňujeme tým, že postulujeme výplň, substanciu, ktorej pomocou „upcháme" medzery, ktorými by to, čo je za horizontom rozlíšenia, mohlo vstupovať do nášho sveta. Postulovanie výplne je často plodné. Výsledky dosiahnuté Fourierom, Maxwellom či Boltzmannom súvisia do veľkej miery s tým, že postulovali kalorikum, éter či atómy s určitými veľmi špeciálnymi vlastnosťami umožňujúcimi odvodiť rovnice, ktoré s ich menom spájame. Problematickosť takého postulovania spočíva v tom, že pri prechode k jazyku s vyššou rozlišovacou schopnosťou sa spravidla ukáže, že príslušné výplne neexistujú. Fourierovo kalorikum sa rozplynulo rovnako ako Maxwellov éter. Naproti tomu Boltzmannove atómy zotrvali vo fyzike až podnes.

Vhodnejšie je pokúsiť sa rozpracovať realizmus na báze ontológie rozlíšení. Podľa tejto koncepcie reálne nie sú výplne (ktorými iba kompenzujeme hrubosť nášho jazyka), ale rozlíšenia, ktoré pomocou jazyka dokážeme dosiahnuť. Napríklad na Fourierovom diele musíme ontologický status pripísať nie kaloriku, ale rovnici vedenia tepla. Kalorikum bolo síce veľmi užitočné, ale bolo predsa len ilúziou, kým rovnica vedenia tepla jednoznačne, jasne a trvalo charakterizovala tepelné procesy a jasne ich odlíšila od procesov elektrických, hydrodynamických a iných. Rozlíšenia, ktoré Fourier pomocou rovnice vedenia tepla vo svete vytýčil, sú reálnymi rozlíšeniami v tom zmysle, že nech už si tepelné javy predstavujeme ako tok kalorika, neusporiadaný pohyb molekúl alebo ako kvantový proces, nutne dostaneme exponenciálny pád teploty, ktorý táto rovnica predpovedá.

Keď prijmeme názor, že *realistický výklad určitého jazyka spočíva v ukazovaní, že rozlíšenia, ktoré tento jazyk vytyčuje, sú reálne*, potom je možné pokúsiť sa o realistický výklad jazyka matematiky. V duchu časti 2 tejto state to znamená, že tieto rozlíšenia alebo aspoň *dostatočne veľkú časť týchto rozlíšení vieme preložiť do ontického jazyka*. V duchu časti 2.3 to však neznamená nutnosť existencie jediného robustného prekladu. Práve naopak, príslušný preklad tvorí *kaskáda lokálnych prekladov medzi jednotlivými reprezentačnými nástrojmi*. Rozlíšenia, ktoré aritmetika, syntetická geometria, algebra či analytická geometria vytyčujú, sú *skutočné rozlíšenia*. Naše činy a rozhodnutia, pri ktorých sa o tieto rozlíšenia opierame, majú dôsledky. Príslušné rozlíšenia sa premietajú do úspešnosti či neúspešnosti nášho konania. Požiadavku, že realistický výklad matematiky by mal poskytnúť niečo viac, teda že by mal matematickým objektom prisúdiť realitu v zmysle určitej *substancie*, pokladám za neoprávnenú. Neoprávnenú aj preto, lebo fungujúcu substančnú ontológiu nemá ani fyzika.

4 Porovnanie s vybranými koncepciami realizmu v matematike

Súčasná diskusia o realizme v matematike začala prácou Kurta Gödela (Gödel 1947), v ktorej autor zdôraznil význam matematického realizmu pre prácu matematika. Vyslovil presvedčenie, že realizmus môže pomôcť napríklad pri hľadaní nových axióm teórie množín. Gödelovu pozíciu napadol Paul Benacerraf v stati „Mathematical truth“ (Benacerraf 1973), kde upozornil na základný problém, s ktorým sa musí vyrovnať každý realistický výklad matematiky. Tým problémom je *epistemická neprístupnosť abstraktných entít*. Každý, kto tvrdí, že matematika objektívne poznáva nezávislý svet abstraktných entít (nech už nimi rozumie čokoľvek), musí vysvetliť, ako je ľudská myseľ schopná tieto entity poznávať. Predmety okolitého sveta poznávame vďaka ich kauzálnemu pôsobeniu na naše zmysly. Abstraktné entity, ktoré údajne tvoria predmet matematiky, však na naše zmysly kauzálne nepôsobia (abstraktné entity sú „kauzálne inertné“), a tak je záhadou, ako je možné ich poznať. Väčšinu súčasných realistických výkladov matematiky tvoria pokusy o riešenie Benacerrafovho problému. Spomeniem aspoň dva[13] a vyložím ich vzťah k pozícii inštrumentálneho realizmu rozvíjanej v tejto stati: štrukturalizmus a množinový realizmus Penelope Maddyovej.

4.1 Inštrumentálny realizmus a štrukturalizmus

Asi najrozšírenejšou formou realizmu vo filozofii matematiky je štrukturalizmus. Venujú sa mu viaceré monografie (napríklad Resnik 1997 a Shapiro 1997).[14] Inštrumentálny realizmus pripomína štrukturalizmus tým, že opúšťa substančný výklad skutočnosti v prospech realizmu rozlíšení. Zásadnú spriaznenosť inštrumentálneho realizmu so štrukturalizmom nemožno poprieť, aj keď sú tu aj rozdiely súvisiace s historickým horizontom, na ktorom sa inštrumentálny realizmus formuluje.

V prvom rade si musíme uvedomiť, že pojem matematickej štruktúry je pojmom matematiky 20. storočia. Matematici predchádzajúcich storočí tomu, čo robili, nerozumeli ako skúmaniu štruktúr. Štrukturalistické poňatie matematiky sa viaže na určité historické obdobie, je to

---

[13] Štrukturalizmus resp. štrukturálny realizmus je široký prúd, dôležitý aj mimo filozofie matematiky (pozri napríklad Schmidt 2009 a 2010).

[14] Mohli by sme spomenúť rad ďalších pozícií, napríklad pokus Donalda Gilliesa v Gillies (2010), ktorý nadväzuje na realizmus Popperovho sveta 3 (ktorý Gillies nazýva *konštruktívnym platonizmom*) a rozvíja vlastnú pozíciu nazvanú *konštruktívnym aristotelizmom*. Na rozdiel od Poppera, ktorý svoje tri svety od seba oddeľoval, Gillies argumentuje v prospech toho, že sú do seba vnorené.

filozofická reflexia určitej formy jazyka matematiky. Ako možno Kantovu filozofiu geometrie vyložiť ako filozofickú reflexiu *projektívnej formy* (Kvasz 2011), a Poincarého konvencionalizmus ako filozofickú reflexiu *integratívnej formy* (Kvasz 2008, 140 – 143), tak aj štrukturalizmus možno vyložiť ako filozofickú reflexiu *konceptuálnej formy*. Konceptuálna forma jazyka je formou jazyka súčasnej matematiky, preto sa na jej výklad štrukturalizmus hodí. Samozrejme, do tejto formy jazyka je možné preložiť celú matematiku, preto majú štrukturalisti pocit, že vytvorili realistický výklad celej matematiky. V pozadí inštrumentálneho realizmu je však presvedčenie, že každé obdobie v dejinách matematiky – alebo presnejšie každá forma jazyka matematiky – si vyžaduje reflexiu, ktorá berie do úvahy zvláštnosti a obmedzenia danej formy. Keď hovorím o inštrumentálnom realizme, mám na mysli práve úlohu porozumieť ontologickým predpokladom, ktoré matematici spájajú s nimi využívaným jazykom. Pritom chcem ukázať, že nejde iba o heuristické predpoklady (typu kalorika), ale mnohé z týchto ontologických predpokladov sú aj dnes obhájiteľné, a preto bolo oprávnené opierať sa o ne.[15]

Namiesto *ahistorického úsilia* štrukturalizmu pomocou matematiky 20. storočia (teórie štruktúr) porozumieť tomu, čo je predmetom *matematiky ako takej*, sa usilujem pomocou rekonštrukcie jazykového rámca *matematiky danej doby* porozumieť *ontológii matematiky v rôznych obdobiach*. Moderná matematika je jedným z týchto období, preto štrukturalizmus je spojencom (alebo špeciálnym prípadom) inštrumentálneho realizmu. Na rozdiel od štrukturalistov si však inštrumentálny realizmus uvedomuje, že pojem štruktúry sa mohol zrodiť až potom, ako jazyk prebral úlohu konštituovať ontológiu skúmanej oblasti (pomocou existenčných axióm). Matematici predtým, ako Frege zaviedol kvantifikátory, nemohli skúmať štruktúry. Preto štrukturalizmus nemôže

[15] Pri objasňovaní svojej pozície štrukturalisti často hovoria, že číslo 2 je určitý prvok (alebo miesto) v štruktúre **N** všetkých prirodzených čísel. Z hľadiska inštrumentálneho realizmu je tento názor sympatický, lebo číslo 2 ontologicky nevykladá ako určitú substanciu, ale ako určité rozlíšenie (dvojka je to, čo nasleduje po jednotke a predchádza trojku). Na druhej strane si však musíme uvedomiť, že číslo 2 matematici používali mnohé storočia predtým, než vzniklo explicitné uchopenie štruktúry prirodzených čísel (u Dedekinda, Fregeho a Peana). Číslo 2 odpradávna fixuje určité skutočné rozlíšenie, ale až do polovice 19. storočia nebolo možné toto rozlíšenie vyložiť ako prvok štruktúry.

vysvetliť realizmus matematiky 17. či 18. storočia, teda napríklad ani realizmus, ktorý zastával Newton či Euler.[16]

4.2 Inštrumentálny realizmus a množinový realizmus Penelope Maddy

Penelope Maddyová v Maddy (1990) prijala Benacerrafovu výzvu a rozpracovala teóriu, ktorá opisuje, ako je možná, aspoň v prípade malých množín, interakcia ľudskej mysle s množinami, čo sú typické abstraktné objekty modernej matematiky. Jej pozícia vyvolala ostrú kritiku. V stati Kvasz (2010) som uviedol argumenty, ktorých pomocou je možné brániť Maddyovej realizmus. Obrana jej pozície predstavovala vhodnú príležitosť na vyskúšanie niektorých argumentačných stratégií inštrumentálneho realizmu. Aby však nevznikol mylný dojem o nejakej zásadnej spriaznenosti Maddyovej realizmu s realizmom inštrumentálnym, pokladám za dôležité objasniť ich vzájomný vzťah.

Na Maddyovej realizme je príťažlivé to, že je zakotvený v matematickej praxi. Zvolila konkrétny matematický problém – problém výberu nových axióm teórie množín – a pokúsila sa filozofickou analýzou prispieť k jeho riešeniu. Preto si myslím, že stojí za to brániť jej pozíciu. Na druhej strane však jej pozícia trpí podobným nedostatkom ako štrukturalizmus. Maddyová zvolila jednu konkrétnu teóriu súčasnej matematiky – namiesto teórie štruktúr to je tentoraz teória množín – a na nej založila výklad celej matematickej reality. To nie je možné a tvrdí to aj jeden z jej kritikov. Keď stotožnila malé súbory objektov s množinami, stotožnila aritmetickú realitu s jej množinovým prekladom. Preto prvý krok pri obhajobe Maddyovej pozície spočíval v oddelení množinovej reality od reality aritmetickej a v ukázaní, že jej výklad spôsobu poznávania malých súborov objektov nášho okolia je vhodným výkladom spôsobu poznávania *aritmetickej reality*.

Napriek tomuto spoločnému nedostatku má Maddyovej prístup oproti štrukturalizmu jednu základnú výhodu. Štrukturalisti zvolili

---

[16] Nejde tu iba o sentimentálne ohľady historika. Keď sa pozrieme do budúcnosti, je pravdepodobné, že konceptuálna forma jazyka bude prekonaná a pre ontologický výklad objektov novej formy jazyka bude nutné vytvoriť novú filozofickú interpretáciu matematiky. Preto je asi rozumnejšie štrukturalizmus historicky obmedziť. A je možné, že v teórii kategórií sa skutočne zrodila forma jazyka, ktorá prekonáva chápanie matematických objektov ako množinových štruktúr.

ako východisko pri výklade matematickej skutočnosti teóriu štruktúr, teda posledné štádium v procese *objektácií* (predposledné, ak prijmeme teóriu kategórií ako nasledujúce štádium). Naproti tomu berie Maddyová ako východisko pri výklade matematickej reality posledné štádium v procese *re-prezentácií* (predposledné, ak prijmeme teóriu algoritmov ako nasledujúce štádium). Inak povedané, štrukturalizmus zvolil bod na línii *perspektivistická forma, projektívna forma, koordinatívna forma, kompozitívna forma, interpretatívna forma, integratívna forma, konštitutívna forma, konceptuálna forma*. Štrukturalisti matematike teda „rozumejú" v rovine objektácií a cez prizmu jednej konkrétnej formy jazyka. Menovite cez prizmu konceptuálnej formy sa usilujú vyložiť, o čom je matematika. Maddyová naproti tomu zvolila bod na línii *elementárna aritmetika, syntetická geometria, algebra, analytická geometria, diferenciálny a integrálny počet, iteratívna geometria, predikátový počet, teória množín*. V matematike tak uchopuje robustnejšiu dynamiku, dynamiku re-prezentácií. Jej pozícia je preto bližšia k inštrumentálnemu realizmu, vďaka čomu bolo možné inštrumentálny realizmus použiť pri jej obhajobe. Hoci volí ahistoricky a dogmaticky jeden reprezentačný inštrument, predsa len opisuje tú úroveň matematiky, na ktorej operujú inštrumenty. A to je úroveň, na ktorej operuje aj inštrumentálny realizmus (ktorý však na rozdiel od Penelope Maddyovej uvažuje celý rad rôznych inštrumentov v ich historickom kontexte).

Samozrejme, v matematike existujú objektácie rovnako, ako v nej existujú aj re-prezentácie. Preto ako štrukturalizmus tak aj množinovo teoretický realizmus, opisujú niečo skutočné, niečo čo má oporu v matematike samej. Absolutizujú však jedinú objektáciu, respektíve jedinú re-prezentáciu.

5 Záver

Peregrin formuloval sériu námietok týkajúcich sa nejasnosti mojej pozície. Píše:

> Jedna věc je, že pojem ‚symbolické reprezentace' je natolik neprůhledný, že nemůže než celou věc jenom zamlžit. Co z něčeho dělá ‚nástroj symbolické reprezentace'? Zdá se mi, že Kvasz se musí pojmů jako je ‚symbolický' a ‚reprezentace' buďto vzdát, nebo musí velice detailně objasnit, co jimi myslí (což je, obávám se, téma na samostatnou knihu). Ještě podstatnější je to, že charakterizací matematických nástrojů jako ‚nástrojov reprezentácie' už od počátku dává oněm nástrojům, které

> jsou protipólem měřících přístrojů fyziků do vínku jistý pasivní charakter. Zatímco nástroje fyziků jsou něčím, co je se světem často skutečně v aktivní interakci, nástroje matematiků se takhle zdají být něčím dosti odlišným: něčím, co skutečnost jenom odráží. (Peregrin 2010, 75)

Dúfam, že kapitola 2 tento problém objasnila. Asi bolo vhodnejšie namiesto o reprezentačných nástrojoch hovoriť o *deskriptívno-konštitutívno-fundačných nástrojoch*, potom by nevznikol dojem o ich pasívnej úlohe. Spočiatku sú nástroje vytvárané ako nástroje „pasívnej" reprezentácie. „Aktívny" presah, teda to, čomu v Kvasz (2008) hovorím nárast expresívnej sily jazyka, sa prejaví až neskôr, a spravidla ide o neočakávaný vedľajší produkt. Preto dojem, že reprezentačné nástroje sú iba pasívne, je nedorozumením, ktoré vzniklo v dôsledku nešťastne zvolenej terminológie. Nástroje som označil ako reprezentačné, lebo to bol cieľ, s ktorým ich tvorcovia tvorili. To, že priniesli aj niečo nové, čo svojím významom predbehlo ich význam ako nástrojov „pasívnej" reprezentácie, nebolo zamýšľané. Keď sa oslobodíme od tohto nedorozumenia, medzi Peregrinom a mnou nie je spor.

Obávam sa však, že som Peregrina svojou pozíciou neuspokojil. Vyčítal mi, že som sa v stati „Matematika a skúsenosť" rozkročil medzi realizmom a pragmatizmom, a toto rozkročenie mu pripadalo nestabilné. Miesto toho, aby som sa postavil na niektorú stranu, predkladám pokus, ako to rozkročenie stabilizovať. Zdá sa, že každá jednostranná pozícia – či už realizmus alebo pragmatizmus – zjednodušuje obraz matematiky. Samozrejme, je možné tieto pozície rozvíjať a obhajovať a ako každé zjednodušenie aj tieto pozície umožňujú pohotovo a jasne odpovedať na rôzne otázky. Oproti nim je tá moja asi menej zrejmá. Verím však, že sa mi aspoň trocha podarilo zachytiť nesamozrejmosť, komplexnosť a otvorenosť matematiky. A preto by som sa na záver chcel poďakovať Jaroslavovi Peregrinovi za otázky, ktoré mi pomohli ujasniť si mnohé súvislosti realizmu v matematike.

Poďakovanie

Ďakujem za cenné pripomienky Barbore Kamrlovej, Pavlovi Labudovi, Róbertovi Macovi, Petrovi Volekovi, Eugenovi Zeleňákovi a jednému anonymnému recenzentovi. Príspevok je výstupom grantového projektu P401/11/0371 Apriorní, syntetické a analytické od středověku po současnou filozofii, udeleného GAČR na roky 2011-2015 a vznikol v rámci programu Fellowship Jana Evangelisty Purkyně vo Filozofickom ústave AV ČR.

Filosofický ústav AV ČR
Jilská 1
110 00 Praha
Česká republika
ladislavkvasz@gmail.com

LITERATÚRA

BALAGUER, M. (1994): Against (Maddian) naturalized platonism. *Philosophia Mathematica* 2, 97-108.

BENACERRAF, P. (1973): Mathematical truth. *Journal of Philosophy* 70, 661-679.

BENACERRAF, P. – PUTNAM, H. (eds.) (1983): *Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Cambridge UP.

BLOOR, D. (1976): *Knowledge and Social Imagery*. London: Routledge.

FREGE, G. (1884): *Základy aritmetiky*. Preložil P. Balko. Bratislava: Veda 2001.

GILLIES, D. (2010): Informational Realism and World 3. *Knowledge, Technology & Policy* 23, 7-24.

GÖDEL, K. (1947): What is Cantor's continuum problem. In: Benacerraf, P. – Putnam, H. (eds.) 1983, 470-483.

KVASZ, L. (2000): Galileovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. *Filosofický časopis* 48, 373-399.

KVASZ, L. (2001): Descartovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. *Filosofický časopis* 49, 213-240.

KVASZ, L. (2004a): Newtonovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. *Filosofický časopis* 52, 411-440.

KVASZ, L. (2004b): Epistemologické otázky fyziky: od antinómií čistého rozumu k expresívnym medziam jazyka. *Organon F* 4, 362-381.

KVASZ, L. (2004c): How can a Falsified Theory Remain Corroborated? In: Stadler, F. (ed.): *Induction and Deduction in the Sciences*. Kluwer, 263-271.

KVASZ, L. (2006): Transcendencia vo vede a v náboženstve. *Studia Theologica* 8, 1-19.

KVASZ, L. (2007): Kantova filozofia exaktných disciplín a Fregeho argument z veľkých čísel. In: Havlík, V. (ed.): *Meze formalizace, analytičnosti a prostoročasu*. Praha: Filosofia, 129-149.

KVASZ, L. (2008): *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Basel: Birkhäuser Verlag.

KVASZ, L. (2009): Matematika a skúsenosť. *Organon F* 16, 146-182.

KVASZ, L. (2010): Penelope Maddy medzi realizmom a naturalizmom. *Filozofia* 65, 522-537.

KVASZ, L. (2011): Kant's Philosophy of Geometry—On the Road to a Final Assessment. *Philosophia Mathematica* 19, No. 2, 139-166.

MADDY, P. (1990): *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

PEREGRIN, J. (2010): Kvaszova filosofie matematiky mezi platonizmem a naturalizmem. *Organon F* 17, 71-80.

Resnik, M. (1997): *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press.

Schmidt, M. (2009): Tractarian Objects in a Structural Setting. *Organon F* 16, 328-343.

Schmidt, M. (2010): Causation and Structural Realism. *Organon F* 17, 508-521.

Shapiro, S. (1997): *Philosophy of Mathematisc: Structure and Ontology*. New York: Oxford UP.

Weizsäcker, C. F. von (1990): *Zum Weltbild der Physik*. 13. vydanie, Stuttgart: S. Hirzel.