LOGICISMUS A MODERNÍ LOGIKA

Vojtěch KOLMAN

Reviewing the beginnings and the further development of logicistic idea I am mainly focusing on the tradition of Frege and Russell, i. e. the tradition which was in the closest relationship with the enterprise of modern logic. I am trying to assess its connections to other „logistic" programs such as Dedekind's structuralism or Peano's axiomatism, to underline its specific features and the share in the success of modern logical semantics, including both its substantial contribution and limitations.

Stewart Shapiro ve své knize o logikách vyšších řádů[1] přehledně schematizoval dějiny vzniku moderní logiky, když v ní rozlišil čtyři tradice, z nichž vzešla, a to (1) *algebraickou*, založenou Boolem, rozvinutou De Morganem a Jevonsem, ve svém zenitu pak spjatou se jmény Peirce a Schrödera, (2) *axiomatickou*, která – s kořeny sahajícími až k Euklidovi – byla znovuoživena Dedekindem a Peanem, aby se posléze v Hilbertových rukou stala samostatným programem, dále (3) tradici *logicistickou*, redukující matematiku na logiku, tradici Frega a Russella, k níž možná patří i ranný Wittgenstein,[2] a konečně (4) *teorii množin*, od počátku usilující o to stát se ontologickou bází celé matematiky.

K tomuto rozlišení je ovšem třeba připojit rozličná addenda, která zatím jen letmo načrtnuté hranice zjemní. Začněme první z tradic, tj. algebraickou školou. Ta jako jediná a nejstarší nebyla reakcí na krizi matematických základů, ale vznikla jako rozvinutí Leibnizem anticipované analogie „zákonů myšlení" a „zákonů počítání",[3] ústící v konstrukci kalkulů, počtů, které aplikovány na určité formule matematického či nematematického diskurzu dovolí tyto po vzoru aritmetických algoritmů transformovat na věty jiné a slouží tedy jako nástroj mechanického vyvozování úsudků. Důraz na symbolické metody, tedy vědomí významu funkční notace, sdílí algebraici s ostatními tradicemi, s výjimkou teorie množin, jejíž zakladatel choval vůči „znakové řeči logického kalkulu" značný despekt.[4]

[1] Viz Shapiro (1991), s 175.

[2] Viz třeba §6.2, Wittgenstein (1921)

[3] Srv. Boole (1854), kap. I, §10.

[4] Viz Grattan-Guinness (2000), s 175

ORGANON F **11** (2004), No 3, 243-271

Rozlišit je zde ovšem nutno dvě části symbolického projektu, (i) *expresivní*, usilující o sémanticky plodné zachycení obsahu uvažovaných vět, primárně vět matematiky, a (ii) *deduktivně-algoritmickou*, soustředící se na „efektivní" řešení úloh jistého typu. Obě z nich byly nazývány logickými, a jak tradice boolovská, rozvíjející druhou, tak peanovská, rozvíjející první, tíhly občas k plánům, na jejichž konci se měla matematika ukázat jako pouhá část logiky.[5]

Jak ale Frege při srovnání vlastního logicistického plánu s výše uvedenými poukázal, o logice – přinejmenším v moderním smyslu slova – lze hovořit až tam, kde jsou v součinnosti obě složky,[6] a nepřítomnost explicitních inferenčních pravidel v příspěvcích Peana a Dedekinda na straně jedné, a mělkost sémantické analýzy algebraiků, tradičně nerozlišujících např. mezi subsumpcí (2 je prvočíslo) a podřazením (prvočísla jsou lichá), na straně druhé, problematizuje jejich „logické" programy, aniž by tím samozřejmě došlo ke znehodnocení nesporných – a leckdy ekvivalentních – logických výsledků napříč tradicemi, např. souběžného objevu kvantifikace Fregem (1879), Peircem (1883) a Peanem (1888).

V následujících odstavcích bych se chtěl stručně zamyslet nad tím, (i) jaká byla východiska a specifika logicistické tradice ražené Fregem a Russellem, tedy proudu, který byl v nejužším vztahu s objevem moderní výrokové a predikátové logiky, (ii) v čem souvisel s „logickými" plány ostatních tradic a (iii) jak velký byl jeho podíl na utváření moderní logické sémantiky, tj. v čem k ní zásadně přispěl a v čem se ukázaly být jeho limity.

Leibniz

Leibnizova pověst prvního představitele logicismu je stejně jako u jeho algebraických následovníků z větší části založena na důvěře, kterou vkládal do symbolických metod, jež jako jeden z prvních přesvědčivě hájil vůči karteziánské tradici „jasného a zřetelného" coby subjektivního, psychologického kritéria pravdy a správnosti úsudku. Ke každé pravdě musí podle Leibnize existovat objektivní důvod, proč je pravdivá, a tímto důvodem, tvrdí,

---

[5] Viz Dedekindův úvod k eseji Dedekind (1888) a *mutatis mutandis* Schröderův článek Schröder (1898), s. 149, ovlivněný nejspíš právě Dedekindem. Pro podrobnosti srv. Grattan-Guinness (2000), s. 249. Viz také Jevonsovo: „Tvrdím, že algebra je jen vysoce rozvinutá logika a číslo jen logické rozlišení." In Jevons (1879), s. 156

[6] „Leibnizovskými výrazy můžeme říci: Boolova logika je *calculus ratiocinator*, ale žádná lingua characterica, peanovská matematická logika je především *lingua characterica*, a mimoto také *calculus ratiocinator*, zatímco mé pojmové písmo by mělo být rovnocenným spojením obou." Viz Frege (1897), s. 371.

bude nakonec – po řadě syntaktických transformací – logický princip identity, tj. identity predikátu s jedním ze znaků subjektu (grošák, tj. strakatý kůň je kůň). Hlásí-li se Frege v *Begriffsschrift*[7] a posléze v *Grundlagen*[8] k Leibnizovi právem jako ke svému předchůdci, který „rozpoznal přednosti vhodného způsobu notace“[9] a který analogicky tvrdil, že u pravd matematiky je možné jejich převedení na logické pravdy,[10] činil tak vždy s výhradou toho, že Leibnizův plán byl příliš fantastický a nepodložený žádným zdařilým návrhem funkčního kalkulu, aby mohl být považován za něco víc nežli jen inspiraci, čehož názorným dokladem je právě Leibnizův občasný sklon považovat všechny – nejen nutné – pravdy za dokazatelné z identit.[11]

Fregova podoba logicismu je vyjádřena tvrzením, že (základní) věty aritmetiky jsou analytické.[12] Vše tedy závisí na vymezení *analytického*. Kant, od něhož rozdělení vět na analytické a syntetické pochází, definoval analytický soud jako ten, jehož predikát je obsažen v subjektu, tedy jako Leibnizovu logickou identitu (resp. zákon sporu). Narozdíl od Leibnize, pro nějž nutné pravdy, pravdy z rozumu, pravdy předzkušenostní – *apriori* – s pravdami analytickými splývají, a platí tedy rovnice

$$\text{analytické} = \text{apriori},$$

však Kant odmítl vyčerpat všechny nutné pravdy pravdami logiky a vedle analytického apriori rozlišil i *apriori syntetické*, za jehož typický a nezpochybnitelný příklad považoval právě věty matematiky. Jako jeden z cílů svého logicko-matematického díla si Frege zvolil vyvrácení této Kantovy klasifikace.

Je otázka, zda takto formulován je tento problém dnes ještě hoden nějaké vážnější námahy, tj. zda z něho plyne nějaký obecně-filosofický užitek, a vše se nezvrhá spíše jen ve hru s obsahem termínů „logický“, „analytický“, „apriori“ apod. – Jedinou a nejsofistikovanější logikou Kantovy doby byla sylogistika, k matematickým důkazům zcela nevhodná, a připočteme-li k tomu historický fakt, že ani největší logik po Aristotelovi – Leibniz – nedokázal přes četné verbální proklamace reformovat stávající formalismus tak, aby byl na matematiku aplikovatelný, lze předpoklad syntetičnosti matema-

---

[7] Frege (1879).

[8] Frege (1884).

[9] Frege (1879), s. V

[10] Resp že je možné převést všechny nutné pravdy na identity. Viz Frege (1884), §15

[11] Leibniz (1960), s. 204 Dále viz citát in Frege (1884).

[12] Frege (1884), §4.

tiky považovat za dostatečně ospravedlněný. S Fregovým objevem nového, neskonale silnějšího aparátu, se situace pochopitelně změnila, a vše by mohlo končit šťastným porozuměním ve stylu závěrečných slov *Grundlagen*: „Kant zjevně podcenil hodnotu analytických soudů – bezpochyby v důsledku příliš úzkého určení tohoto pojmu, ačkoli se zdá, že mu tanul na mysli zde používaný širší pojem."[13]

K pochopení toho, že se za Fregovou logickou redukcí skrývá víc nežli pouhá redefinice analytického – totiž déle než sto let trvající zápas o nepsychologickou sémantiku – nám poslouží právě jeho zařazení do kontextu cílů a výkonů ostatních tradic, jak to ve své knize o sémantické tradici důvtipně načrtl Alberto Coffa.[14]

Čistý názor

Podstatné pro pochopení Kantovy filosofie je, že v jejím základě nestojí ani tak novověké (Leibnizovo) rozlišení nutných pravd rozumu oproti kontingentním pravdám empirickým,[15] nýbrž mnohem starší rozdíl (1) názorného, *konstruktivního* oproti (2) čistě pojmovému, *diskurzivnímu*.

V antice tento rozdíl přibližně zachycovaly dva důkazové typy, totiž (1') *epagoge*, terminologický předchůdce dnešní indukce (doslova předvedení), spočívající v názorné demonstraci, jak ji známe z Thálétovy metody důkazu překrýváním obrazců či výuky otroka v Platónově Menónovi, a (2') *apagoge*, dnešní dedukce, dříve užívaná ve významu nepřímého – a tedy nenázorného důkazu. Nebylo tomu však tak, že by první byl výhradní doménou matematiky, zatímco druhý logiky – objev nesouměřitelnosti byl např. znám jak ve své podobě epagogické (na pentagramu), tak v apagogické variantě (nechť lze úhlopříčku jednotkového čtverce vyjádřit poměrem dvou nesoudělných celých čísel),[16] z čehož lze především seznat, že dávno před Aristotelem existovala na logice nezávislá praxe matematického – neschematického – důkazu.

Schematické usuzování nebylo také původně nástrojem matematiků, ale sofistů, kteří logických pravidel využívali k vyvozování závěrů nesmysl-

[13] Frege (1884), §88

[14] Viz Coffa (1991)

[15] U Leibnize jsou to *vérités de raisonnement* contra *vérités de fait*, u Huma *relations of ideas* a *matters of fact*

[16] K rozboru antického užití termínů „apagoge" a „epagoge" a jeho porovnání s moderními metodami indukce, dedukce a přímého či nepřímého důkazu srv Fritz (1971).

ných[17] či nějak odporujících běžné zkušenosti (typickými byly argumenty eleatské školy, např. Xenofanův „důkaz" věčnosti boha, Parmenidem zobecněný v proslulý argument pro neexistenci změn.) Již tehdy byl tedy anticipován Brouwerem exponovaný konflikt mezi matematikou jakožto činností *per se*, žijící především z konstrukcí, a logikou, operující výhradně na úrovni pojmů, bez jakéhokoli vztahu ke zkušenosti. V síle důrazu, který na tento rozdíl kladl, je Brouwer Kantovým dědicem.

Kant, jak známo, rozdělil objektivní reprezentace na *pojem* a *názor*, s *rozumem* resp. *smysly* jakožto jejich zdroji. Jak jsme již řekli, narozdíl od Leibnize však nenechal pravdy rozumu, pravdy nutné vyčerpat těmi, které se zakládaly na logice, konkrétně na principu identity (pojmů), jenž nazval *principem analytických soudů*, od nichž pak odlišil na logiku neredukovatelné věty matematiky, které se tak vedle toho, že jsou nutné (apriori), automaticky staly syntetickými. K zásadnímu obratu, upozorňuje Coffa,[18] ale došlo až v další fázi, totiž v hledání a konečném nalezení jednotícího *principu syntetických soudů*.

U empirických soudů, o něž resp. o podmínky jejichž možnosti šlo Kantovi především, nejprve osvíceně usoudil, že mohou vzniknout až spojením obou typů reprezentací – tedy pojmu a názoru.[19] Tím překonal jak radikální empirismus, jenž chce vše pojmové odvodit z konkrétní zkušenosti, tak racionalismus, postupující opačným směrem. Poté však přikročil k následujícímu zobecnění: jsou-li analytické soudy založeny na pouhém srovnání – analýze – pojmů v souladu s principem identity (princip analytických soudů), musí u soudů syntetických přistoupit k pojmu (subjektu) ještě něco jiného (*X*), na čem se ukáže, že predikát, ač v subjektu neobsažen, přece mu náleží.[20] Tuto tezi prohlásil Kant za onen kýžený „nejvyšší princip syntetických soudů" s tím, že úlohu neznámé *X* bude hrát názor. U soudů empirických, tj. syntetických aposteriori, nevznikl problém, byly tu však právě „objevené" soudy syntetické apriori, u nichž je vyloučeno, aby ono bezpodmínečné *X* bylo empirické povahy. – Jako řešení této podivné rovnice Kant postuloval tzv. *čistý názor* (*reine Anschauung, pure intuition*).

[17] Třeba: Tento pes je můj. Tento pes je otec. Ergo. Tento pes je můj otec ; Cos neztratil, máš. Neztratils rohy. Ergo: Máš rohy.

[18] Coffa (1991), s 17-19

[19] Kant (1992), A50/B74

[20] Kant (1992), A8.

Formální a materiální pojmové pravdy

Vyvrácení toho, že něco jako čistý názor, intuice hraje a hrála kdy ve vědě vůbec nějakou roli, bylo podle Coffy od počátku více či méně zřetelným cílem tzv. sémantické tradice a tím i všech jmenovaných proudů, které se podílely na vzniku moderní logiky. Chyba, které se v jejích očích Kant dopustil, spočívala v tom, že za pojmové (analytické) pravdy, pravdy ze znalosti (analýzy) pojmů, považoval jen věty stavějící na znalosti několika málo pojmů logických, jako je např. spojka „a“ ve větě

je-li něco strakaté *a* je-li to kůň, pak je to strakaté,

a zbytek založil na intuici. Je-li ale jednou stránkou logických pravd to, že se opírají o logické pojmy, ptá se výmluvně Coffa, není druhou, komplementární a v otázce čistě pojmových pravd tou relevantnější, že obsah pojmů dalších – a vlastně jejich většiny (kůň, strakatý, ...) – ignorují? Nevyloučil Kant možnost, že by i ostatní nutné pravdy mohly být pravdy pojmové, byť ne založené na logických pravidlech a definicích, nýbrž na onom velkém zůstatku pojmových zdrojů, až příliš rychle? Uvažme motivační příklad:
Pravdivost věty

všichni grošáci jsou strakatí

je založena pouze na definici

x je grošák iff *x* je strakatý a *x* je kůň,

tj. není důvod ji empiricky verifikovat, vlastně ani znát obsah užitých výrazů (strakatý, kůň) – je pouhým důsledkem jazykové konvence, notační zkratky.
Oproti tomu věta

lvi neštěkají, ale řvou

není důsledkem zcela libovolné jazykové konvence, zkušeností ji však jednoduše také falsifikovat nelze – řev určitého lva se v mnoha případech může štěkotu určitého psa podobat více, nežli řvu jiných lvů, přesto tvrzení věty:

tento lev neřve, ale štěká

nedává spíše dobrý smysl, než aby bylo hned nepravdivé. Důvodem pravdivosti takovýchto vět je totiž norma, pravidlo užití jistých (empiricky zavedených) pojmů, které se – narozdíl od prosté definice – nejprve nějak osvědčilo v (napasovalo na) praxi jazykového zvládání světa, kterou lze samozřejmě podle potřeb změnit.

Vybízí se nyní oba typy pojmových vět terminologicky odlišit; následujíce Lorenzena nazývejme první z nich *analytickou formálně*, druhou *analytickou materiálně*.[21] Za lepší příklad druhé z nich nám mohly posloužit např. věty

je-li Praha západně od Pardubic, jsou Pardubice východně od Prahy,

či je-li tento míč červený, nemůže být zelený.

Rovněž zde by působil absurdně ten, kdo by jel tyto „skutečnosti" ověřovat na trať Praha-Pardubice či návštěvou obchodu s malířskými potřebami. K uchopení jejich pravdivosti však nestačí pouze znalost pojmů logických či definic, vztahujících se k jazyku, ale pravidla užití (gramatika) těch pojmů, které slouží k společné orientaci v prostoru a k popisu toho, jak vypadá.

Toto vše samozřejmě neslouží jako argument proti Kantovi, který by mohl snadno oponovat, že ve všech výše uvedených materiálních soudech je nějaká intuice skryta: podstatné bude ukázat, že tam, kde Kant viděl intuici jako nezbytnou a nepochybnou, ji bylo možné nahradit vhodným pojmovým rámcem, zvláště když sama nedokázala být spolehlivým a jednoznačným arbitrem pravdy. Místem, kde „čistý názor" selhal zvláště markantně a kde byla pojmová strategie poprvé úspěšně aplikována, byla matematická analýza.

Konceptualismus

Kalkulus, jedna z nejúspěšnějších matematických disciplín nového věku, byl produktem dvou tradic – ostrovní, založené Newtonem a protkané kinematickými prvky, a kontinentální, Leibnizovy, využívající pojmu nekonečně malého a geometrických příměrů.[22] V době, kdy Kant objevil čistý názor času a prostoru, na nichž jako na škále měla být založena kontrukce aritmetických a geometrických předmětů, se již ale začaly objevovat první příznaky krize – totiž rozličné paradoxy[23] – a také první pokusy o reformu. Tak jako Řekové při první matematické krizi, totiž objevu iracionalit, utekli od aritmetiky

---

[21] Lorenzen (1984), s. 61.; dále Stegmüller (1968), s 292

[22] Např. diferenciál, tedy to co dnes chápeme jako *odhad* přírůstku, definoval Newton jako samotný *přírůstek* proměnné veličiny v čase tak malém, jak je to jen možné; Leibnizův zápis integrálu $\int ydx$ byl míněn doslovně jako suma ($\int$ = s) nekonečně malých obdélníků pod křivkou apod

[23] Např v součtech nekonečných řad jako

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)-\ldots = 0 = 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$$

a s nekonečnem vůbec.

ke geometrii, vyhlásil koncem století Lagrange postup zcela opačný – algebraizaci analýzy. V úvodu k jeho *Méchanique analitique* také nacházíme slavnou větu: „V této knize nenajdete žádné obrazce.“[24] Skutečný krok vpřed na cestě k rigoróznímu kalkulu přineslo s sebou až dílo Bernarda Bolzana. Ten se odpočátku netajil pochybnostmi, zda je pojem „čistého názoru“ vůbec konzistentní, a brzy zasadil jeho zastáncům v analýze těžkou ránu, když popsal spojitou funkci nederivovatelnou v žádném bodě. Tím nejpodstatnějším ale bylo, že důkladnými definicemi (limity, konvergence, ...) dokázal vytvořit dostatečně bohatý pojmový rámec pro bezpečné odvozování teorémů, a to i takových jako je věta o mezihodnotě,[25] které by Kant považoval za nedokazatelné – protože bezprostředně evidentní.

Vytěsnění geometrie prostředky vysoce rozvinuté aritmetiky, na němž se postupně podíleli Cauchy, Weierstrass, Dedekind a Cantor, mělo z hlediska proti-intuicionistické koncepce analýzy jeden nedostatek – a tím byla aritmetika sama. Zbývalo ukázat, že ani ona nepotřebuje jinou nežli pojmovou oporu. V této Coffou navržené perspektivě se nyní postava Gottloba Frega, a s ní i celá logicistická tradice, ukazuje být především dalším, i když zdaleka ne posledním krokem na cestě ke *konceptualizaci* matematiky, či ještě obecněji – na cestě k nepsychologistické sémantice.[26]

Pojmové písmo

Ačkoli Kantova představa o úloze prostorové intuice v důkazu geometrických vět (Euklidovské geometrie) bývá tu a tam akceptována ještě v dnešní době, nelze totéž říci o jeho názorech na postavení času v aritmetice. V matematice bylo dávno před Kantem zvykem hovořit o algebraických metodách jako analytických (Descartova analytická geometrie), zatímco metody geometrické byly označovány jako syntetické. Byl tu však stále vliv britské (kinematické) tradice, od níž se Kant kalkulu naučil, a myšlenka posloupnosti přirozených čísel jakožto konstrukce v čase.

Je tedy zvláště výmluvné – a potvrzující námi sledovaný výklad – , nalézáme-li hned v úvodu Fregovy *Begriffsschrift* problém logické charakterizace pojmu (obecné) posloupnosti v řadě jakožto prubířský kámen a vlastní důvod konstrukce nové logiky, zahrnující plně kalkulizovaný systém predikátové

[24] Viz Grattan-Guinness (2000), s. 16.

[25] Ta říká, že je-li funkce f spojitá na intervalu [a, b], a $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka, pak existuje c z [a, b] takové, že $f(c) = 0$. Viz Bolzano (1817)

[26] Coffovo líčení vývoje moderní sémantiky má ovšem také svoje limity, jimž se však budeme věnovat až v nějakém dalším příspěvku

logiky prvního řádu a fragment logiky řádů vyšších. (Proti)kantovský původ Fregovy motivace je zřejmý: „Když jsem si tedy položil otázku, ke kterému z těchto [tj. analytických či syntetických] dvou druhů aritmetické soudy patří, musel jsem nejprve zkusit, jak daleko se v aritmetice lze dostat pomocí úsudků samých, pouze s oporou v zákonech myšlení, jež jsou nadřazeny všemu ojedinělému. Postupoval jsem tak, že jsem se nejprve pokusil odvodit pojem uspořádání v řadě logickou cestou, abych odtud mohl pokračovat k pojmu čísla. Aby se při tom nemohlo nepozorovaně vetřít nic z názoru, záleželo vše nutně na spojitosti úsudkového řetězce."[27]

Konkrétní problém, který zde Frege líčí, vypadá takto: Máme-li nějakou dvojmístnou relaci R, dejme tomu relaci genetického rodiče, lze na předměty, které pořádá, nahlížet jako na objekty resp. výsledky aplikace (*Anwendung*) dané relace, tj. věta „N je rodičem M" popisuje N jako výsledek aplikace relace „rodič" na M. Uvažme nyní relaci R^*, v níž stojí dva předměty x, y tehdy a jen tehdy, když lze od y dospět k x konečnou iterací relace R na postupně „generované" mezivýsledky. Té se někdy říká *ancestral* relace R, totiž podle jedné z instancí, v níž od relace (genetického) „rodiče" dospíváme k obecné relaci „předka" (ancestor), neboť člověk N se nazývá předkem člověka M, existuje-li konečná posloupnost lidí $x_1, ..., x_n$ ($n \geq 2$) taková, že každí dva její sousedící členové x_i, x_{i+1} jsou spojeni aktem početí ve smyslu $x_i R x_{i+1}$, a platí, že $x_1 = N$, $x_n = M$. Formulí to lze zapsat jako:

$$\exists x_1, ..., x_n(x_1 R x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mathrm{R}\, x_n \wedge x_1 = N \wedge x_n = M),$$

ovšem s poznámkou, že tím N nebyl zachycen jako libovolný předek M, nýbrž jen jako konkrétní pra^{m}předek, tj. předek s konkrétním m (= n-2) počtem „pra". To, že je „N předkem M", nelze zachytit jednou takovouto formulí, ale všemi pro libovolné n, neboť N je očividně předkem M právě tehdy když

> (N je rodičem M) nebo (N je rodičem rodiče M) nebo (N je rodičem rodiče rodiče M) nebo ... .

Fregova otázka – a tím i popisovaný problém – nyní zní:

> Lze pro danou relaci R definovat R^* jedinou logickou formulí?

Prostředky moderní logiky, konkrétně Tarského teorie modelů (která je mj. prvním kvalitativním krokem, jenž logika učinila od doby, kdy ji Frege založil), lze dokázat, že to možné není, tedy omezíme-li se na její prvořádový

[27] Frege (1879), s. IV

fragment. To ovšem Frege neučinil, a definici podal s využitím logiky druhého řádu, způsobem, kterým se v ekvivalentní množinové terminologii definuje tzv. *minimální uzávěr*. Neobyčejná síla Fregova aparátu se tedy zjevila zároveň s jeho zrozením.

Ancestral

Racionale druhořádové definice ancestrální relace není obtížné nahlédnout: Předek osoby M je v souladu s výše uvedeným rozpisem libovolný výsledek aplikace relace „rodiče" na osobu M a osoby (předky) takto získané, jinými slovy: je to prvek množiny, která (1) obsahuje všechny rodiče M, (2) je uzavřena na relaci „rodiče", tj. s každým prvkem, který jí náleží, obsahuje i jeho rodiče a (3) je nejmenší taková, tj. neobsahuje žádné prvky, které by nebyly získány opakovanou aplikací relace „rodiče" na M. Právě této množině se říká minimální uzávěr – v tomto konkrétním případě minimální uzávěr množiny rodičů osoby M na relaci „rodiče". Obecně definujeme:

(α) aR^*b iff $\forall X((\forall x(xRb \rightarrow Xx) \wedge \forall x,y(Xy \wedge xRy \rightarrow Xx)) \rightarrow Xa)$.

Ačkoli je konečný výsledek tentýž, Frege příslušnou legendu podává „intenzionálně" – tj. nehovoří o množinách, ale vlastnostech, které tyto množiny teprve indukují, a také místo termínu předchůdce (předek) používá inverzního termínu následníka (potomka). Výslednou definici pak formuluje ve stylu: b je následník a v R-řadě tehdy a jen tehdy, když má všechny dědičné vlastnosti X v R-řadě, které mají děti osoby a (přímí následníci a, tj. x taková, že aRx), přičemž vlastnost X je dědičná v R-řadě jestliže platí $\forall x,y(Xx \wedge xRy \rightarrow Xy)$.

S definicí ancestralu jakožto základním pojmem teorie řad je Frege nyní schopen dokázat řadu rozličných „nedokazatelných", protože základních principů, jako je např. matematická indukce. Sám na závěr *Grundlagen* uvádí při rekapitulaci výsledků svého analytického programu jako příklad takové „logicky neodvoditelné" věty, u níž se zdál být odkaz k intuici nezbytný, formuli 133 z *Begriffsschrift*:

> je-li R jednoznačná relace (tj. $\forall x,y,z(xRy \wedge xRz \rightarrow y = z)$ a m, n následují v řadě R za a (tj. $aR^*m \wedge aR^*n$), pak platí mR^*n nebo nR^*m nebo $m = n$.

V konkrétní aplikaci na přirozená čísla, která je Fregovým cílem, stačí vyjít (z jinde definovaných) relace bezprostředního číselného následníka S a nuly 0, přejít k relaci S^* (obecného) číselného následníka, kterou lze zapisovat také důvěrným „<" či „≤" ($x \leq y$ iff $xS^*y \vee x = y$), a odtud pak přímo k definici přirozených čísel N:

$$Nx \text{ iff } 0 \leq x$$

coby tzv. nevlastních následníků 0 v S-řadě (tj. následníků, kteří zahrnují 0 samotnou). Princip indukce, totiž

$$X(0) \wedge \forall x,y(Xx \wedge xSy \rightarrow Xy) \rightarrow \forall z(Nz \rightarrow Xz),$$

je pak, jak již bylo řečeno, snadným důsledkem definice ancestralu; a příslušná instance formule 133 tvrdí, že je řada přirozených čísel relací „<" lineárně uspořádána, neboť S přiřazuje každému z čísel nejvýše jedno.

Tyto a mnohé další definice (ancestral) a věty (indukce) jsou obsaženy také v díle představitele druhé z tradic, Richarda Dedekinda, ovšem bez onoho řádného – spojitého a tím i názoru prostého – pojmopisného rozvedení, jak jej Frege prezentuje ve svých *Grundgesetze der Arithmetik*.[28] Teprve tam se z nich stává aritmetický pendant Bolzanovy věty o mezihodnotě, tj. eliminace časového názoru na místo eliminace prostorového.

Pojmový obsah

K interpretaci Frega jakožto představitele konceptualismu, tj. širšího hnutí oponujícího Kantovu „nejvyššímu principu syntetických soudů", nahrává již samotný název jeho pionýrského spisu – *Begriffsschrift*, pojmové písmo. O něm se hned v jeho úvodu dozvídáme, že by „mělo předně sloužit k tomu, aby mohla být platnost úsudkového řetězce přezkoumána tím nejjistějším způsobem a aby každý předpoklad, jenž se chce nepozorovaně vetřít, mohl být předveden, a tím i prozkoumán co do svého původu. Proto jsem také rezignoval na vyjádření všeho, co nemá pro sled úsudků žádný význam. To, na čem mi jediné záleží, jsem v §3 nazval pojmovým obsahem."[29]

Již podle dříve uvedeného mělo být umělé písmo prostředkem vyjádření obsahu; ten je v něm opatřen přívlastkem pojmový a věcně charakterizován jako to, co hraje nějakou roli při usuzování, tj. jako inferenčně relevantní. Z obecně-logického hlediska to můžeme chápat dvěma způsoby, totiž (i) že je to (správná) inference, čehož prostřednictvím je pojmový obsah uchopen, identifikován a (ii) že je to pojmový obsah, na čem se zakládá (správná) inference.

---

[28] Frege (1893).

[29] Frege (1879), s IV.

V §3 má Frege, zdá se, na mysli první z možností, když totiž odmítá tradiční rozlišení subjektu a predikátu právě jako cosi inferenčně irelevantního: věty

Řekové zvítězili u Platají nad Peršany,

Peršané byli poraženi u Platají Řeky

jsou – předpokládá Frege – v rámci premis či závěru libovolného úsudku zaměnitelné při zachování jeho správnosti, přestože se jejich subjekty resp. predikáty liší; ze stejných důvodů ale mají tytéž pojmové obsahy, jinými slovy: takto popsaná inferenční substituovatelnost vět je kritériem identity pojmových obsahů, které vyjadřují.

Každý, kdo četl *Begriffsschrift* jen trochu pozorně, nebo zná na ní založenou logiku, ovšem ví, že Frege myšlenku inferenční artikulovatelnosti významu v této radikální podobě nesledoval ani o krok za uvedený citát resp. že v jeho logice jsou věty (resp. výrazy) rozlišovány jen potud, liší-li se v pravdivostní hodnotě (resp. extenzi), a jemnější rozlišení (Fregův smysl) se uplatní nanejvýš v logicko-filosofické propedeutice. V úsudcích, pro něž je přenos pravdivosti nejen nutným, ale i postačujícím kritériem správnosti, jsou věty stejné pravdivostní hodnoty samozřejmě intersubstituovatelné, nutno však upozornit, že to pokaždé nejsou úsudky, o které by Fregovi šlo, totiž úsudky správné logicky. Ze tří přechodů

(1) Hannibal překročil Alpy / Brutus zabil Caesara

(2) Řekové zvítězili u Platají nad Peršany / Peršané byli poraženi u Platají Řeky

(3) jestliže Kroisos překročil řeku Halys, zničil velikou říši; Kroisos překročil řeku Halys / Kroisos zničil velikou říši

je ve všech přenášena pravda, jen poslední dva si zaslouží název úsudku a pouze ten poslední název úsudku logického. Zbývá vyjasnit na základě čeho, resp. jak a zda vůbec jeho platnost souvisí s pojmovým obsahem. Tím se dostáváme k druhému způsobu chápání vztahu inference a pojmu.

Substituce

Jak již bylo zmíněno, byl to Bernard Bolzano, kdo jako první poukázal na to, že prominentní případy čistě pojmových vět a úsudků, tedy vět a úsudků logických, jsou pravdivé resp. platné na základě toho, že většinu pojmů ignorují. Klíčem k tomu mu byla rovněž substituovatelnost.

To, že jsou věty pravdivé či nepravdivé, uvažuje ve své *Wissenschaftslehre*,[30] je v logice předpokládáno a z hlediska jejich logické platnosti či logických vztahů nezajímavé. (§147, s. 77) Totéž se ovšem nedá říci o tom, co dělá s pravdivostí věty změna některých jejích částí. Necháme-li jejich výběr libovůli (s. 81), zjistíme v mnoha případech, že je takováto věta *obecně platná* relativně k nahrazení částí *i*, *j*, ..., rozuměj: stejně jako ona jsou pravdivé i všechny věty vzniklé nahrazením částí *i*, *j*, ... libovolnými výrazy téhož gramatického typu (s. 82). Podobně definoval Bolzano pojem odvoditelnosti (*Ableitbarkeit*) (§155, s. 114) a slučitelnosti (*Verträglichkeit*) vět (§154, s. 100) relativně k částem *i*, *j*, ..., tak, jak to odpovídá moderní (Tarského) sémantice, založené na teorii modelů, s odpovídajícími pojmy sémantického důsledku (vyplývání) a splnitelnosti. Věta

(B) Kroisos zničil velikou říši

je tedy odvoditelná z vět

(A→B) jestliže Kroisos překročil řeku Halys, zničil velikou říši,

(A) Kroisos překročil Halys

nejen proto, že byl ignorován pojmový obsah vět A a B, ale proto, že byly tyto věty ignorovány úplně, tj. včetně jejich skutečných pravdivostních hodnot. To ostatně odpovídá tomu, co je vtloukáno do hlavy všem adeptům studia logiky v základních kurzech, totiž že je to formální věda, která od obsahu zcela odhlíží. Jak je to tedy s Fregovým pojmovým písmem a jeho snahou o artikulaci obsahu – nejedná se nějaký omyl? Nikoli, a důvody nahlédneme právě v tom, proč Bolzano přes svoji geniální anticipaci Tarského nemůže být považován za zakladatele moderní logiky.

K tomu, že je pojem obecné platnosti třeba relativizovat k určité fixní sadě výrazů, vedl Bolzana postřeh, že jinak by něco jako obecná platnost věty vůbec nemohlo vzniknout, neboť variací různých částí bychom vždy mohli z libovolné věty pravdivé získat nepravdivou a *vice versa*. To má ovšem svou druhou stranu, totiž otázku specifikace těch částí, jejichž gramatické typy být nahrazeny mají, resp. těch, které ne. Bolzano si byl vědom, že logické úsudky jako je náš výše uvedený, jsou platné nejen proto, že jisté obsahy nechávají proměnnými, ale i proto, že jiné fixují – totiž obsahy pojmů logických (§148, s. 84) jako je např. výrokově-logická spojka „jestliže-pak“ ve výše uvedeném úsudku. Vlastní vymezení logických pojmů ovšem nakonec vzdal, protože rozdíl mezi nimi a pojmy jinými „není tak ostře ohraničen, aby se o tom již

[30] Používám Kambartelův výběr s odkazy na původní paginaci, tj. knihu Bolzano (1963).

nedal vésti spor." (s. 84) Nová logika – zahrnující stanovení pevné sady logických konstant a kategorizaci syntaxe, tedy typů výrazů, které mohou být variovány, tj. k jejichž obsahu se nebude přihlížet – musela proto se svým zrodem počkat až na Fregovu *Begriffsschrift*.

Formální vs. pojmové

Bolzano – podobně jako Leibniz veden spíše vědoslovnými nežli reformními zájmy – navrhl ovšem obejít relativizující prvek obecné platnosti svojí verzí definice *analytické* věty jako takové, v níž „existuje alespoň *jedna jediná* představa [část, obsah], kterou lze libovolně variovat, aniž by tím byla porušena její pravdivost či nepravdivost." To na jednu stranu vyhovuje námi již zmíněnému širšímu pojetí (materiální) analytičnosti, takto obsáhnuvší i věty (a úsudky) jako

> jestliže Řekové zvítězili u Platají nad Peršany, pak byli Peršané u Platají poraženi Řeky

> je-li Praha západně od Pardubic, jsou Pardubice východně od Prahy,

pro variabilní „Řekové", „Peršané" resp. „Praha", „Pardubice"; na druhou stranu se zdá být až příliš široké, neboť mu dostanou i „kontingentně" (empiricky) pravdivé obecné výroky jako

> má-li Kvak žábry, neumí mluvit,

zůstane-li proměnlivý jen „Kvak". Možná, že z jistého úhlu pohledu lze i takovéto věty považovat za nutné (ve vztahu k biologickým zákonistostem), sotva však za platné z pouhé znalosti pojmů „žábry" a „mluvit". Svojí definicí se tedy v každém případě „český Leibniz" nebezpečně přiblížil svému německému vzoru, vědomě či nevědomě stírajícímu rozdílu mezi pravdou pojmovou a pravdou prostou.

Stejně jako Bolzano, využil i Frege k zavedení svých nejplodnějších rozlišení a pojmů techniku substituce, a to hned několika způsoby. (1) První z nich jsme již krátce nahlédli, totiž jakožto definující pojmový obsah výrazu *via* jeho substituovatelnost při zachování (salva) určité podmínky, jmenovitě podmínky dobrého úsudku. Tu, jak jsme zmínili, v této konkrétní podobě Frege nakonec nezužitkoval, její varianta *salva veritate* se však (v explicitní podobě tzv. Leibnizova prinicipu) stala regulativem jeho obecně-holistického projektu sémantické konstituce, jak jsem jej již podrobně popsal jinde.[31]

[31] Viz má kniha Kolman (2002a), příp. článek Kolman (2002b).

(2) Druhý způsob odpovídá Bolzanově koncepci „obecné platnosti" jako variovatelnosti některých částí věty. Frege si rovněž uvědomil, že tzv. formální vědy netěží ve zdůvodnění pravdivosti svých vět z pouhé abstrakce, zaměnitelnosti obsahu, ale i z toho, že určitý obsah ponechávají zachován, a v jistém smyslu je tedy jejich „formálnost" relativní: „Stejně jako má geometrie pojem bodu, má i logika své vlastní pojmy a relace a ty také tvoří její obsah. Vůči těmto se nechová formálně. Žádná věda není zcela formální; ale do jisté míry je i gravitační mechanika formální, pokud jsou jí všechny optické a chemické vlastnosti lhostejné. Tělesa různé hmotnosti pro ni zaměnitelná nejsou; ale nic nestojí v cestě zaměnitelnosti těles odlišných vlastností chemických."[32]

Vědomí této relativity mu však nezabránilo v tom, aby zužitkované logické pojmy popsal, a to radikálně novým způsobem, v němž substituce hrála také – tentokráte již třetí – stěžejní roli, totiž při (3) vynálezu kvantifikace.

Kvantifikátor a obecnost

Objev kvantifikace, jak jsem argumentoval jinde, vzešel právě z konfrontace s větami jako byla výše uvedená, tj. v rámci hypotetického soudu s konkrétním ohniskem. Frege se na výraz (Kvak) jisté kategorie (jméno) dívá jako na proměnlivý,[33] implicitní obecnost věty pak vyjadřuje jeho nahrazením proměnnou x a problémy s oborem obecnosti nakonec řeší předepsáním indexované cezury – kvantifikátoru jako

(1) $\forall x$(x má žábry $\rightarrow$ x neumí mluvit).

Takto vyjádřená obecná pravdivost věty ovšem není něčím, co by charakterizovalo analytičnost věty, jak se domníval Bolzano, jinými slovy: nejedná se o větnou obecnost externí, ale interní, v tomto případě význam formotvorného slova, které je pro novou logiku určující. Naopak tautologická věta jako

(2) Kvak má žábry nebo Kvak nemá žábry

není obecná v druhém, ale prvním smyslu tohoto slova, a je velkou chybou dívat se na ní jako na logicky pravdivou díky tomu, že *platí o všech předmětech bez rozdílu*, tj. jako na instanci věty

(3) $\forall x$(x má žábry $\vee$ x nemá žábry),

[32] Frege (1906), s. 428.

[33] Frege (1879), §9.

neboť pak by musela být logicky pravdivá i věta (1).

Tohoto stírání zásadního rozdílu interní a externí obecnosti se ovšem stejně jako Bolzano dopouští i Frege, když totiž přes četné proklamace o odlišné, normativní povaze logiky identifikuje nakonec rozdíl mezi ní a ostatními vědami pouze v odlišném stupni obecnosti, jenž má být u pravd logiky přirozeně tím nejvyšším (jsou to „nejobecnější zákony pravdivosti"). Takováto obecnost, zdá se, ovšem u žádné z vět (1), (2), (3) nenastala, a proto si označení logické pravdy zaslouží až jejich finální „zobecnění":

(4) $\forall x,F(Fx \vee \neg Fx)$

či dokonce

(5) $\forall p(p \vee \neg p)$.

A skutečně, všechny základní zákony pojmového písma jsou v *Begriffsschrift* a *Grundgesetze* uváděny v této plně kvantifikované formě (resp. v ekvivalentním tvaru bez generalizovaných proměnných), přičemž ve větě (5) se proměnná p stejně jako proměnná x z věty (4) vztahuje na všechny předměty, mezi nimiž jsou i hodnoty „Pravda" a „Nepravda". Příslušná logika již z těchto „ideových" důvodů musí pracovat s kvantifikací vyšších řádů a jediným, všeobjímajícím univerzem diskurzu.

Odklon, který od obou, a zvláště pak druhého z těchto rysů Fregova pojmopisu moderní logika ve svém dalším vývoji učinila, lze vysvětlit právě pochopením toho, že rozdíl mezi větami logiky a větami ostatních věd je mnohem zásadnější, kategoriální povahy, nežli se Leibniz, Bolzano, Frege a Russell domnívali. První, kdo na to výrazně upozornil, byl Ludwig Wittgenstein ve svém *Tractatu*.[34] Od něj pak vede trnitá cesta až k Tarského a Carnapově syntakticko-sémantickému vzestupu, s určujícími podněty ze strany tradice algebraické, která ostatně pojem „univerza diskurzu" sama kdysi uvedla v život, a Hilbertovy metamatematiky, zabývající se možnostmi různé interpretovatelnosti téhož (tj. téže „teorie").

[34] Wittgenstein (1921). K tématu vztahu kvantifikace a logické obecnosti tam mj. čteme: „Znakem logické věty *není* obecnost. Vždyť obecný znamená pouze: platící náhodou o všech věcech. Nezobecněná věta může být přece zrovna tak tautologická jako zobecněná." §6.1231 V denících je výmluvná poznámka. „Vzpomeňme si ale, že je to *proměnná*, a *ne* symbol obecnosti, co charakterizuje logiku" Wittgenstein (1979), 11e.

Napříč diskurzy

Věty zapsané v pojmovém písmu, jako třeba věta (1) z předchozího oddílu, jsou samozřejmě stejnými součástmi jazyka jako jejich neformalizované ekvivalenty – s pomocí umělé symboliky jsme se jen pokusili dát explicitně najevo náš závazek k jisté sémantice, s těmito symboly spjaté, a takto normovat běžný a často víceznačný úzus. Podmínky, předcházející tomu, aby mohla být věta jako (1) chápána z pojmopisného pohledu jako smysluplná, jsou ale všechno jen ne triviální: (i) od elementárních vět typu „Kvak má žábry" a „Žbluňk umí mluvit" očekáváme jednoznačnou dvojhodnotovost, a to i (ii) pro všechna nahrazení substituovatelných výrazů „Kvak" či „Žbluňk" výrazem stejného typu. Jen tak lze totiž požadavek dvojhodnotovosti vztáhnout i na samotnou větu (1). Otázkou nyní zůstává, jak je specifikována ona třída výrazů stejného typu, tj. třída substituovatelných výrazů.

Frege si byl samozřejmě vědom toho, že ačkoli se snad z logického hlediska chovají výrazy jako „Žbluňk" a číslovka „399" v rámci vět příslušných diskurzů stejně, nevzniká jejich vzájemným nahrazením ze smysluplné věty opět smysluplná – a to ani v jeho úzkém, idiosynkratickém pojetí smysluplné věty coby výrazu, pro nějž byly formulovány pravdivostní podmínky, jimiž je mu jednoznačně přidělena jedna ze *dvou* pravdivostních hodnot. Rozhodl se ale, že to je z pohledu konstrukce logického systému věc marginální, neboť dodatečně ošetřitelná tak, že se větám jako

Žbluňk je prvočíslo

přiřadí pravdivostní hodnota jednorázovou konvencí, podle níž přípis predikátů a relací předmětům mimo přirozený obor aplikace vyjde jako nepravdivý. Toto opatření, tj. prohlášení všeho, co není pravdivé, automaticky za nepravdivé, je ovšem ve vnitřním rozporu již s jeho dalšími, komplementárními předpoklady, např. totální definovatelností funkcí: věta

Kvak + Žbluňk = 7

musí být totiž nepravdivá pro libovolnou substituci za „7", což znamená, že funkce + není definována na celém diskurzu, neboť dvojici Kvak a Žbluňk nepřiřazuje nic. Důsledky této zdánlivě neškodné konvence lze ovšem sledovat až k Russellovu paradoxu, což si ovšem momentálně ušetříme.

Ospravedlnění obecné platnosti vět jako „$\forall x(x = x)$" či „$\forall p(p \vee \neg p)$" tím, že platí pro všechny předměty, tj. pro předměty všech diskurzů, se navíc zvrhá spíše v argument proti nežli pro jejich sloučení v jediný, neboť se přímo nabízí vzít tuto charakteristiku jako samu definici: věta je obecně platná, jestliže platí ve všech diskurzech. Tato okolnost je dána už tím, že se zde, tj. v případě obecné platnosti věty, nejedná o žádný přirozený fenomén, tj. výsledek prostého pozorování (deskriptivní, „náhodnou" nutnost), ale až důsledek sémantických konvencí („normativní" nutnost), za nichž jsme věty jistého diskurzu označili jako logicky přípustné, konkrétně konvence větné bivalence (dvohodnotovosti) v případě „$\forall p(p \vee \neg p)$" a definice rovnosti jako relace, v níž se předmět nachází pouze sám k sobě, u „$\forall x(x = x)$". Platnost těchto vět, podobně jako třeba věty „2 + 2 = 4", nenecháme jednoduše padnout, najde-li se (jako že se najde) v indefinitní sféře užití a aplikace jazyka věrohodný protipříklad („přišla obutá neobutá", „2 kapky rosy a 2 kapky rosy = 1 kapka rosy", „‚x' je jiný znak (≠) než ‚x'" atd.).

V tomto pozorování má také kořeny Wittgensteinovo vyloučení tautologií ze smysluplných – nějaký rozdíl artikulujících – vět, identifikující je správně jakožto „pouhé" odrazy jazykových norem. I toto rozlišení však stále zůstává – snad vlivem Russellova logického empirismu – jednou nohou v univerzalistické tradici tím, že uznává jediný „pravý", totiž empirický diskurz, v němž jsou nad pevnou bází „jednoduchých předmětů" distribuovány vlastnosti a relace, a to jak v možnosti, tak aktuálně, se stavy věcí resp. fakty jakožto výsledky. Zdá-li se znalcům Wittgensteina toto vysvětlení příliš zjednodušující, budiž, v této podobě jej ovšem (mnohem, mnohem později) vstřebal a zužitkoval Carnap ve své *L*-sémantice.

Věta a její forma

Jádro reformy toho, jak nová logika Fregova a Russellova chápala logickou platnost, spočívá vlastně v tom, že se tato „nevysvětlí" platností pro všechny předměty, ale pro *všechny diskurzy*, disponujícími vždy specifickou sadou jim vlastních objektů, na něž je omezena tzv. objektová proměnná příslušných vět, a tím i její (interní) kvantifikace. Takto se vyhneme problému, co znamená věta „Kvak je prvočíslo", neboť Kvak již nebude v oboru úvahy proměnné x ve větách jako „$\exists x$(x je prvočíslo)" apod. Zůstává ovšem otázka, co znamená, že je tato či věta jako

(1) $\forall x$(x je prvočíslo $\vee$ x není prvočíslo)

platná či neplatná ve všech diskurzech (kontextech). Tato otázka není ale o nic smysluplnější, nežli zkoumání, zda vlastnost prvočíselnosti náleží jiným předmětům než číslům, neboť tato vlastnost se v diskurzech jiných než aritmetických prostě neaplikuje, tj. ne že se jim tam upírá, ona tam vůbec není. Nahrazení výrazu „je prvočíslo" à la Frege kvantifikovanou proměnnou (druhého řádu) např. do podoby „$\forall x \forall F(Fx \vee \neg Fx)$" věc ovšem neřeší, neboť obě proměnné – nechceme-li se vrátit znovu na začátek – se nutně vztahují k nějakému, když už ne k témuž diskurzu jako věta (1).

Podstatné je, že věta jako (1) není obecně platná *via* svůj (veškerý) obsah ale *via* svoji formu, tj. (pouze) obsah tuto formu určujících slov, což znamená, že v jednotlivých diskurzech není pravdivá ona, ale věty *téže formy*. A ani to vlastně není přesné, protože řeč o totožnosti formy je víceznačná. Věta (1) např. sdílí svoji formu jak s větou

(2) $\forall x$(x má žábry $\vee$ x nemá žábry),

tak s větou

(3) $\forall x$(x umí mluvit),

která ovšem tautologická není.

Tuto víceznačnost nyní odstraníme tím, že formu věty začneme reprezentovat výrazy k tomuto účelu vytvořenými, tzv. formulemi, v nichž nahradíme všechny mimologické obsahuplné výrazy zástupnými konstantami, a to (i) výrazy jmenné konstantami c_1, c_2, ... jmennými, (ii) jedno- a vícemístné predikáty (relace) P^n_1, P^n_2, ... konstantami predikátovými (kde $n \geq 1$ je arita predikátu), a konečně (iii) výrazy funkční konstantami f^n_1, f^n_2, ... funktorovými (opět s $n \geq 1$). V řeči *o* formulích budeme dále využívat metajazykových proměnných X_1, X_2, ..., přičemž formuli X s volnou proměnnou x, tzv. formuli *otevřenou*, budeme značit také jako $X(x)$; v řeči o termech použijeme metaproměnné s_1, s_2, ..., pro otevřené termy pak značení $s(x)$. Toto vše zužitkujeme již při induktivní definici formule resp. termu, kdy za (i) elementární term vezmeme objektové proměnné x_1, x_2, ... a všechny jmenné konstanty a (ii) term složený definujeme jako výraz, jenž vznikne zřetězením termů s_1, ..., s_n a funktorové konstanty f^n_i do $f^n_i(s_0, ..., s_n)$. Podobným způsobem budeme postupovat i při definici formule, tj. (i) elemetární formulí nazveme výraz $P^n_i(s_1, ..., s_n)$ vzniklý zřetězením termů s_1, ..., s_n a predikátové konstanty P^n_i a (ii) za složené formule budeme považovat výrazy vzniklé zřetězením formulí X_i, X_j se znaky výrokově logických spojek a kvantifikátoru, přičemž stačí uvažovat spojení $X_i \wedge X_j$, $\neg X$ a $\forall x X(x)$. V posledním z nich se volná proměnná x stala vázanou; formule, v nichž nejsou žádné volné proměnné, nazveme formulemi *uzavřenými*, nebo také *sentencemi*.

O větě jako je (2) nyní můžeme říci, že je případem (instancí) větné formy $\forall x(P^1_i(x) \vee \neg P^1_i(x))$, a jako taková je i tautologická. V tomto užití se lze na větné formy dívat jako na jisté třídy vět, kdy jedna věta může náležet více třídám (nejedná se tedy o třídy ekvivalenční). Třída určená formulí $\forall x(P^1_i(x)$

$\vee \neg P^1_1(x))$ zahrnuje např. všechny věty vzniklé dosazením elementárního jednomístného predikátu „Q“ (např. právě predikátu „prvočíslo“) na místo predikátové konstanty P^1_1. Věta (2) je ovšem prvkem i mnohem obecnější třídy tautologií, totiž třídy určené libovolnou formulí $\forall x(X(x) \vee \neg X(x))$, jíž náleží každá věta získaná uniformním nahrazením všech formálních konstant (tj. jmenných, predikátových, funktorových), skládajících příslušnou formuli $X(x)$, výrazy odpovídajícího typu (tj. jmény, elementárními jedno- a vícemístnými predikáty, elementárními funkčními výrazy). Podíváme-li se tedy nyní obratem na formuli jako na výraz *per se*, tj. samostatný předmět studia, rýsuje se nám tu onen známý proces logické *interpretace*, naplnění bezobsažného symbolu obsahem.

Tarského definice pravdy

Tarského definice pravdy, tedy to, co se dnes všichni adepti studia formální logiky a teorie modelů učí hned v prvních lekcích úvodních kurzů, byla ovšem ve slavné práci *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*[35] prezentována poněkud jinak, než možná indukuje můj dosavadní výklad. Tarski ji, jak známo, začal konfrontací se sémantickými paradoxy, načež se pozastavil u věty

> věta „sníh je bílý“ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když je sníh bílý

coby případu tzv. kritéra adekvátnosti, jemuž by každá definice pravdy měla dostát. Nepoučený čtenář zde může být a nejspíš i bude zmaten z toho, proč je takováto ekvivalence vůbec spojována se slovem „definice“, když, zdá se, každá z jejích stran předpokládá ke svému porozumění tu druhou. Věc je ale složitější: Uvažme nejprve, že u vět komplexní formy, jako „jestliže má Kvak žábry, neumí mluvit“, lze na frázi

> věta „jestliže má Kvak žábry, pak neumí (Kvak) mluvit“ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když je pravdivá věta „Kvak umí mluvit“ nebo když je nepravdivá věta „Kvak má žábry“

pohlížet jako na skutečné vymezení (definici) jejich pravdivostních podmínek, tj. v tomto případě uchopení spojky „jestliže-pak“ coby tzv. materiálního kondicionálu, nevyžadujícího např. žádnou věcnou souvislost spojovaných vět apod.

[35] Tarski (1935), angl. verze otištěna in Tarski (1983).

U elementárních vět je situace odlišná v tom, že tvoří pravou bázi potenciálně nekonečného počtu disciplín a oblastí lidské činnosti, a stanovení globálních kritérií pravdy v této rozmanitosti je prostě nemožné. Formulace jako

věta „Kvak umí mluvit" je pravdivá, když Kvak umí mluvit

či

věta „Kvak umí mluvit" je pravdivá, když předmětu Kvak náleží vlastnost (pojem) umět mluvit

tuto situaci samozřejmě neřeší, druhá však alespoň dává najevo, že se na příslušnou elementární větu díváme jako na sémanticky členěnou, a že prvky této formální sémantiky, tj. metajazyka, v němž chceme hovořit o pravdivosti vět levé strany (v uvozovkách), jsou „předmět" a „pojem".

Paradoxně je to ale právě tato „trivialita", co – přes jejich zdánlivou shodu – odlišuje Tarského koncepci od Fregova monolingvistického pojetí, které považuje explicitní definici pravdy za nemožnou a kloní se k redundanční příp. performativní teorii pravdy. Tarski zůstává v této otázce zcela neutrální, narozdíl od Frega ale, který kritérium adekvátnosti chápe nanejvýš jako opisné, vysvětlující vyjádření, které není součástí (teorémem) systému pojmového písma (odtud Wittgensteinova „nevyjádřitelnost sémantiky"), činí z formulí výše uvedeného typu vlastní náplň logiky moderního střihu – vědy explicitně zkoumající a stanovující obecné vztahy výrazu a jeho významu, roviny jazyka a metajazyka.

Definuje-li nyní Tarski pojem modelu věty jako posloupnost objektů, které tuto větu po nahrazení všech mimologických výrazů odpovídajícími typy proměnných učiní pravdivou, a na základě toho pak i pojem tautologičnosti resp. vyplývání („logického důsledku") jakožto platnost pro libovolný model resp. libovolný model splňující úsudkové premisy,[36] je v jistém smyslu pravda, že se od Bolzana odlišuje pouze proklamovaným překonáním závislosti na jazyce, obsažené v předpokladu, že „se všechny možné předměty vyskytují v uvažovaném jazyce".[37] Ve skutečnosti je toto pouze odlišnost zdánlivá: Tarski jen nahrazuje frázi „jméno N" frází „předmět N" v obratech jako

předmět Kvak splňuje výrokovu funkci „*x* má žábry"

[36] Viz jeho článek Tarski (1936), s. 58-68. Anglický překlad otištěn in Tarski (1983).

[37] Tarski (1983), s. 412.

apod. Tarski také zdůrazňuje, že svoji definici pravdy nechtěl podávat pro jazyky formální, ale jen *formalizované*, tj. pro jazyky s explicitně vyjádřenou (rekurzivně definovanou) formou, v nichž ale – jako např. v uvažovaném kalkulu tříd – zůstávají mimologické (interpretované!) výrazy, jimž je v metajazyku přiřazován nanejvýš jakýsi jejich překlad, podobně jako ve větě

věta „der Schnee ist weiss“ je pravdivá, když je sníh bílý,

nebo jsou do tohoto metajazyka převzaty přímo. Samozřejmě, že místo tohoto „absolutního“ pojmu pravdy je možné uvažovat také „relativní“, vztažený ke konkrétní předmětné doméně, což také Tarski naznačuje,[38] aniž by dal ovšem dostatečně najevo, že to při výše popsaných problémech se smyslem vět jako

posloupnost předmětů Kvak, Žbluňk splňuje větu „Klaus a Gross jsou kamarádi“

představuje spíše nutné nežli jen možné, fakultativní rozšíření předložených úvah. Evidentní potřeba částečně či jen úplně dematerializovaných vět (výrokových funkcí) jako „x má žábry“, či „x je Q“ celou záležitost definitivně přesouvá směrem k teorii modelů coby nauce o různé interpretaci jistých posloupností znaků – formulí – nevyjadřujících obsah, ale formu věty.

Sémantika teorie modelů

Předpokládáme-li jako Tarski, že je nám nějak dán obor předmětů, třídy a funkce na nich a také jejich posloupnosti (funkce z přirozených čísel do daného oboru), lze zvláště elegantně „definovat“ (relativní) pojem „pravdy“ (v daném modelu) s využitím již zmíněného pojmu „splňování“. Východiskem nám ovšem nebude věta ani výroková funkce, ale formule, a to otevřená i uzavřená, pro daný formální jazyk L, jímž rozumíme nějakou podmnožinu výše uvedených jmenných, funktorových a predikátorových konstant, obsahující alespoň jednu konstantu posledního typu.

Nejprve definujeme pojem „interpretace“ jazyka L jakožto předmětný obor G a ohodnocení I přiřazující výrazu c_i z L předmět z G, výrazu f^n_i (totální) funkci z kartézského součinu $G \times G \times \ldots$ (n-krát) do G a výrazu P^n_i podmnožinu z téhož součinu. (Pro $n=1$ je výsledkem součinu samozřejmě opět výchozí množina; prvky n-tých součinů jsou uspořádané n-tice $<g_1, \ldots, g_n>$ předmětů z G, přičemž pro $n = 1$ položme $<g_1> = g_1$.)

[38] Tarski (1983), s 199.

Formule jazyka L, v nichž se nevyskytuje ani proměnná, ani výroková spojka či kvantifikátor, tj. elementární sentence tvaru $P^n_i(s_1, ..., s_n)$, jsou nyní příslušnou interpretací definitivně „interpretovány“, neboť platí: (i) Každému termu s_j je přiřazen nějaký předmět $I(s_j)$ z G, a to termu tvaru c_k předmět $I(c_k)$, termu tvaru $f^m_l(t_1, ..., t_m)$ předmět $I(f^m_l)(I(t_1), ..., I(t_m))$, samozřejmě za induktivního předpokladu, že termy $t_1, ..., t_m$ již nějaký přiřazen mají. (ii) Řekneme-li nyní, že

> uzavřené formuli $P^n_i(s_1, ..., s_n)$ je v interpretaci (G, I) přiřazena hodnota pravda tehdy a jen tehdy, když uspořádaná n-tice předmětů $<I(s_1), ..., I(s_n)>$ náleží do množiny $I(P^n_i)$,

pak z předpokladu, že nastává právě jedna ze dvou možností náleží/nenáleží, vyplývá, že jsou tak všechny elementární sentence L ohodnoceny v interpretaci (G, I) jednou z pravdivostních hodnot. – Rozšíření ohodnocení na sentence komplexní formy nedosáhneme nyní přímo, ale tak, že jej definujeme pro libovolnou, tedy i otevřenou formuli, a to právě pomocí pojmu „splňování formule posloupností předmětů“.

Valuací nekonečné a pro všechny jazyky konstantní množiny proměnných $x_1, x_2, ...$ v G nazveme posloupnost e předmětů takovou, že pro každé n přirozené platí $e(n) = g_n$, pro nějaký předmět g_n z G. Pro interpretaci (G, I) nyní definujme pojem „denotace“ d_e termu t při valuaci e tak, že pro $t = x_i$ platí $d_e(x_i) = e(i)$, pro $t = c_i$ položíme $d_e(c_i) = I(c_i)$ a nakonec pro $t = f^n_i(t_1, ..., t_n)$, kde termy $t_1, ..., t_n$ již denotát mají, $d_e(f^n_i(t_1, ..., t_n)) = I(f^n_i)(d_e(t_1), ..., d_e(t_n))$. O elementární formuli $P^n_i(s_1, ..., s_n)$ nyní řekneme, že je při interpretaci (G, I) splněna valuací e, symbolicky

$$(G, I) \models P^n_i(s_1, ..., s_n)\ [e],$$

jestliže n-tice předmětů $<d_e(s_1), ..., d_e(s_n)>$ náleží množině $I(P^n_i)$. Dále již postupujeme induktivně

$$(G, I) \models (\neg X)[e] \quad \text{iff } (G, I) \not\models X\ [e],$$

$$(G, I) \models (X_1 \wedge X_2)[e] \quad \text{iff } (G, I) \models X_1[e] \text{ a } (G, I) \models X_2[e],$$

$$(G, I) \models (X_1 \vee X_2)[e] \quad \text{iff } (G, I) \models X_1[e] \text{ nebo } (G, I) \models X_2[e],$$

$$(G, I) \models (X_1 \rightarrow X_2)[e] \quad \text{iff } (G, I) \not\models X_1[e] \text{ nebo } (G, I) \models X_2[e].$$

Valuaci h nazveme k-alternativní valuací k valuaci e, značíme e^k, jestliže se od ní odlišuje nanejvýš v hodnotě pro k, tj. pro každé n takové, že $n \neq k$, platí $e(n) = h(n)$. Nyní konečně definujeme

$(G, I) \models (\forall x_1 X(x_1))[e]$ iff pro každou e^1: $(G, I) \models X(x_1)[e^1]$,

$(G, I) \models (\exists x_1 X(x_1))[e]$ iff existuje e^1: $(G, I) \models X(x_1)[e^1]$.

Je zřejmé, že i neelementární sentence – přestože byl pojem „valuace" využit k jejich ohodnocení – ve své „interpretaci" nezávisí na žádné konkrétní valuaci e, jednoduše proto, že nemají žádné volné proměnné. Proto se nabízí následující definice: o sentenci X (v jazyce L) řekneme, že je interpretace (G, I) (pro jazyk L) jejím *modelem* tehdy a jen tehdy, jestliže je v této interpretaci splněna nějakou valuací e; jestliže to nastane, je totiž zároveň splněna všemi, jejich symbol je proto možno vynechat a psát jenom

$(G, I) \models X$.

Rozdíl formule otevřené a sentence, jak se můžeme někdy dočíst, samozřejmě nespočívá v tom, že by první narozdíl od druhé nebyla pravdivou: coby formule není pravdivá ani jedna z nich, neboť narozdíl od věty nenese žádný „význam". Druhá z nich je ale pravdivá již *via* interpretaci mimologických konstant, zatímco první až *via* valuaci proměnných. Teprve pak totiž platí kýžené *tertium non datur*

$(G, I) \models X[e]$ nebo $(G, I) \not\models X[e]$

které, vyložíme-li $(G, I) \models X$ jako

$(G, I) \models X$ iff pro každé e: $(G, I) \models X[e]$,

obecně, tj. bez připsaného e, samozřejmě nenastává (tj. otevřená formule X může být v dané interpretaci některými valuacemi splňována, jinými zase ne).

Elementární věty

Definice tautologie a sémantického důsledku jsou nyní záležitostí dvou řádek:

$\models X$ iff pro každé (G, I) a každé e: $(G, I) \models X\ [e]$

$Z \models X$ iff pro každé (G, I) a každé e:
jestliže $(G, I) \models Z[e]$, pak $(G, I) \models X[e]$.

První z nich definuje formuli X jako tautologickou (logicky pravdivou), je-li splněna každou valuací ve všech interpretacích. V druhém pak zachycujeme formuli X jakožto sémanticky vyplývající z množiny formulí Z, je-li splněna valuací e v každé interpretaci, v níž je touto valuací splněna každá formule ze Z.

Námitka, že zde zachycujeme vyplývání mezi formulemi, zatímco naším původním a přirozeným cílem bylo jeho uchopení větné, je samozřejmě povrchní, a nejspíš i pramenící z faktu, že jsme předmětnou řečí o modelech a valuacích ztratily zcela ze zřetele, co jsou zač. Řeknu-li, že je formule „$x_1 \leq x_2$" splněná valuací e tehdy a jen tehdy, jestliže je objekt $e(1)$ menší nebo roven objektu $e(2)$, zbývá vysvětlit, za jakých podmínek něco takového nastává, tedy právě pravdivostní podmínky této pravé, zdánlivě vysvětlující strany. Tarského definice nám o nich již nic dalšího neříká, nanejvýš nás donutí je znovu zopakovat, byť v nějaké transformované podobě – skutečným výsledkem je ale zas a zas nanejvýš smysluplná věta, jejíž podmínky implicitně ovládáme, a proto můžeme říci, že je formule „$x_1 \leq x_2$" splněna valuací e, v níž $e(1) = 5$ a $e(2) = 23$, *protože* je objekt 5 menší než objekt 23. V praxi nejsou tedy všechny interpretace a modely nic jiného, nežli smysluplné (elementární) věty resp. jejich obory (diskurzy), v nichž je otázka pravdy a nepravdy brána jako vyřešená a výrazy jako „předmět $e(i)$" jen zastupují či vybírají některé jméno z oboru. Otázka netriviálních, tj. konstituujících pravdivostních podmínek toho kterého oboru zůstává proto stále otevřena, a je jasné, že ji, přinejmenším pro věty elementární, nezodpoví žádná „definice" typu

věta „A" je pravdivá, když A,

ale nanejvýš

věta „A" je pravdivá, když B,

kde B představuje pravdivostní podmínky, opírající se o věty z nějaké jiné, momentálně neproblematické, tj. relativně stabilní praxe. Tou pro případ elementárních vět aritmetiky může být např. Lorenzenova operativní matematika, tj. praxe odvozování v určitých jednoduchých kalkulech.

Svůdná, alespoň v rámci matematiky, může být ale i následující myšlenka: ať již je to s matematickou pravdou a předmětem matematiky jakkoli, pohybujeme-li se v důsledku při aritmetických úvahách tak jako tak na jazykové úrovni symbolické transformace symbolů a celých vět, není mezi formulí a větou třeba rozlišovat. Postačí, když výběrem několika vhodných, dostatečně obecných a spolehlivých formulí – axiomů –, a pravidel jejich transformace – úsudkových pravidel logiky –, *definujeme pravdivost* věty resp. formule (A) jako její syntaktickou odvoditelnost v daném systému (S), symbolicky $S \vdash A$, a sémantickou řeč o modelech ponecháme pro její obskurnost stranou. Toto je stanovisko tzv. formalismu, proslaveného Davidem Hilbertem.

Kritérium konzistence

Bylo by chybou, jak se to tu a tam děje, identifikovat Hilbertův formalistický program s ideou, že lze matematiku redukovat na „pouhou vědou o prázdných symbolech". Pravý opak je pravdou: matematika je podle Hilberta vědou o struktuře, kterou jedinou lze také jejími větami zachytit – forma věty tak s jejím obsahem splývá. Zkoumat význam slov „bod" či „přímka", jak vysvětloval Fregovi, je proto zbytečné;[39] jediné, co lze tak jako tak zachytit, jsou jejich vzájemné vztahy, a právě to učiníme volbou vhodných axiomů,[40] z nichž se ostatní formule-věty (Fregovými slovy) rozvinou jako květina ze semene. To, jaké axiomy budou zvoleny, je z formalistova hlediska lhostejné; důležité jsou právě jen jejich vztahy navzájem a také k celku odvoditelných vět. Minimum v tomto ohledu tvoří tzv. konzistence systému, tj. současná neodvoditelnost formule a její negace. V nekonzistentním systému lze totiž pomocí elementární logiky odvodit libovolnou formuli.

Lákavost Hilbertova formalismu, která z ní ostatně dodnes činí převládající, byť neoficiální filosofii pracujících matematiků, spočívá právě v kombinaci „verbální" skromnosti a „praktického" efektu tohoto základního požadavku: syntaktická konzistence byla nepochybně cosi, co mnozí kapitáni moderní matematiky a matematické logiky nepovažovali vůbec za hodna kontroly, neboť se ve svých úvahách domnívali dotýkat něčeho tak základního a evidentního, že se už pouhá představa sporu zdála podrývat ten samý rozum, který tyto úvahy vyprodukoval – výsledkem byl Russellův paradox. Axiomatizace teorie množin znamenala v této situaci nesporné zpevnění metody.

Čteme-li nyní Hilbertovo známé „vyznání" Fregovi ohledně konzistence coby prvním a posledním kritériu matematické existence a pravdy jako poukaz na ošidnost sebeevidentních sémantických metod pravdivých, a *proto* bezesporných vět, je to dojista zásah do černého, neboť to byla právě nejistota ohledně povahy jeho „základních zákonů aritmetiky", co stálo za Fregovou bezradností tváří v tvář Russellově paradoxu a chybě v důkazu, který měl systému bezespornost zaručit. Na druhou stranu sám fakt, že se Frege o takový důkaz vůbec pokusil, jej okamžitě zbavuje podezření, že by syntaktické metody podceňoval – to by bylo ostatně absurdní s ohledem na jeho autorství „pojmového písma", které také svou formou sloužilo Hilbertovu pozdějšímu zakládání matematiky „axiomatickou metodou" jako veleúspěšné paradigma.

---

[39] Viz Fregova a Hilbertova korespondence in Frege (1976) Existuje také český překlad Frege (2000).

[40] Vzhledem k Fregově známé odmítavé reakci je pozoruhodné, že ve svých *Grundlagen* jakousi verzi „strukturalistické" teorie sám zastával Viz Frege (1884), §26

Ve skutečnosti to byl právě Frege, kdo si povšiml, že skromnost formalistových předpokladů je z velké části fingovaná, jednak když si v důkazech bezespornosti či nezávislosti axiomů vypomáhá existencí modelů z jiných oborů (např. aritmetického v geometrii), jednak když káže bezespornost, ale reálně ji studuje jen na osvědčených teoriích jako je algebra či analýza, které jsou co do existence ospravedlněné již svým podílem na lidské praxi měření a počítání, takže se nám okamžitě vybaví Wittgensteinovo: „Mám pocit: kdyby se v axiomech nějakého systému objevil spor, nebylo by to zas tak velké neštěstí. Nic snazšího, než ho ostranit.“[41]

Aplikace aparátu výrokové logiky navíc od formalistovy koncepce pravdivosti věty jako její odvoditelnosti v deduktivním systému vyžaduje, aby byl tento systém vedle konzistence také úplný, tj. aby pro každou uzavřenou formuli bylo lze odvodit buďto ji nebo její negaci. Jedině tak lze totiž užít základní úsudkový princip přechodu z nepravdivosti věty na pravdivost její negace, zachycený mj. v tzv. zákonu vyloučeného třetího, tedy alespoň definujeme-li nepravdivost věty jako její neodvoditelnost. Definujeme-li ji jako pouhou odvoditelnost negace, vyhneme se sice u neúplného systému tomu, aby byla věta a zároveň její negace současně prohlášeny za nepravdivé, ovšem za cenu, že nebudou mít pravdivostní hodnotu vůbec. Výraz „$A \vee \neg A$“ bude pak v obecnosti prázdný, čten v metajazyce nepravdivý. Odtud také Brouwerova kritika Hilberta.

Z hlediska strukturalismu má ovšem úplnost pro formálně-deduktivní systém ten zcela zásadní význam, že je nutnou (nikoli však postačující) podmínkou jeho kategoričnosti, tj. interpretovatelnosti izomorfními – strukturálně identickými – modely. Neúplný systém S lze totiž z existence formule A takové, že $S \nvdash A$ a $S \nvdash \neg A$, konzistentně rozšířit jak na systém $S \cup \{A\}$, tak $S \cup \{\neg A\}$. Jeden i druhý má potom z věty o úplnosti model, jenž je i modelem systému S; tyto dva modely ale nemohou být izomorfní, neboť pak by v jednom z nich nemohla platit formule, a v druhém její negace.

V této situaci tedy není překvapivé, že to byly právě Gödelovy věty o neúplnosti, dokazující existenci pravdivé, avšak syntakticky nedokazatelné, a tedy nezávislé aritmetické věty (resp. formule pravdivé ve standardním modelu aritmetiky, avšak neodvoditelné v žádném konzistentním efektivně popsaném deduktivním systému formulí pravdivých tamtéž), co odkrylo marnost Hilbertova finitistického programu, co Carnapa odradilo od jeho plánu logické syntaxe jazyka a co teprve z Tarského díla učinilo definitivní triumf sémantiky

[41] Wittgenstein (1984a), s 303. Srv. „Je-li spor tak dobře skryt, že si ho nikdo nevšiml, proč bychom nemohli to, co nyní děláme, nazývat vlastním počítáním?“ Wittgenstein (1984b), s 375

coby samostatné logické disciplíny. Další osud logicismu nejen tváří v tvář Gödelovým větám, ale především Russellovu paradoxu, bych chtěl podrobněji sledovat v samostatné stati.

Katedra logiky FF UK
Celetná 20, 11000, Praha 1
kolmann2post.cz

LITERATURA

BOLZANO, B. (1817): **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege**. Praha.
BOLZANO, B. (1963): **Grundlegung der Logik**. Kambartel, F. (ed.). Hamburg.
BOOLE, G. (1854): **An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities**. London.
COFFA, A. (1991): **The Semantic Tradition from Kant to Carnap**. Cambridge.
DEDEKIND, R. (1888): **Was sind und was sollen die Zahlen**. Braunschweig.
FREGE, G. (1879): **Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens**. L. Nebert, Halle.
FREGE, G. (1884): **Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl**. Breslau.
FREGE, G. (1893): **Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band**. Jena
FREGE, G. (1897): Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene In: **Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig** XLVIII
FREGE, G. (1906): Über die Grundlagen der Geometrie. I-III In: **Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung** XV.
FREGE, G (1976): **Wissenschaftlicher Briefwechsel** Gabriel, G., Hermes, H., Kambartel, F., Thiel, C., Veraart, A. (eds). Hamburg.
FREGE, G. (2000): Fregova korespondence s Hilbertem. V. Kolman (překl.). In: **Filosofický časopis** 48/4.
GRATTAN-GUINNESS, I. (2000). **The Search for Mathematical Roots 1870-1940**. Oxford.
FRITZ, K. von (1971): **Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft**. de Gruyter, Berlin.
JEVONS, S. (1879): **The Principles of Science**. London.
KANT, I. (1992): **Kritik der reinen Vernunft**. Frankfurt am Main.
KOLMAN, V (2002a). **Logika Gottloba Frega**. Praha.
KOLMAN, V. (2002b). K Fregově údajnému holismu. In: **Filosofický časopis** 50/5.
LEIBNIZ, G. W. (1960): **Fragmente zur Logik**. Schmidt, F. (ed., překl.) Berlin.
LORENZEN, P. (1984): **Normative Logic and Ethics**. Bibliographisches Institut AG, Zürich.
SHAPIRO, S. (1991): **Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic**. Oxford.
SCHRÖDER, E. (1898): Über Pasigraphie In: **Rudio**.
STEGMÜLLER, W. (1968): **Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik**. 2. Auflage. Wien, New York.

TARSKI, A (1935): Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. In: **Studia Philosophica** I

TARSKI, A. (1936): O pojęciu wynikania logicznego. In· **Przegląd Filozoficzny** 39.

TARSKI, A. (1983)· **Logic, Semantics, Metamathematics** 2nd edition J. H. Woodger (transl.), Corcoran, J (ed.), Indianopolis 1983.

WITTGENSTEIN, L (1921)· Tractatus logico-philosophicus. In: **Annalen der Naturphilosophie** 14.

WITTGENSTEIN, L. (1979): **Notebooks 1914-1916** 2nd edition. Basil Blackwell, Oxford

WITTGENSTEIN, L. (1984a): **Philosophische Grammatik**. R. Rhees (ed.), Frankfurt a. Main.

WITTGENSTEIN, L (1984b): **Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik**. Anscombe, G E. M., Rhees, R., Wright, G. H. von (eds.), Frankfurt a Main.