Jak pojmenovat reálné číslo?[1]

Vojtěch Kolman

Universita Karlova, Praha

Abstract: The article deals with Cantor's diagonal argument and its alleged philosophical consequences such as that (1) there are *more* reals than integers and, hence, (2) that some of the reals must be independent of language because the totality of words and sentences is always countable. My claim is that the main flaw of the argument for the existence of non-nameable (hence unrecognizable) objects or truths lies in a very superficial understanding of what a name or representation actually is. The article concludes by offering solutions to some famous semantic paradoxes based on the diagonal construction as corroboration for this claim.

Keywords: continuum, meaningful name, paradox, Cantor, Richard.

V tomto článku bych se chtěl podívat na Cantorův argument pro nespočetnost kontinua, který skrze Cantorovu větu zakládá transfinitní hierarchii nekonečen, a filosofické konsekvence, které se z něho obvykle vyvozují, prototypicky tvrzení o nezávislosti toho, *co je*, na tom, *jak to poznáváme*. Proti němu postavím tezi opačnou, artikulovanou jednak v rámci Fregova obratu k jazyku, jednak v užším rámci matematického konstruktivismu, jehož představitelé coby následovníci Kanta nahlížejí Cantorovu teorii množin jako novou metafyziku, jako něco, co může být třeba i obdivováno, ale k čemu se lze jenom stěží hlásit. Tato diskuse má širší filosofickou hodnotu, spjatou zejména s analytickou filosofií a filosofií jazyka, které se od Frega sebedefinují zejména problémy toho, jak vymezit „jméno“ coby logickou kategorii oproti kategoriím

[1] Tento článek vznikl s podporou grantu P401/10/0146 *Člověk jako normativní tvor* Grantové agentury ČR.

gramatickým na straně jedné, oproti ostatním logickým kategoriím, včetně kategorie určité deskripce, na straně druhé, a jak popsat vztah těchto kategorií k ontologicko-sémantické kategorii předmětu, obecně tedy k tomu, co nazýváme významem.

Páteř článku tvoří postřeh, že existuje významný rozdíl mezi *diagonální konstrukcí*, která jednoduše stojí, jak je, a *diagonálním argumentem*, který připouští další interpretace. Podle té nejrozšířenější z nich diagonální konstrukce ukazuje, že

(1) existuje *více* reálných než přirozených čísel

a že tudíž

(2) některá z reálných čísel musí být nezávislá na jazyce, a tedy nepojmenovaná, ba nepojmenovatelná, protože souhrn všech slov a vět je vždy spočetný.

Většina matematiků bez dalšího tento argument přijímá a reprodukuje, aniž by si uvědomila, že se zde dávno ocitla na širokém a nejistém poli filosofie. Přirozeně je to proto, že mnozí z nich tyto věty chápou jako výraz nějakého jednoduchého matematického faktu, což ale dělá situaci ještě horší z následujícího důvodu: V dlouhé a úctyhodné tradici Platónově, Kantově, Fregově a Wittgensteinově hrála matematika pro svůj nepřímý, komplikovaný vztah k empirickému světu významnou heuristickou roli diskurzu, na němž si lze osvojit, jak delikátní je vztah mezi tzv. realitou (vědeckých faktů) a jejich popisem, a jak zbrklé a neadekvátní je jednoduše předpokládat, že mezi nimi existuje nějaká jednoduchá, předzjednaná korespondence, kterou můžeme pouze odhalovat, ale na niž nemáme *de facto* žádný vliv. Jestliže nyní činíme tentýž předpoklad v rámci matematiky samotné, zahazujeme jednak možnost pochopit, o čem jsou její věty, především ale zcela znehodnocujeme výše zmíněnou filosofickou tradici.

Nám bude Cantorův argument sloužit k tomu, abychom konkrétně nahlédli, že i matematická tvrzení, a skrze ně tedy i tvrzení běžného jazyka a ostatních věd, jsou v nějakém ohledu závislá na deiktických a anaforických odkazech typu „nejmenší číslo, které jsme v počátečním úseku této posloupnosti dosud nezmínili", a tedy vázaná na sadu našich momentálních, situačně podmíněných jazykových praktik, nikoli předem daný svět idejí, empirických objektů či vágně vymezené nazírání, jevení se apod. V duchu pozdního Wittgensteina a možná i Lakatosovy logiky matematického objevu[2] zde pro Cantorův argument předvedeme podrobněji to, co nejprve naznačíme pro Bolzanův důkaz věty o mezihodnotě, totiž že se nejedná o důkaz v obvyklém smyslu „volby“ mezi dvěma základními alternativami „pravdivý“, „nepravdivý“, ale spíše o rozhodnutí pokračovat jistým, specifickým směrem, jenž je jedním z mnoha směrů nepředvídatelných předem. To by mělo narušit představu poznání jako odkrývání předem dané pravdy, nebo i směřování k předem dané pravdě (jako v Popperově konceptu *verisimilitude*), na níž my a naše rozlišení nemají nejmenší vliv. Taková rozhodnutí, která, jak uvidíme, budou v uvažovaných případech vždy nějak souviset s pojmem *funkce*, musí předcházet reálným důkazům reálných faktů, a já chci ukázat, že existují ontologicky jistější způsoby, jak rozvinout diagonální argument do plnohodnotné teorie kontinua, nežli Cantorův vlastní návrh. Nehodláme přitom posuzovat, zda se z hlediska matematického praktika jedná o alternativy schůdné či v tom či onom (teoretickém či praktickém) smyslu rovnocenné. Z filosofického hlediska, které sledujeme, nás zajímá již jejich prostá existence, stejně jako by nás v jiném kontextu zajímala existence alternativních geometrií či aritmetik.

Předem je třeba zdůraznit, že nepopíráme existenci matematických jsoucen, ani nezamítáme ideu, že by mohly být odhaleny analogicky k objevu nového ostrova či živočišného druhu, jak Frege slavně argumentoval ve svých *Grundlagen*.[3] Naopak, naším východiskem je tvrzení, že každý způsob dokazování či objevování, včetně těch, na nichž staví přírodní vědy a náš každodenní život, předpokládají netriviální pojem pravdy, pojem toho, co má být odhaleno a dokázáno. Navíc však tvrdíme, že pojmy pravdivosti a skutečnosti nám nejsou bezprostředně dány, jak mají vědci a většina lidí sklony předpokládat, nýbrž jsou podmíněny kognitivními schopnostmi našeho rozumu, jak nás to naučil Kant. Toto pozorování je bází Kantova koperníkovského obratu, jenž byl ve Fregově obratu k jazyku dále ukotven v intersubjektivních strukturách lidské řeči.

Finálním produktem celé expozice bude obecný způsob řešení sémantických paradoxů, modelovaný na případě Wittgensteinova řešení paradoxu Russellova, pro speciální případy paradoxů úzce souvi-

---

2 Lakatos (1976).

3 Frege (1884, §96).

sejícími s diagonálním argumentem a Cantorovou koncepcí kontinua, jmenovitě paradoxy Königova a Richardova typu. Toto řešení spočívá v základním filosofickém postřehu, že jazyk nabývá sémantického obsahu teprve smysluplným použitím, které nelze nahradit teoretickým vyjádřením, protože to ho už coby jazykový akt předpokládá. Jméno se tak ukáže být více nežli jen pouhá syntaktická kategorie, definovaná skrze svůj označující vztah k předem dané ontologické třídě předmětů, jak tvrdí ontologický platonismus, případně rigidností takového označování vůči podobně předzhotovené třídě všech možných světů, jak tvrdí analytická metafyzika.

1 Obrat k jazyku

Začněme stručným zasazením celého problému do historického kontextu. Brouwerovi je právem připisována zásluha za jeho divoký, ale odvážný útok na základy klasické matematiky, včetně mnoha údajně nezpochybnitelných „vědeckých faktů“, jako je vyloučený třetí.[4] Byl to právě jeho důraz na konvenční povahu těchto „faktů“ či, jinými slovy, možnost dělat staré věci jinak, co, jak známo, učinilo mimořádný dojem na Wittgensteina, jenž se pak po Brouwerově přednášce ve Vídni roku 1928 opět vrátil k filosofii. Ne nepodoben Napoleonovi se Brouwer po několika letech příslibů nové revoluce prohlásil nakonec císařem, když nahradil staré, „evidentní“ fakty, novými, „intuitivními“. Tento nepříjemný zvrat, tvrdím, byl důsledkem jeho neochoty brát vážně obrat k jazyku, jak ho započal Frege a rozpracoval Wittgenstein paradoxně také pod Brouwerovým vlivem.

Brouwerovo první selhání lze přitom zpětně stopovat až k dilematu francouzských preintuicionistů,[5] kteří na jednu stranu dokázali sami sebe přesvědčit, že kontinuum jako všechno ve světě (matematiky) musí být jazykově závislé, a tedy spočetné, na druhou se ho zoufale snažili udržet nespočetným, aby zajistili jeho příjemné topologické a metrické vlastnosti. Brouwer tím, že nahradil jazyk jako médium vše-

---

4 Viz Brouwer (1908).

5 Termín „francouzští preintuicionisti“ obvykle odkazuje k Borelovi, Bairovi a Lebesgueovi, kteří v oblasti základů matematiky sdíleli některé konstruktivistické ideje, aniž by je ovšem rozpracovali do nějakého koherentního filosofického systému. K preintuicionistickému dilematu a vztahu preintuicionistů k Brouwerovi srov. van Dalen (1999, 235 nn) a Hesseling (2003, 16).

ho poznání bazální intuicí, toto dilema nejen nevyřešil, ale fakticky ho ještě prohloubil zavedením dvou oddělených typů kontinua, totiž *praktického*, jež je spočetné, v protikladu ke kontinuu *plnému*, *nespočetnému*, jež podle něho nezávisí na jazyce.[6] V důsledku toho přišel zcela vniveč konstruktivní náboj jeho původního přístupu, v tom smyslu, že se jeho pojmy začaly pomalu, ale jistě vymykat intersubjektivní kontrole.

Hilbert, na druhou stranu, přes svou fanatickou a politicky motivovanou reakci na Brouwerův „puč" a Weylovu „zradu",[7] může být (při troše dobré vůle) označen za autora opravdové změny paradigmatu, která skrze jeho původní axiomatickou metodu vedla k tezi, že všechno poznání spočívá na inferenčních základech. V Hilbertových spisech tento argument postupně nabyl pozoruhodnou podobu transcendentální dedukce *sui generis*, začínající slovy: „na počátku byl znak".[8]

Zatím vším jsou v podstatě kantovské motivy, konečnost (*finite Einstellung*)[9] je speciální forma názoru, zajišťující izomorfii myšlení a světa (oba jsou podle Hilberta konečné), a tedy i principiální poznatelnost všeho.[10] To, že matematika jedná o nekonečnu, musí mít finitistické zdůvodnění: jediný prostředek jak zvládnout nekonečno je konečnými prostředky induktivní definice a ohodnocujících pravidel, která mohou a musí mít právě podobu axiomatického systému.

Na tomto (řekněme) holistickém pozadí se zdá být nevyhnutelné, že jsme i v teorii množin a analýze vždy povinni začínat zdánlivě samozřejmými otázkami jako „co je kontinuum?" a „co znamená, že je větší než množina přirozených čísel?" Pak vidíme, že není způsob, jak je zodpovědět (v jazyce), aniž bychom reálná čísla nebo množiny neučinili jazykově závislými, což obnáší popis:

(1) jejich jazykových reprezentací, např. $\lim(a_n)_{n\in N}$ pro $(a_n)_{n\in N}$ Cauchyho posloupnost racionálních čísel,

---

6 Brouwer (1930).

7 Viz Hilbert (1922). Užití revoluční terminologie v souvislosti s Brouwerovým intuicionismem má zajímavý vývoj: První podnět je Weylovo označení Brouwerových aktivit jako revolučních („Brouwer – das ist die Revolution"). Na základě toho hovoří Ramsey (1925) o Brouwerovi a Weylovi jako o bolševické hrozbě („Bolshevik menace"), což mu zase na oplátku vyneslo od Wittgensteina (1984, díl 8, 473) označení buržoazní filosof.

8 Hilbert (1930).

9 Viz Hilbert (1931, 486).

10 Viz Hilbert (1930).

(2) příslušného kontextu výrokových forem, např. $x + y = z$, $x < y$ atd., v nichž mohou být tyto reprezentace intersubstituovány *salva veritate* vzhledem ke

(3) kritériím identity, zvoleným předem, např. $\lim(a_n)_{n\in N} = \lim(b_n)_{n\in N}$ tehdy a jen tehdy, když $\lim(a_n - b_n)_{n\in N} = 0$, kde výraz „lim“ reprezentuje racionální konvergenci.

To je ve zkratce obsah Fregových *Grundlagen*, adaptovaný z přirozených na reálná čísla. V technickém smyslu, vlivně hájeném především Quinem, jsou právě kritéria identity mechanismem zodpovědným za proměnu jména ve jméno něčeho, tj. za fenomén reference. Tak třeba referenční rozdíl <2,4> a 1/2 není dán fyzickou odlišností, ale odlišností použití, explicitně vyjádřenou právě rovnostmi a nerovnostmi.

Jelikož od Weierstrasse chápeme reálná čísla jako posloupnosti čísel racionálních, znamená to, že musíme nejprve vysvětlit pojem *funkce*. Pozoruhodné je, že náš druhý problém, totiž kolik je reálných čísel, nás vrací k téže základní otázce, v důsledku Cantorova rozhodnutí porovnávat velikosti množin prostřednictvím jedno-jednoznačné korespondence jejich prvků. Žádné z těchto rozhodnutí přitom není nijak přirozené nebo po ruce. Naopak, je všeobecně známo, že Cantorův nápad byl zprvu odmítnutý jako kontraintuitivní, v rozporu s Euklidovým, rovněž intuitivním, obecným poznatkem, že celek je větší než část, jenž u nekonečných množin neplatí. Kontinuum zase prošlo velmi delikátním pojmovým vývojem, jenž začal pythagorejskou definicí proporce pomocí střídavého odčítání (*anthyfairésis*), přešel v definici eudoxovskou, pracující s veličinami specifikovatelnými pomocí pravítka a kružítka, v novověku byl nahrazen kartézskou ideou čísla coby kořenu polynomu a dnes obvykle pracujeme s teoriemi posloupností (nebo množin) racionálních čísel, ať již vázaných zákonem nebo zcela volných.[11]

Jelikož je niterná relativita či teoretická závislost pojmu reálného čísla (a pojmů obecně) důležitá pro náš cíl vysvětlení významu Cantorovy věty, dovolím si nyní udělat menší odbočku, v níž osvětlím tuto tezi dvěma příklady slavných a údajně sebevysvětlujícím teorémů.

2 Důkaz a „důkaz“

Prvním příkladem je Bolzanův analytický důkaz *věty o mezihodnotě*, podle níž spojitá funkce s hodnotami opačných znamének někde nabý-

[11] Další detaily viz má kniha Kolman (2008).

vá hodnoty 0, tj. protíná osu x. S tímto důkazem je spjata legenda, podle níž Bolzano tuto mimořádně evidentní větu, kterou by podle dřívějších (dejme tomu Kantových) kritérií nebylo nutné, ba ani možné dokazovat, dokázal analytickým (čistě verbálním) způsobem proto, aby zpevnil metodu, což obnáší především eliminaci nejistého (snad i subjektivního) názoru prostoru a demonstraci toho, že na něm v rozporu s Kantovou filosofií matematika nezávisí. Ačkoli by Bolzano s tímto výkladem svých cílů nejspíš souhlasil, já ho považuji za nešťastný a zavádějící zejména proto, že Bolzano systematicky pracoval s verbálními, nenázornými definicemi Cauchyho střihu. Už jeho známý příklad spojité funkce nederivovatelné v žádném bodě přitom ukázal, že tyto definice mohou mít značně neintuitivní, nenázorné důsledky a věta o mezihodnotě je vlastně jen dalším takovým příkladem, tj. za daných okolností nejenom že není názorná, ale nemusí ani platit: V souladu s dobře známou epsilon-delta definicí je např. funkce

$$f(x) \begin{cases} 1 & \text{když} \quad x^2 < 2 \vee x < 0 \\ -1 & \text{když} \quad x^2 > 2 \wedge x > 0 \end{cases}$$

spojitá na racionální přímce, ačkoli tam evidentně nesplňuje větu o mezihodnotě, protože – řečeno neoficiálně – na ní chybí odmocnina ze 2. Podobný argument platí i pro ostatní ne-cantorovská kontinua, když je, např., druhá odmocnina ze dvou nahrazena odmocninou třetí v případě kontinua eudoxovského a číslem π v případě kontinua kartézského. Podstatou našeho čtení Bolzanova důkazu je proto následující jazykově-pragmatický obrat: není to tak, že by vlastnosti našeho kontinua (svět) určovaly platnost věty o mezihodnotě (teorii), ale naopak, tato věta patří k principům, které určují, jak musí vypadat kontinuum (svět), v němž může platit. Namísto důkazu máme tedy rozhodnutí, jak definovat reálná čísla jistým holistickým způsobem.

K tomu se navíc pojí jeden velmi subtilní detail: Díky Tarskému víme, že teorie reálných čísel, tedy úplného uspořádaného tělesa, je (deduktivně) úplná a rozhodnutelná, jakmile nahradíme druhořádový axiom úplnosti prvořádovým schématem.[12] Avšak rovněž díky Tarskému víme, že tutéž teorii získáme z axiomů uspořádaného tělesa spolu s větou o mezihodnotě formulovanou jako schéma pro polynomy:

$$(\exists x)(p(x) \leq 0) \wedge (\exists x)(p(x) \geq 0) \rightarrow (\exists x)(p(x) = 0).$$

---

[12] Tarski (1948).

Díky Löwenheimově-Skolemově větě má tato teorie spočetný model a nejmenší takovým modelem je ve skutečnosti těleso reálných algebraických čísel, tj. kartézské kontinuum. K tomu, abychom mohli definovat kontinuum, musíme takto učinit další rozhodnutí, totiž co je (přípustná) *funkce*.

Podobné pozorování se nyní týká tzv. *rekurzivního teorému*, jenž byl poprvé dokázán Dedekindem a později Fregem, a zdánlivě tvrdí stejnou samozřejmost jako věta o mezihodnotě, totiž že funkce definovaná obvyklým rekurzivním způsobem, tj. fixováním hodnoty pro 0 a specifikací toho, jak z hodnoty pro x vypočítat hodnotu pro x + 1, *existuje a je nanejvýš jedna*. Rovněž toto tvrzení se zdálo být evidentní a zbytečné dokazovat, protože indukce je „intuitivně" tím nejjednodušším způsobem, jak definovat a dokazovat v aritmetice, a jakýkoli důkaz toho, že funguje, musí být redundantní nebo skončit kruhem. Opět se tedy zdá být nasnadě tvrdit, že podobně, jako se chtěl Bolzano vyhnout v geometrii a analýze názoru *prostoru*, chtěli Frege a Dedekind vyloučit z aritmetiky názor *času*, totiž nahrazením rekurzivních definic, evokujících konstrukce (v čase), prostřednictvím sofistikovaných expresivních a deduktivních prostředků, konkrétně tedy prostředků explicitní definice, které jsou pojmově statické.

To je také do značné míry pravda, zároveň to ale odkazuje na způsob čtení, který považujeme za adekvátnější: Důkaz rekurzivního teorému není v první řadě pokusem, jak postavit Kantovu koncepci aritmetiky na pevný základ, ale především rozhodnutím pěstovat aritmetiku jistým velmi abstraktním způsobem, v němž se určité způsoby pojmotvorby, totiž explicitní definice, prohlásí za kanonické, mající charakter *vlastních jmen*, a jiné, konkrétně definice rekurzivní, za odvozené, jejichž sémantickou správnost je podobně jako u *určitých deskripcí* teprve třeba prokázat. Rekurzivní teorém se přitom pojmem funkce nezabývá přímo, ale odvozeně, skrze problém oprávněnosti určité definice funkce, což nám ale v nějakém ohledu splývá, tj. nemyslíme si, že by šlo úplně oddělit problém toho, co funkce *jsou* a *jak je pojmenováváme*. Specifikem Fregova pojetí funkce, vycházejícím právě z jeho obratu k jazyku, ovšem bylo, že ačkoli funkce sama nemusí mít efektivní, čistě algoritmický charakter, její předpis musí být efektivně, schematicky zadán, což se právě s ohledem na Cantorův argument ukázalo jako potenciálně problematické.

3 Co nám říká diagonální argument?

Minimalistické čtení Cantorova diagonálního argumentu, tak, jak bylo dále rozvinuto v rámci nejlepší konstruktivistické tradice Brouwerovy, Weylovy a Lorenzenovy, lze popsat takto: Máme-li nějaký jednoduchý systém *S* k pojmenovávání funkcí nad přirozenými čísly (tj. jména a identity mezi nimi), jako např. primitivně rekurzivní aritmetiku, lze sestrojit vyčerpávající seznam jejich jmen f_1, f_2, f_3, … a vytvořit jméno $\mathrm{diag}(x) = f_x(x) + 1$ funkce, která mezi nimi z definice není. Tedy, ke každé *schematicky* dané, a proto vyčíslitelné (enumerovatelné) totalitě funkcí existuje funkce, která v jejich seznamu není.[13] Tohle je ovšem všechno, co máme, tj. speciálně nejsme oprávněni říci, že totalita všech funkcí je ne-spočetná, protože (1) „všechny funkce“ znamená „všechny extenze jmen, která bereme v úvahu“. V souladu s naší *interní* definicí není tedy diag funkcí, přinejmenším ne téhož typu, a (2) i kdybychom se z nějakého *externího* důvodu rozhodli ji funkcí nazývat, pak argument ukazuje (nikoli dokazuje) cosi v tom smyslu, že výraz diag transcenduje expresivní možnosti systému *S*, tedy že je původní definice funkce (pro jisté účely) příliš úzká. V nejvstřícnějším čtení se takto Cantorova diagonální konstrukce ukazuje jako preteoretické zdůvodnění liberálnějšího uchopení pojmu funkce.

V teorii rekurze vedlo toto pozorování k zavedení pojmu obecné, resp. částečně rekurzivní funkce. Cantor ale, jako každý metafyzik myslel jednodimenzionálně, tj. začal tím, co mělo být výsledkem definujícího procesu, a proces samotný, tedy užité jazykové prostředky, považoval za podružné. Tím, že uchopil pojem funkce v tom nejliberálnějším vymezení nějaké korespondence, která je jednoznačná vpravo, se navíc domníval vyhrát celou hru na upřesňování pojmu kontinua jednoduchým „fiat“. Později aplikoval tutéž strategii na pojem množiny, když ji popsal jakožto nejobecnější produkt shromažďování objektů, buďto prostřednictvím nějaké vlastnosti, nebo skrze proces zobecněného vyčíslení (množina je to, co lze dobře uspořádat). V tomto případě ale slabina jeho přístupu vyplula rychle napovrch, když se objevily Russellův a jiné paradoxy. Jediná reakce, jíž byl Cantor schopen, bylo označení problematických množin za *nekonzistentní*, což se jako u každé platonistické teorie rovná tvrzení, že existuje to, co existuje, a není to, co není. My ale v dané situaci přirozeně nehledáme tautolo-

[13] Takovouto formulaci Cantorova argumentu lze najít třeba in Lorenzen (1965, 34 – 35).

gie, nýbrž netriviální kritéria, upřesňující, které výrazy (možná jména) se počítají za jména skutečná. A to se právě rovná tvrzení, že musíme začít jazykem.

Těm, kdo stále cítí afinitu ke Cantorovu způsobu myšlení, by mohl otevřít oči následující příměr. Stejně jako definoval Cantor reálné číslo jako *libovolnou* (Cauchyho) posloupnost, mohli Řekové definovat reálné číslo[14] jako bod přímky konstruovatelný libovolnými prostředky nebo jako Gödel říci, že dokazatelné je vše, co je pravdivé. Tím by ale slavné problémy jako kvadratura kruhu, úplná axiomatizovatelnost aritmetiky nebo „Entscheidungsproblem" jednoduše zmizely. Již Archimédes byl totiž schopen ke kruhu daného průměru zkonstruovat úsečku odpovídající jeho obvodu, a jsem přesvědčen, že když vám dám formuli predikátové logiky prvního řádu, budete – při odpovídajícím vzdělání – v konečně mnoha krocích schopni rozhodnout, zda se jedná o tautologii nebo ne. To, co nebudete schopni udělat, bude vyřešit uvedené problémy kanonickou metodou popsanou předem, tj. pravítkem a kružítkem v případě prvním a Turingovým strojem v případě druhém. Ze stejného pozorování pramení i Hilbertův optimizmus v otázce řešitelnosti každého matematického problému, který trval i po objevu Gödelových vět, tj. určitě jimi nebyl znehodnocen, ale upřesněn: axiomatizovat aritmetiku se nám nepodaří v rámci axiomatických systémů s příliš úzkým (rekurzivním) pojetím efektivity.

Pointa tohoto výkladu je, že nejlepší prostředky, jimiž disponujeme v danou chvíli (pravítko a kružítko, deduktivní důkazové systémy, Turingův stroj a další) spolurozhodují o tom, co je a co není. A jelikož jsou tyto metody tím nejlepším, co máme po ruce v daný moment, jsou také omezené, a tedy (výhledově) nahraditelné. To ale plyne již z jednoduchého faktu, že vysvětlení musí být v nějakém smyslu jednodušší než to, co s jeho pomocí vysvětlujeme.

Co se týče diagonálního argumentu, obecný závěr, předvedený již Wittgensteinem,[15] je relativně přímý: Je nevhodné a matoucí říkat, že existuje *více* reálných čísel než přirozených, když jediné, co *de facto* máme v ruce, je postřeh, že jsou jejich jména užívána různě. Tento vhled se bezesporu nejspíš skrývá i za Brouwerovým raným rozhod-

---

[14] Řekové přirozeně nedisponovali pojmem reálného čísla, ani neztotožňovali proporce, tj. poměry veličin, s body na přímce, což je teprve zásluha Descartova, pro naše účely je ale tato ahistorická mluva uspokojivá.

[15] Wittgenstein (1956, 132).

nutím specifikovat kontinuum jako *spočetně nedokončené*[16] v tom smyslu, že pod hrozbou paradoxu nemůže tvořit uzavřenou, schematicky danou totalitu. Není statické, ale svobodně rozvinutelné mnoha směry, jež závisí na fázích definovaných dříve. Jelikož každá z těchto fází je evidentně spočetná, je spočetný i celý systém, tentokráte ale v jiném, nedokončeném smyslu. Opuštěn Brouwerem tento koncept kontinua rozpracoval Lorenzen v jeho operativní matematice.[17] Výhoda tohoto přístupu je, že nečiní kontinuum nezávislé na jazyku obecně, ale jen na jazycích vymezených příliš úzce, jako např. ve Fregových *Grundgesetze*[18] či v teorii rekurze.

4 Rekurzivní analýza

Pozoruhodné je, že i v případě těchto omezených jazyků je možné zavést smysluplnou koncepci kontinua, která je v souladu se „zdravou" částí Cantorova argumentu. Stačí jen využít skutečnosti, že i schematicky dané nekonečno nemusí být efektivně kontrolovatelné. To je ve skutečnosti rovněž Brouwerův postřeh, na němž založil svůj útok na principy klasické logiky: i když se omezíme na posloupnosti dané zákonem, nemusíme být ještě schopni efektivně rozhodnout, zda jsou dva různé zákony jménem „téže" funkce, nebo ne, jednoduše proto, že jsou příslušné průběhy hodnot nekonečné. Jestliže jej tedy interpretujeme efektivně, pak princip vyloučeného třetího padá.

Brouwer sám ovšem tuto možnost plně nevyužil a záhy vynalezl kontinuum vlastního střihu, ovládané principem „volného výběru". Jeho výběrové posloupnosti, např. ta, generovaná házením kostky, jsou z definice nejen nekontrolovatelné efektivně, ale nekontrolovatelné vůbec.[19] Tento tah výsledně přibližuje Brouwerův základní postoj postoji Cantorovu více, než by si kdokoli z nich byl ochoten přiznat, a naznačuje, že v důsledku mohou být intuicionismus a platonismus dvě strany téže mince, lišící se jen na verbální rovině. V kontrastu s tím je výchozí bod tzv. rekurzivní analýzy podstatně skromnější a také nosnější, co se plauzibility a transparentnosti výsledků týče.

---

16 Viz třeba Brouwer (1907, 149).

17 Lorenzen (1955).

18 Frege (1893/1903).

19 K tomuto tématu srov. Wittgenstein (1964, §179).

Totalita všech *částečně rekurzivních funkcí* je schematicky daná v tom smyslu, že může být generovaná strojem stejným způsobem jako přirozená čísla nebo správně utvořené formule predikátové logiky. Abych byl konkrétnější: Nejprve máme nějaká (jména) počátečních funkcí, totiž

(O) konstantní funkce $O(x) = 0$,
(S) následnické funkce $S(x) = x + 1$, a
(P) projektivních funkcí $f(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ pro každé j takové, že $1 \leq j \leq n$.

Tím máme induktivní bázi. Pak následuje trojí induktivní krok: Máme-li již nějaká (jména) *částečně rekurzivních funkcí*, můžeme z nich další získat

(1) skládáním $f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$,
(2) primitivní rekurzí $f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$, a
(3) minimalizací $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$.

Notace μy znamená, že funkce f má jako hodnotu nejmenší y takové, že $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$; neexistuje-li takové y, zůstává funkce f nedefinována v $(x_1, \ldots, x_n)$. Tatáž definice bez minimalizace vede ke třídě všech *primitivně rekurzivních funkcí*. Ty jsou očividně totální, ale nevyčerpávají „přirozenou“ množinu všech algoritmicky počitatelných funkcí, jak lze demonstrovat např. na tzv. Ackermannově funkci nebo výše uvedenou diagonalizací seznamu $p_1, p_2, \ldots$ všech primitivně rekurzivních funkcí. Výše podaná definice, tj. včetně minimalizace, pokrývá také širší pojem efektivní funkce, a to čistě schematickým způsobem, tj. o tom, zda je výraz názvem takovéto funkce, může rozhodnout stroj. Negativním výsledkem této schematizace je částečnost. Z třídy všech částečně rekurzivních funkcí jsou vyděleny tzv. (*obecně*) *rekurzivní funkce* jako ty, které jsou totální, tj. dodatečnou *sémantickou* podmínkou.

Díky jejich schematické či *syntaktické* charakterizaci lze „vytvořit“ seznam všech částečně rekurzivních funkcí. Tato praktická či preteoretická vyčíslitelnost je dále identifikována s tzv. rekurzivní spočetností či spočetností prostřednictvím rekurzivní funkce, kdy neprázdnou množinu nazveme *rekurzivně spočetnou* tehdy, tvoří-li obor hodnot nějaké obecně rekurzivní funkce. Ve vyčíslení všech částečně rekurzivních funkcí jsou čistě z definice obsaženy všechny obecně rekurzivní funkce, a tvoří tedy rovněž totalitu spočetnou v Cantorově smyslu, v němž je podmnožina spočetné množiny spočetná. Ale v našem algoritmickém, vypočitatelném smyslu, je tato vyčíslitelnost jenom fiktivní, protože neexistuje efektivní způsob, jak oddělit totální funkce od netotálních, přesněji řečeno: rekurzivní funkce jsou (rekurzivně) *nespočetné*.

Zkoumáme-li jádro tohoto teoretického zvratu – proměny absolutní nespočetnosti v nespočetnost rekurzivní –, vidíme, že spočívá v tom, že uspořádání kardinalit je definováno negativně jako neexistence jisté funkce:

> Card(A) < Card(B) tehdy a jen tehdy, když existuje jedno-jednoznačná funkce z A do B, ale *ne* z A na B.

Na první pohled se tedy jedná o jakousi verzi Skolemova paradoxu, jenž přestane být paradoxem, uvědomíme-li si, že to, co je a co není funkcí, není přírodním faktem, ale něčím, co závisí na naší definici. Omezení na rekurzivní funkce navíc dává jistý přirozený smysl, jenž jde zpět k původnímu významu funkce coby algoritmické procedury: nejsem-li něco schopen provést, tak to skutečně neexistuje.

V rámci rekurzivní analýzy můžeme nyní simulovat řadu Cantorových a Brouwerových výsledků na pevném, neontologickém základě. (Rekurzivní) nespočetnost kontinua nemá tentokráte nic do činění s jeho „velikostí“, která je zjevně spočetná v Cantorově smyslu, díky čemuž pak nemůžeme zopakovat jeho argument pro existenci větších a větších kardinalit. Nedostáváme se tak nikdy mimo sféru pojmenovatelných entit.

Co se týče Brouwerových výsledků, máme zde zcela uvěřitelný protějšek k jeho originálním, i když mírně „šíleným“ důkazům vět typu „každá totální funkce na kontinuu je (lokálně) stejnoměrně spojitá“ nebo jeho koroláru, že

> kontinuum je nerozdělitelné, tj. nemůže být (efektivně) rozděleno na dvě neprázdné části.

Rekurzivní alternativou k němu je, možná překvapivě, jedna ze základních vět teorie rekurze, tzv. Riceova věta, ohlašující, že

> každá neprázdná vlastní podmnožina množiny všech částečně rekurzivních funkcí (míněno sjednocení všech ekvivalenčních tříd jejich jmen) je nerozhodnutelná.

Té klasicky odpovídá tvrzení, že

> kontinuum je souvislé, tj. není to sjednocení dvou disjunktních neprázdných otevřených množin,

které se obvykle považuje za teoretickou aproximaci Aristotelova slavného popisu spojitosti jako koincidence hranic dvou věcí, které se dotýkají.[20] Na pozadí variability pojmů, jimiž dnes disponujeme – jako hustota, souvislost, kompaktnost, úplnost (vůči uspořádání a metrice) atd. – to ale nedává žádný smysl. Vidíme jen, že kontinuum či spojitost nejsou něčím bezprostředně daným, v intuici či čisté praxi (jak by řekli následovníci Wittgensteina), ale ztělesňují mix různých teoretických a praktických ohledů a omezení, nepředvídatelných předem.

5 Richardův paradox

Na závěr aplikuji některá z pozorování, která jsem zde o reálných číslech učinil, v širším rámci filosofie jazyka a filosofie vůbec, a to ve vztahu k tzv. sémantickým paradoxům, zvláště těm, které jsou spjaty s reálnými čísly a Cantorovým diagonálním argumentem. Jde mi přitom o obecný vztah výrazu a jeho významu, v našem případě tedy jména k předmětu, který pojmenovává či denotuje, a způsobům, jimiž je tato denotace, obdaření výrazu významem zjednána. V tento okamžik nemám ani tak v úmyslu rozvíjet Wittgensteinovo tvrzení, že je Fregovo ztotožňování významu jména s (abstraktními) objekty – zvláště v oblasti matematiky – zavádějící a nepřípadné, i když s ním rámcově souhlasím, ale jde mi spíše o postřeh, že vztah výrazu a významu nemůže být modelován čistě staticky, po vzoru označování muzejních exponátů štítky, nebo knih katalogizačními signaturami, na jejichž syntaktické formě samotné v nějakém ohledu poznáme, zda denotují či nikoli. Východiskem mi k tomu bude tzv. Richardův paradox:

> Uvažme množinu E všech konečně definovatelných reálných čísel a vytvořme jméno diag aplikací Cantorovy diagonální konstrukce na členy E. Číslo pojmenované diag by nyní mělo být v E, protože diag je konečné, ale na druhou stranu by tam být nemělo, s ohledem na to, jak bylo zkonstruováno.

Má teze je, že kořen těchto antinomií neleží v jejich autoreferenční struktuře nebo něčem podobném, ale právě ve způsobu, jakým se v nich zachází s nevyslovenými předpoklady o pojmenovávání čísel či pojmenovávání obecně, jak to Wittgenstein rozvedl již ve svém *Tractatu*,[21] podle něhož např. Russellův paradox v původní verzi aplikace nějakého pre-

---

[20] Viz třeba Gericke (1984, 107 – 108).

[21] Viz Wittgenstein (1922, §3.323).

dikátu na sebe sama opomíjí, že výskyt téhož typografického znaku ještě neznamená tentýž význam. Ten se projevuje až v různosti užití, např. právě znaku užitého v odkazu k nějakému subjektu a v predikování nějaké vlastnosti. Zdánlivě paradoxní věta

Černý není černý

může být takto rozkódována jako smysluplné upření vlastnosti tmavé pleti osobě jmenující se „Černý“.

V aplikaci na Richardův paradox nejprve celý argument pomocně rozdělím do čtyř kroků:

1) Máme jazyk nad nějakou fixní sadou znaků, řekněme všech znaků nějakého konkrétního psacího stroje.
2) Fixujeme nějaké „abecední“ pořadí těchto znaků, což nám umožní uspořádat v řadu všechny jejich možné konečné posloupnosti.
3) Procházíme tento seznam a vyškrtáváme všechny výrazy, které nedefinují nebo nepopisují reálné číslo.
4) Nakonec dostaneme vyčíslení $(d_n)_{n \in N}$ všech jmen reálných čísel, která jsou k dispozici v daném jazyce, a tím pádem i vyčíslení $(\mathbf{d_n})_{n \in N}$ všech reálných čísel definovatelných tímto způsobem, kdy $\mathbf{d_n}$ (tedy znak tištěný tučně) je to, co je označováno výrazem d_n. Jméno diag:=„diagonální číslo vytvořené k $(d_n)_{n \in N}$“ ale neoznačuje, z definice, žádné z čísel $(\mathbf{d_n})_{n \in N}$, a nemůže být tedy v $(d_n)_{n \in N}$, kam ale, na druhou stranu, patří.

Body 1), 2) se mohou zdát zcela neškodné a neproblematicky akceptovatelné v případě jednoduchých či umělých jazyků. Paradox nicméně svoji sílu čerpá právě z aplikace na jazyk přirozený. Zde si je ale třeba uvědomit, zaprvé, že existuje mnoho přirozených jazyků s mnoha různými abecedami, kdy o žádné z nich nejsme s to říci, že je nejzákladnější či přirozenější než ostatní, a za druhé, že náš jazyk můžeme zcela svobodně a neomezeně rozšiřovat o další znaky, např. @, $, # atd. Tohle není ovšem nijak originální pozorování: Zermelo např. označil za příčinu paradoxu právě myšlenku, že lze každý (matematický) pojem reprezentovat prostřednictvím pevné sady znaků. Podle něho se právě tato teze skrývá za fenoménem skolemismu, tedy preferováním prvořádových jazyků, jak se to od Skolema, ale především Gödela, stalo zvykem.[22] Předpokládejme ale, že nám toto omezení nevadí, tj. že psací stroj pro naše účely postačuje a přejděme k bodu 3.

---

[22] Viz Zermelo (1932, 85 – 88).

Pak je zřejmé, že při průchodu naším seznamem, při němž škrtáme všechny nevhodné výrazy, dříve či později narazíme na výraz diag, neboli diagonální číslo vytvořené k $(d_n)_{n \in N}$.

Paradox vzniká právě proto, že diag vypadá jako jméno čísla definovaného skrze referenci k posloupnosti $(d_n)_{n \in N}$. A tak tomu také je, jakmile je tato posloupnost vytvořena, tj. poté, co byly všechny nepatřičné výrazy vyškrtány. Pointa našeho výkladu spočívá v tom, že podobně jako v případě výrazu „tato kočka" závisí to, zda je výraz diag skutečným jménem, tj. jménem něčeho, na kontextu užití, tedy na presupozici, že se v příslušném (logickém) prostoru nachází nějaká posloupnost (nebo kočka). Jelikož při vytváření posloupnosti $(d_n)_{n \in N}$ tato posloupnost přirozeně ještě neexistuje, výraz diag musí být vyškrtnut, což řeší paradox. Obecnost tohoto řešení, speciálně tedy jeho nezávislost na nějakém jednoduchém vzorci (např. vytvoření nějaké hierarchie jazyků) se stane očividnější, uvědomíme-li si, že např. výrazy jako „padesátý člen posloupnosti $(d_n)_{n \in N}$", které také referují k posloupnosti $(d_n)_{n \in N}$, mohou stále něco znamenat v závislosti na své pozici v původním vyčíslení, tedy předtím nebo poté, co byl nalezen padesátý (či m-tý) člen $(d_n)_{n \in N}$. Důvodem samozřejmě je, že neodkazují k celé posloupnosti $(d_n)_{n \in N}$, ale jen k jejímu konečnému fragmentu.

V našem čtení tedy paradox pramení z toho, že o jménech a smysluplných výrazech uvažujeme příliš zjednodušeně, na bázi jednoduchých syntaktických kritérií. Ale *jméno* není v první řadě *syntaktická*, nýbrž *sémantická* kategorie, je to jméno něčeho, a diagonální argument ukazuje tolik, že otázka existence příslušné reference není často záležitostí čistě povrchových gramatických kritérií, tedy něčím, co může např. ověřit stroj.

6 Závěr

Náš závěrečný argument je přirozeně velmi podobný tomu pro (rekurzivní) nespočetnost rekurzivních funkcí. Tentokráte ale nezpochybňujeme naši (konečnou) schopnost rozpoznat výraz jakožto jméno něčeho (nekonečného co do povahy), ale zpochybňujeme nezávislost reference (významu) výrazu na kontextu, určeném tím, co již bylo a co ještě nebylo definováno. Této indexické kvalitě slov jsme si lehce přivykli v přirozeném jazyce či světě, ale ještě ne ve světě matematiky, jenž je obvykle považován za totálně nezávislý na prostoru a čase coby formami názoru světa prvního.

V rozporu s touto atraktivní, i když povrchní představou jsme ukázali, že můžeme mít zcela plauzibilní teorii kontinua, které ve své formě vždy závisí na tom, co bylo zcela libovolně zkonstruováno dosud, tj. k danému časovému okamžiku. Aby ale nedošlo k nedorozumění, to, co teď říkám, nemá být nic kontroverzního, typu, že matematika spočívá na názoru času nebo je do ní zapotřebí zakomponovat nějakou dynamiku. Právě aby toto podezření nevzniklo, a také pro jistý kontrast, jsme zmínili i konceptuálně statické metody rekurzivní analýzy. Pro to, co jsme se snažili ukázat, je každopádně významné, že v plynoucím světě naší zkušenosti neexistuje nic absolutně stabilního, tj. každá stabilita je vždy jen relativní k našim schopnostem rozpoznání různých věcí jakožto stejných v nějakém ohledu. To, co volá po zodpovězení, je přirozeně otázka, v jakém smyslu jsou věty matematiky stabilnější nežli věty jiných disciplín. Tady nám ale docela dobře poslouží stará dobrá odpověď: matematika je produktem našeho rozumu, a tedy pod jeho výlučnou kontrolou.

Zároveň by mělo být zřejmé, že nemáme nic proti Cantorovu argumentu pro nespočetnost kontinua, ani jeho zobecnění, v němž se argumentuje pro existenci vyšších mohutností. Jen je odmítáme považovat za nutnosti nebo fakta rozumu, s argumentem, že nic takového v absolutním slova smyslu neexistuje. Existují přirozeně relativní nebo transcendentální nutnosti, jako jsou pravdy matematiky vůči pravdám fyziky v Kantově systému, nebo pravdy logiky vůči pravdám matematiky v systému Fregově. Cantorovu teorii množin šlo v její původní, rudimentární podobě topologie reálné osy považovat za *apriori* Weierstrassovy analýzy. Ve formě obecné teorie množin se z ní ale stal jistý druh fikce, zvláště proto, že zůstal nevysvětlen klíčový pojem množiny, tj. není jasné, přes co v ní vlastně kvantifikujeme, na rozdíl např. od (neaxiomatické) aritmetiky, v níž je kvantifikovaný obor vymezen čistě schematicky skrze posloupnost 1, 2, 3, …, či (neaxiomatické) analýzy, v níž nějakým (ne nutně schematickým) způsobem popíšeme, co je reálné číslo. Teorie množin tak ve výsledku, na rozdíl od aritmetiky a (rekurzivní) analýzy, nedisponuje jasným preaxiomatickým pojmem pravdivosti, a je tedy zcela závislá na příslušných axiomatizacích. Tím pádem je dost pravděpodobné, že problémy, jako je hypotéza kontinua, nejsou nerozhodnuté jen k danému okamžiku (jako např. Goldbachova domněnka), ale nerozhodnutelné vůbec, a to nikoli proto, že by toto jejich řešení překračovalo schopnosti lidského rozumu, ale že jsme jednoduše do celé věci neinvestovali tolik, abychom mohli dostat zpět vše, co chceme.

Ústav filosofie a religionistiky
Filozofická fakulta
Karlova universita
Náměstí J. Palacha 2
116 38 Praha 1
Česká republika
vojtech.kolman@ff.cuni.cz

LITERATURA

Brouwer, L. E. J. (1907): *Over de grondslagen der wiskunde*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Brouwer, L. E. J. (1908): Over de onbetrouwebaarheid der logische principes. *Tijdschrift voor wijsbegeerte* 8, 152 – 158.

Brouwer, L. E. J. (1930): *Die Struktur des Kontinuums*. Wien: Gottlob Gistel.

Dalen, D. van (1999): *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer (The Dawning Revolution)*. Oxford: Clarendon Press.

Frege, G. (1893/1903): *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I., II. Bd.* Jena: H. Pohle.

Gericke, H. (1984): *Mathematik in Antike und Orient*. Berlin: Springer.

Hesseling, D. E. (2003): *Gnomes in the Fog. The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*. Basel: Birkhäuser.

Hilbert, D. (1922): Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1, 151 – 165.

Hilbert, D. (1930): Naturerkennen und Logik. *Die Naturwissenschaften* 18, 959 – 963.

Hilbert, D. (1931): Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie. *Mathematische Annalen* 104, 485 – 495.

Kolman, V. (2008): *Filosofie čísla. Základy logiky a matematiky v zrcadle analytické filosofie*. Praha: Filosofia.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lorenzen, P. (1955): *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin: Springer.

Lorenzen, P. (1965): *Differential und Integral*. Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft.

Ramsey, F. (1925): The Foundations of Mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society* 25, 338 – 384.

Tarski, A. (1948): *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Santa Monica, CA: Rand Corporation.

Wittgenstein, L. (1922): *Tractatus logico-philosophicus*. London: Routledge & Kegan Paul.

Wittgenstein, L. (1956): *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Wright, G. H. von, Rhees, R. (eds.). Oxford: Basil Blackwell, citováno podle *Werkausgabe*, díl VI.
Wittgenstein, L. (1964): *Philosophische Bemerkungen / Philosophical Remarks*. Rhees, R. (ed.). Oxford: Blackwell, citováno podle *Werkausgabe*, díl II.
Wittgenstein, L. (1984): *Werkausgabe in 8 Bänden*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
Zermelo, E. (1932): Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 41, 85 – 88.