ROZHĽADY

Z LOGICKEJ SYNTAXE A SÉMANTIKY (VI)

Pavel CMOREJ

11. **Formy a ich hodnoty.** Keď vo výroku bez premenných niektoré (prípadne všetky) indivíduové mená alebo predikáty nahradíme premennými (každý nahrádzaný výskyt indivíduového mena indivíduovou a každý nahrádzaný výskyt predikátu predikátovou premennou tej istej árnosti), pričom rôzne výrazy nahradíme rozličnými premennými, dostaneme schému pôvodného výroku, ktorá sa nazýva **výrokovou formou**. Formu výroku môžeme skonštruovať aj nahradením niektorých výrokových častí výrokovými premennými, ba aj nahradením celého výroku výrokovou premennou. Premenné sú totiž tiež formy – každá premenná tej či onej kategórie je formou ľubovoľného konštantného výrazu tej istej kategórie. Vo vymedzení formy sme použili pojem výskytu výrazu, ktorý trochu objasníme.

Jeden a ten istý výraz sa môže v inom výraze vyskytovať na viacerých miestach – vtedy hovoríme, že má v ňom viacej **výskytov**. Napríklad výraz „2" má vo výraze „4 – 2 = 2" dva výskyty, ostatné výrazy majú v ňom iba jeden výskyt. Obdobne treba odlišovať **premenné** od **ich výskytov** v nejakej forme. Jedna a tá istá premenná sa môže v určitej forme vyskytovať na viacerých miestach. Na prvý pohľad vidíme, že premenná x sa vo forme $(x<y) \wedge (y < z.(z+z))$ vyskytuje na jednom, premenná y na dvoch a premenná z na troch miestach. Hovoríme tiež, že premenná x má v tejto forme jeden výskyt, premenná y dva a premenná z tri výskyty. Je zrejmé, že premenná sa vyskytuje v nejakej forme práve vtedy, keď má v nej aspoň jeden výskyt.

Z toho istého výroku možno utvoriť viacej výrokových foriem. Napríklad každá z nasledujúcich foriem je istou formou výroku „V. Mečiar je predseda slovenskej vlady a V. Mečiar je mladší ako prezident SR" (druhý výskyt mena „V. Mečiar" sa v bežných formuláciach zvyčajne vynecháva):

x je predseda slovenskej vlády $\wedge$ x je mladší ako prezident SR,
x je predseda slovenskej vlady $\wedge$ x je mladší ako y,
$P(x) \wedge x$ je mladší ako y,

ORGANON F 2 (1995), N. 2, 198-218
Copyright © Filozofický ústav SAV, Bratislava

$P(x) \wedge R(x,y)$,
$p \wedge$ V. Mečiar je mladší ako prezident SR,
V. Mečiar je predseda slovenskej vlády $\wedge\ q$,
$p \wedge q$,
r,

pravda, za predpokladu, že x, y sú indivíduové, p, q, r výrokové a P, R predikátové premenné (P jednoargumentová a R dvojargumentová). Namiesto premenných x, y, P, R, p, q, r by sme mohli použiť ľubovoľné iné premenné príslušných kategórií a tak zostrojiť neobmedzené množstvo ďalších foriem uvedeného výroku. Iné formy by sme mohli skonštruovať na základe jemnejšej analýzy uvedeného výroku. V tejto súvislosti treba zdôrazniť, že formy výrazov sa nekonštruujú vždy čírym nahradením výrazov prirodzeného jazyka premennými – neraz si musíme niektoré ich zložky domyslieť, od iných zasa abstrahovať, pretože gramatická stavba týchto výrazov sa zvyčajne nekryje s ich logickou štruktúrou.[1]

Vo formách sa viac alebo menej výstižne odráža stavba výrazov, z ktorých sme formy získali. Niektoré formy vystihujú stavbu výrazov do najmenších detailov, iné iba do istej miery a samostatné premenné ju nezachytávajú vôbec – poukazujú iba na kategóriu výrazov, ktorých formu predstavujú. Aby sme sa vyhli prípadným nejednoznačnostiam, je výhodné, nie vždy však nevyhnutné, v zázname foriem použiť jazyk logiky alebo aspoň niektoré jeho prvky.

Ak analyzovaný výraz je logicky viacznačný, najprv treba jeho možné významy vyčleniť a potom konštruovať formy zodpovedajúce jednotlivým významom. Získame tak niekoľko súborov foriem, ktoré môžu, ale nemusia byť disjunktné. Každému významu analyzovaného výrazu bude zodpovedať jeden súbor foriem. So zreteľom na logickú dvojznačnosť výrazu „predseda slovenskej vlády" (možno ho interpretovať nielen ako jednoargumentový predikát, ale aj ako indivíduový výraz), výroku „V. Mečiar je predseda slovenskej vlády a je mladší ako prezident SR" zodpovedá ešte jeden súbor foriem, ktorý sa od predchádzajúceho líši tým, že čiastkový výrok „V. Mečiar je predseda slovenskej vlády" sa v ňom analyzuje ako výrok formy „$x = z$" (a výraz „predseda slovenskej vlády" ako indivíduový). Namiesto tretej a štvrtej formy pôvodného súboru sa v ňom vyskytujú formy

$x = z \wedge x$ je mladší ako y,
$x = z \wedge R(x,y)$.

V spomenutom výroku je logicky dvojznačný aj výraz „prezident SR", nebolo by však rozumné v danom kontexte ho interpretovať ako jednoargumentový predikát signifikujúci vlastnosť byť prezidentom SR, lebo vzťah byť mladší je vzťahom medzi indivíduami, a nie medzi indivíduami a ich vlastnosťami. Tvrdenie, že V. Mečiar je mladší ako vlastnosť byť prezidentom SR, je nielen čudné, ale priam nezmyselné. Treba ešte podotknúť, že príčinou naznačenej nejednoznačnosti logickej stavby výrazov prirodzeného jazyka je *kategoriálna* viacznačnosť niektorých ich častí (vrátane nepravej), ktorá nám umožňuje interpretovať ich ako výrazy viacerých kategórií, napr. ako indivíduové i predikátové. Ak každý podvýraz analyzovaného výrazu možno zaradiť iba do jednej logickej kategórie, tak výrazu zodpovedá len jeden súbor foriem. To, pravda, neznamená, že každý podvýraz takého výrazu musí byť jednoznačný, ale jeho mnohoznačnosť nesmie prekročiť rámec jednej kategórie: pri každom význame ho možno začleniť iba do jednej a tej istej kategórie.

Výroková forma *F* **je formou výroku** *W* práve vtedy, keď výrok *W* možno z nej získať dosadením za jej premenné. **Dosadením** či **substitúciou** za premenné formy *F* sa nazýva také nahradenie jej premenných, pri ktorom sa *každý výskyt* tej istej premennej nahradí *tým istým výrazom* patriacim do *tej istej kategórie* ako premenná. Ak by sme pri zostrojovaní formy nejakého výroku (či iného výrazu) dva rôzne výrazy nahradili tou istou premennou, dostali by sme síce formu, ale nie formu pôvodného výroku (výrazu). Z takej formy sa totiž dosadením za jej premenné nedá získať pôvodný výrok (výraz). Forma *F* je formou daného výrazu *E* iba vtedy, keď dosadením do *F* sa dá opäť získať výraz *E*. Napríklad keby sme v uvedenom výroku o prezidentovi SR a V. Mečiarovi obidva výrazy „V. Mečiar", „prezident SR" nahradili tou istou premennou *x*, dostali by sme formy „$P(x) \wedge R(\text{V. Mečiar}, x)$", „$P(x) \wedge R(x,x)$", ktoré nie sú formami uvedeného výroku.

Výroková forma je akási schéma určitej množiny výrokov, do ktorej patrí každý výrok, ktorý možno z nej získať dosadením za jej premenné. **Výrokovými formami** sú jednak výrokové premenné, jednak zložené výrazy, ktoré majú štruktúru výrokov, ale niektoré, prípadne všetky ich zložky sú premenné, pričom za tieto premenné možno dosadiť tak, že po dosadení dostaneme výrok. Výroky a výrokové formy utvárajú jednu kategóriu výrazov, ktoré nazývame **výrokovými výrazmi**. Podobne ako výrokové možno vymedziť aj indivíduové a *n*-argumentové predikátové formy výrazov. **Indivíduovými formami** sú jednak indivíduové premenné, jednak výrazy, z ktorých možno získať indivíduové mená a deskripcie dosadením za premenné, ktoré sa vyskytujú v týchto výra-

zoch. Indivíduové formy, mená indivíduí a ich deskripcie utvárajú kategóriu **indivíduových výrazov**. Do kategórie *n*-**argumentových predikátových výrazov** ($n \geq 1$) patria *n*-argumentové predikáty a *n*-**argumentové predikátové formy**, t.j. *n*-argumentové predikátové premenné a zložené výrazy s premennými, za ktoré možno dosadiť tak, že z týchto výrazov dostaneme *n*-argumentové predikáty.

Výroková forma nie je ani pravdivá ani nepravdivá. Veď akú pravdivostnú hodnotu by sme mohli priradiť formám „*x* je Slovák" alebo „*x* je vyšší ako *y*" a pod., keď nie je stanovené, na koho sa vzťahujú premenné *x*, *y*? Určitú hodnotu nadobúdajú iba so zreteľom na priradenie nejakých objektov premenným *x*, *y* z oboru ich premennosti. Napríklad keď premennej *x* priradíme M. Kováča a premennej *y* jeho manželku, druhá z uvedených foriem nadobúda hodnotu **1** a pri ohodnotení, ktoré premennej *x* priraďuje V.Mečiara a premennej *y* M. Kováča – hodnotu **0**. Forma „*x* je vyšší ako *y*" je zo sémantického hľadiska nápadne podobná vete „On je vyšší ako ona". Sama osebe, mimo verbálneho či situačného kontextu, ktorý by zámenám „on", „ona" priradil určité osoby, táto veta nie je pravdivá ani nepravdivá. Otázka jej pravdivosti či nepravdivosti je mimo kontextu bezpredmetná. Možno o nej uvažovať iba so zreteľom na určité prira-denie, ktoré určuje, na koho sa vzťahujú zámená „on" a „ona". Toto priradenie plní obdobnú funkciu ako ohodnotenie premenných v prípade foriem.

Kým výrokové formy predstavujú schémy výrokov, indivíduové formy – schémy indivíduových mien a predikátové formy – schémy predikátov. Všimnime si trochu indivíduové formy. Čitateľ sa s nimi oboznámil už na strednej škole na hodinách matematiky. Patria k nim napr. výrazy $x+1$, $y-2$, $x+y$, $2.x$, $x.z$, $x:2$, $\sin x$, $\cos(x+y)$, $(x+y)^2$, $\log_{10}x$ a pod. Žiadna z týchto foriem sa nevzťahuje na určité číslo, ale pri istom priradení hodnôt jej premenným z oboru ich premennosti nadobúda nejaké číslo ako svoju hodnotu. Napríklad hodnotou formy $x+y$ pri ohodnotení, priraďujúcom premennej *x* číslo 2 a premennej *y* číslo 3, je číslo 5 a hodnotou formy $x.y$ (pri tom istom ohodnotení) je číslo 6.

Ak oborom premennosti premennej *x* je množina ľudí, tak hodnotou formy „manželka *x*-a" pri ohodnotení, ktoré premennej *x* priraďuje V. Mečiara, je indivíduum, ktoré je manželkou V.Mečiara. Kým hodnotami výrokových foriem sú pravdivostné hodnoty **1**, **0**, indivíduové formy ako svoje hodnoty nadobúdajú indivíduá, jednoargumentové predikátové formy – množiny indivíduí, ... a *n*-argumentové predikátové formy – množiny usporiadaných *n*-tíc indivíduí. So zreteľom na dvojznačnosť výrazov, akým je „manželka V. Mečiara", ktorý

môže vystupovať nielen ako indivíduový, ale aj ako predikátový výraz, forma „manželka x-a" je tiež dvojznačná: nepredstavuje len formu indivíduových, ale aj formu jednoargumentových predikátových výrazov. V druhom prípade jej hodnotou pri ohodnotení priraďujúcom premennej x indivíduum I je buď prázdna, jednoprvková alebo viacprvková množina žien tohto indivídua. Napríklad pri ohodnotení, ktoré premennej x priraďuje slovenského kardinála J. Ch. Korca, hodnotou formy „manželka x-a" je prázdna množina, pri ohodnotení priraďujúcom tejto premennej V. Mečiara jej hodnotou je jednoprvková množina, do ktorej patrí manželka V. Mečiara a pri ohodnotení, ktoré premennej x priraďuje nejakého arabského šejka s 20 ženami, jej hodnotou je množina jeho žien. V jazyku logiky možno dvojznačnú formu „manželka x-a" nahradiť dvoma jednoznačnými formami. Možno to urobiť napr. utvorením dvoch výrazov z formy $Man(y,x)$ s dvojargumentovým predikátom Man, ktorý signifikuje vzťah byť manželkou, pomocou lambda a jota operátora. (Týmito operátormi a indivíduovými i predikátovými formami sa budeme podrobnejšie zaoberať v nasledujúcich dvoch pokračovaniach tohto výkladu.)

Teraz vymedzíme všeobecný pojem hodnoty formy F. Predpokladajme, že vo forme F sa vyskytujú iba premenné $\pi_1, ..., \pi_n$. **Hodnotou formy** F pri ohodnotení v priraďujúcom jej premenným $\pi_1,...,\pi_n$ objekty $a_1,...,a_n$ (v uvedenom poradí) je denotát výrazu F^*, ktorý dostaneme z F tak, že za premenné $\pi_1,...,\pi_n$ dosadíme mená objektov $a_1,...,a_n$. Vieme, že aj premenné sú formy. Hodnotou premennej π pri ohodnotení v je objekt, ktorý premennej π priraďuje ohodnotenie v. Je to teda denotát mena priradenej hodnoty, lebo keď do formy π dosadíme meno priradenej hodnoty, výrazom F^* sa stane práve toto meno.

Aká intuícia sa skrýva za uvedeným všeobecným vymedzením hodnoty formy? Prinajmenej nepriamo to naznačujú už uvedené príklady. Pokúsme sa to však objasniť s väčším zreteľom na znenie uvedeného vymedzenia. Predpokladajme, že $Vyš$ je predikát, ktorý signifikuje vzťah byť vyšší a x, y sú indivíduové premenné, ktoré patria do jazyka s univerzom obsahujúcim všetkých politikov SR. Už vieme, že výroková forma $Vyš(x,y)$ sama osebe nie je pravdivá ani nepravdivá, lebo jej premenné x, y sa nevzťahujú na nijaké konkrétne osoby z oboru ich premennosti. V tomto ohľade sa nápadne podobá vete prirodzeného jazyka

(1) On je vyšší ako ona

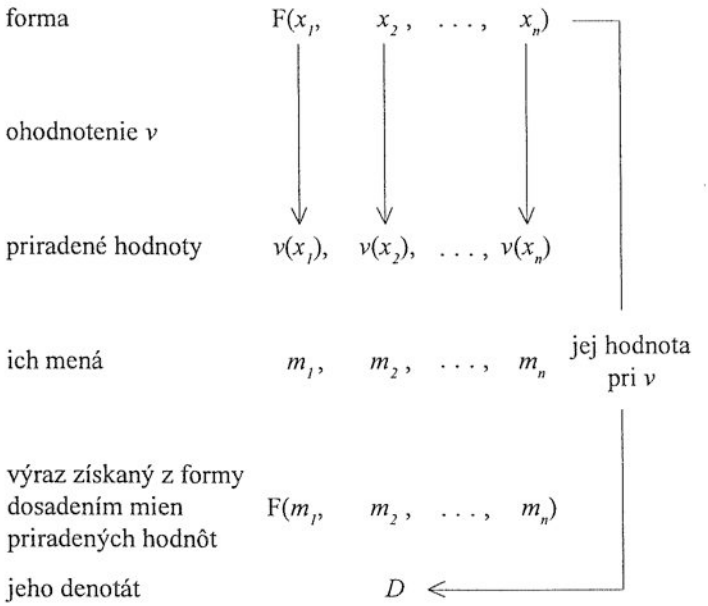
(až na to, že „obory premennosti" slov „on", „ona" sú iné ako obory premenných x, y). Veta (1) nadobudne nejakú pravdivostnú hodnotu až v konkrétnom kontexte, v ktorom sa jej zámenám priradia určité predmety, povedzme, nejaké osoby, teda v kontexte určujúcom, na koho sa vzťahuje zámeno „on" a na koho zámeno „ona". Keď týmto zámenám priradíme J. Čarnogurského a O. Keltošovú, veta (1) bude mať tú istú pravdivostnú hodnotu ako veta

(2) J. Čarnogurský je vyšší ako O. Keltošová,

ktorú sme získali z predchádzajúcej vety nahradením zámen menami priradených osôb. Priradenie konkrétnych osôb zámenám *akoby* zmenilo zámená na mená týchto osôb a vetu (1) na vetu (2).

Podobná situácia nastáva pri formách, pri ktorých úlohu kontextu zohrávajú ohodnotenia. Pri hľadaní hodnoty formy *Vyš*(x,y), ktorú táto forma nadobúda pri ohodnotení v priraďujúcom premenej x J. Čarnogurského a premennej y O. Keltošovú, budeme postupovať tak, že do formy *Vyš*(x,y) dosadíme mená priradených hodnôt, teda výrazy „J. Čarnogurský", „O. Keltošová", a budeme skúmať, čo denotuje dosadením získaný výraz „*Vyš*(J. Čarnogurský, O. Keltošová)". Keďže ide o výrok, jeho denotátom je jedna z pravdivostných hodnôt, a to **1**, a táto hodnota je hodnotou formy *Vyš*(x,y) pri ohodnotení v. Keď nejaké ohodnotenie priradí premennej x M. Kováča a premennej y V. Mečiara, forma *Vyš*(x,y) nadobudne pravdivostnú hodnotu, ktorú denotuje výrok *Vyš*(M. Kováč, V. Mečiar). Aj v tomto prípade priradenie konkrétnych osôb premenným x, y *akoby* zmenilo tieto premenné na mená priradených osôb a formu *Vyš*(x,y) na výrok *Vyš*(M. Kováč, V. Mečiar).

Obrazne, ale s istým skreslením, by sme mohli ohodnotenie charakterizovať ako dotyk nekonečného množstva neviditeľných tykadiel, z ktorých každé sa dotýka presne jednej premennej (lebo ohodnotenie je *funkcia* priraďujúca nejakú hodnotu *každej* premennej). Pri tomto dotyku sa vplyvom tykadla každá premenná uvažovanej formy premení na meno predmetu, ktorý jej toto ohodnotenie priraďuje. Neskôr uvidíme, že na mená sa pritom menia iba tzv. voľné premenné. Hodnotou formy pri danom ohodnotení je denotát výrazu, na ktorý sa forma premení po zmene jej premenných na mená ohodnotením priradených predmetov. Väzbu medzi jednotlivými zložkami, ktoré vstupujú do hry pri určovaní hodnoty formy $F(x_1,x_2, ...,x_n)$ obsahujúcej práve premenné x_1, x_2, ..., x_n môžeme schématicky znázorniť takto:



V tejto schéme je uvedená iba tá časť ohodnotenia v, od ktorej závisí hodnota formy $F(x_1,x_2,...,x_n)$ pri v. Hodnota tejto formy vôbec nezávisí od toho, čo ohodnotenie v priraďuje premenným, ktoré sa v nej nevyskytujú. Šípky smerujúce od premenných k priradeným hodnotám predstavujú pomyselné tykadlá, ktoré menia premenné na mená priradených hodnôt. Keďže ohodnotenie (valuácia) je priradenie (funkcia), ktoré *každej* premennej daného jazyka priradí *presne jeden* objekt z oboru jej premennosti, hodnotu o priradenú ohodnotením v premennej π môžeme označiť výrazom $v(\pi)$ a tvrdenie, že v priraďuje premennej π objekt o, môžeme stručnejšie zapísať takto: $v(\pi) = o$. V danej súvislosti nezaškodí zdôrazniť, že medzi priradenými hodnotami $v(x_1)$, $v(x_2)$, ..., $v(x_n)$ a ich menami m_1, m_2, ..., m_n je obrovský rozdiel – nie je o nič menší ako rozdiel medzi vrchmi Vysokých Tatier a ich menami „Gerlach", „Kriváň" atď.

12. **Pojem spĺňania.** Ak F je *výroková* forma a v nejaké ohodnotenie, tak hovoríme, že **ohodnotenie** v **spĺňa výrokovú formu** F vtedy a len vtedy, keď hodnotou formy F pri v je pravdivostná hodnota **1**. Spĺňanie je sémantická relá-

cia medzi ohodnoteniami a *výrokovými* formami.[2] Formu *Vyš*(*x*,*y*) spĺňa každé ohodnotenie, ktoré premennej *x* priradí vyššiu osobu ako premennej *y*. Ohodnotenie, ktoré premennej *x* priraďuje O. Keltošovú a premennej *y* J. Čarnogurského, túto formu nespĺňa, lebo O. Keltošová nie je vyššia ako J. Čarnogurský. Formu *SL*(*x*) s jednoargumentovým predikátom *Sl* signifikujúcim vlastnosť byť Slovákom, spĺňa každé ohodnotenie *v*, ktoré premennej *x* priraďuje nejakého Slováka, a formu *P*(*x*) každé ohodnotenie *v* priraďujúce predikátovej premennej *P* množinu indivíduí, do ktorej patrí indivíduum priradené ohodnotením *v* premennej *x*.

Definovaný pojem spĺňania je veľmi blízky intuitívnemu pojmu spĺňania nejakej podmienky osobou alebo predmetom, resp. usporiadanou *n*-ticou osôb, prípadne predmetov. Z intuitívneho hľadiska by sme mohli *výrokovú* **formu** *F*(*π*) obsahujúcu jednu premennú *π* charakterizovať ako podmienku, ktorú ľubovoľný **objekt** z oboru premennosti *π* **spĺňa** práve vtedy, keď výrok *F*(*m*) získaný z formy *F*(*π*) *dosadením* mena *m* tohto objektu za premennú *π* je pravdivý. Formu „*x* je filozof" spĺňa každý človek z oboru premennosti premennej *x*, ktorý je filozof a formu „*x* uvažuje o *x*" každý človek, ktorý uvažuje o sebe. V tomto prípade nejde však o reláciu medzi *ohodnoteniami* a formami, ale o reláciu medzi *jednotlivými objektmi* a výrokovými formami.

Ak formy obsahujú *n* rôznych premenných (pričom $n > 1$), toto intuitívne spĺňanie sa mení na reláciu medzi usporiadanými *n*-ticami objektov a výrokovými formami s *n* premennými. Usporiadanie objektov, ktoré formu *F* spĺňajú, je veľmi dôležité, pretože jedna usporiadaná *n*-tica $<o_1,...,o_n>$ môže a iná *n*-tica *zložená z tých istých objektov* nemusí spĺňať *F*. Práve z tohto dôvodu namiesto formulácie „objekty o_1, ..., o_n spĺňajú *F*", v ktorej sa od usporiadania objektov o_1, ..., o_n zvyčajne abstrahuje, používame formuláciu „usporiadaná *n*-tica $<o_1,..., o_n>$ spĺňa (či nespĺňa) formu *F*", ktorá zdôrazňuje a zároveň určuje usporiadanie objektov o_1, ..., o_n. Napríklad z 27 usporiadaných trojíc (vrátane tých, v ktorých sa niektoré prvky opakujú) zložených z Bratislavy, Trnavy a Žiliny iba dve spĺňajú formu *L*(*x*,*y*,*z*), kde *L* je trojargumentový predikát signifikujúci geografický vzťah ležať medzi. Formu *Vyš*(*x*,*y*) spĺňa každá usporiadaná dvojica objektov $<o_1,o_2>$, z ktorých prvý je vyšší ako druhý a spĺňa ju práve vtedy, keď výrok *Vyš*(m_1,m_2), ktorý dostaneme z formy *Vyš*(*x*,*y*) dosadením mena m_1 objektu o_1 za premennú *x* a mena m_2 objektu o_2 za premennú *y*, je pravdivý. Z dvojíc $<o_1,o_2>$, $<o_2,o_1>$ formu *Vyš*(*x*,*y*) spĺňa nanajvýš jedna, lebo iba jeden z výrokov *Vyš*(m_1,m_2), *Vyš*(m_2,m_1) môže byť pravdivý.

Keď forma obsahuje viacej premenných (na počte ich výskytov nezáleží), výrok „usporiadaná n-tica $<o_1,..., o_n>$ spĺňa formu F" bude jasný a jednoznačný až vtedy, keď stanovíme, ktorej premennej zodpovedá objekt o_1, ktorej objekt o_2, ..., a ktorej objekt o_n. V presnej definícii spĺňania formy F usporiadanými n-ticami by bolo treba všeobecne určiť, ktorá z jej premenných je prvá, ktorá druhá, ... a ktorá n-tá a potom definovať spĺňanie takto: **usporiadaná n-tica objektov $<o_1,o_2,...,o_n>$ spĺňa formu** F s n premennými práve vtedy, keď výrok, ktorý získame z F dosadením mena objektu o_1 za jej prvú, mena objektu o_2 za jej druhú, ... a mena objektu o_n za jej n-tú premennú, je pravdivý. Ak x je prvou, y druhou a z treťou premennou formy „x je matkou z a y je otcom z", tak trojica osôb $<O_1,O_2,O_3>$ s menami M_1, M_2, M_3 spĺňa túto formu práve vtedy, keď výrok „M_1 je matkou M_3 a M_2 je otcom M_3" je pravdivý. Ak x vyhlásime za prvú, z za druhú a y za tretiu premennú uvedenej formy, tak tá istá trojica $<O_1,O_2,O_3>$ ju spĺňa práve vtedy, keď M_1 je matkou M_2 a M_3 je otcom M_2.

Pri niektorých formách na poradí objektov o_1, ..., o_n v n-tici $<o_1,...,o_n>$ nezáleží, lebo platí, že táto n-tica spĺňa F práve vtedy, keď túto formu spĺňa ľubovoľná iná n-tica zložená z objektov o_1, ..., o_n (v tom zmysle, že každý z týchto objektov sa vyskytuje v n-tici). Napríklad dvojica $<o_1,o_2>$ spĺňa formu $Pr(x,y)$, kde Pr je predikát signifikujúci vzťah byť príbuzný, vtedy a len vtedy, keď ju spĺňa dvojica $<o_2,o_1>$. Ale aj v týchto prípadoch pokladáme spĺňanie za vzťah medzi *usporiadanými n-ticami* a výrokovými formami. Na druhej strane musíme pamätať na to, že v usporiadanej n-tici $<o_1,...,o_n>$ sa môžu niektoré objekty opakovať, presnejšie, objekt o_i môže byť totožný s objektom o_j, pričom $i \neq j$, a nie je vylúčený ani prípad $o_1 = o_2 = ... = o_n$. Napríklad formu „$x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3$" spĺňajú len tie usporiadané trojice $<o_1,o_2,o_3>$, pre ktoré platí, že $o_1 = o_2 = o_3$.

Pôvodne definovaný pojem spĺňania (na s. 204) je azda menej intuitívny, ale je jednoduchší ako pojem spĺňania výrokovej formy usporiadanými n-ticami. Navyše pomocou prvého možno druhý, intuitívnejší pojem spĺňania definovať. Ak F je výroková forma, v ktorej sa vyskytuje presne jedna premenná π, tak hovoríme, že **objekt o spĺňa formu** F práve vtedy, keď formu F spĺňa každé ohodnotenie, ktoré premennej π priraďuje objekt o. Ak F je *výroková* forma obsahujúca presne n rôznych premenných π_1, ..., π_n, pričom π_i je i-tou premennou formy F, tak **usporiadaná n-tica objektov $<o_1,...,o_n>$ spĺňa formu** F vtedy a len vtedy, keď formu F spĺňa každé ohodnotenie, ktoré premennej π_1 priraďuje objekt o_1, premennej π_2 – objekt o_2, ... a premennej π_n – objekt o_n. Napríklad, dvojica <M. Kováč, V. Mečiar> spĺňa formu „x_1 je starší ako x_2", v ktorej x_1 je

prvá a x_2 druhá premenná, lebo každé ohodnotenie priraďujúce premennej x_1 M. Kováča a premennej x_2 V. Mečiara spĺňa túto formu. Čitateľ si to môže ľahko overiť aplikáciou definície spĺňania a hodnoty formy pri danom ohodnotení na formu „x_1 je starší ako x_2".

13. **Kvantifikované výroky.** Vieme, že z výrokových foriem možno získať výroky tak, že za premenné, ktoré sa v nich vyskytujú, dosadíme indivíduové mená, konkrétne predikáty a výroky. Pritom musíme dbať jednak o kategoriálnu zhodu medzi premennými a za ne dosadzovanými výrazmi, jednak o to, aby sme za každý výskyt danej premennej dosadili ten istý výraz. Výroky možno však z výrokových foriem získať aj celkom iným spôsobom – tzv. **kvantifikáciou** ich premenných. V týchto výrokoch sa konštatuje, že pre každý objekt platí to a to, alebo že existuje aspoň jeden objekt (aspoň dva, aspoň tri, ... objekty), pre ktorý (pre ktoré) platí to a to a pod.

Predpokladajme, že F je výroková forma, v ktorej sa vyskytuje iba premenná x (na počte jej výskytov v F nezáleží). Keď túto formu vhodne spojíme s výrazom, akým je „pre každé x platí, že", alebo „existuje aspoň jedno x také, že", resp. „pre niektoré x platí, že" (tretí výraz je z logického hľadiska štylistickým variantom druhého), dostaneme výrazy „Pre každé x platí, že F", „Existuje aspoň jedno x také, že F". Namiesto prvého z týchto výrazov budeme písať iba $(\forall x)F$ a namiesto druhého $(\exists x)F$. Symbol $\forall$ sa nazýva **všeobecný** a symbol $\exists$ **existenčný kvantifikátor**. Teda $\forall$ je skratkou výrazu „pre každé ... platí, že" a $\exists$ skratkou pre „existuje aspoň jedno ... také, že". Ako v prípade niektorých spojok, logika aj tu nahrádza zložené zvraty prirodzeného jazyka jednoduchými symbolmi. Kvantifikátormi sú aj výrazy „existujú aspoň dva (tri, štyri, ...) objekty, pre ktoré platí, že", „existujú presne dva (tri, štyri, ...) objekty, pre ktoré platí, že", „existujú nanajvýš dva (tri, štyri, ...) objekty, pre ktoré platí, že", ktorými sa tu nebudeme zaoberať, poznamenávame však, že sú to napospol výrazy definovateľné pomocou kvantifikátorov $\forall$, $\exists$ a rovnosti $=$.

Jazykový cit nás jednoznačne (a správne) ubezpečuje o tom, že $(\forall x)F$, $(\exists x)F$ sú výrokové výrazy. Ide však o výroky s určitou pravdivostnou hodnotou alebo o výrokové formy, ktoré určitú pravdivostnú hodnotu nadobúdajú iba so zreteľom na nejaké ohodnotenie premenných? Všimnime si konkrétny príklad, v ktorom F predstavuje formu „x je Róm" a oborom premennosti premennej x je množina všetkých občanov SR (pripomíname, že určenie oboru premennosti patrí k sémantickej interpretácii premenných). Vzhľadom na obor premennosti premennej x výraz $(\forall x)(x$ je Róm) značí to isté ako „Pre každého občana

SR x platí, že x je Róm" a výraz $(\exists x)(x$ je Róm) to isté ako „Existuje aspoň jeden občan SR x taký, že x je Róm". V prvom výraze sa teda tvrdí, že každý občan SR je Róm, kým v druhom sa konštatuje, že niektorí občania SR sú Rómovia. Z toho je zrejmé, že $(\forall x)(x$ je Róm), $(\exists x)(x$ je Róm) sú výrazy s určitou pravdivostnou hodnotou (prvý je nepravdivý a druhý pravdivý) a že hoci sa v nich vyskytuje premenná x, otázka „Na koho sa vzťahuje premenná x?" prestáva byť v danej súvislosti relevantná.

Keby sme za obor premennosti premennej x zvolili množinu všetkých Slovanov (alebo Európanov, prípadne všetkých ľudí), výraz $(\forall x)(x$ je Róm) by znamenal to isté ako „Pre každého Slovana x platí, že x je Róm" (alebo „Pre každého Európana x platí, že x je Róm" či „Pre každého človeka x platí, že x je Róm"), čiže aj v tomto prípade (ako i v ďalších dvoch) by to bol výrok, a to nepravdivý. Zúžením oboru premennosti premennej x na množinu Rómov by sme získali tvrdenie, podľa ktorého pre každého Róma x platí, že x je Róm, teda tvrdenie, ktoré je triviálne pravdivé.

Napriek tomu, že vo výrazoch „$(\forall x)(x$ je Róm)", „$(\exists x)(x$ je Róm)" sa vyskytuje premenná, nesprávajú sa ako formy: kým forma „x je Róm" nadobúda určitú pravdivostnú hodnotu iba so zreteľom na priradenie nejakej hodnoty premennej x, výrazy „$(\forall x)(x$ je Róm)", „$(\exists x)(x$ je Róm)" sú plnohodnotné tvrdenia s určitou pravdivostnou hodnotou. Ich preklad do prirodzeného jazyka svedčí jednoznačne o tom, že sú to výroky. Od formy „x je Róm" sa líšia aj tým, že dosadením indivíduového mena za ich premennú x nezískame konkrétny výrok, ale nezmysel. Výrazy „($\forall$ M. Kováč)(M. Kováč je Róm)", „($\exists$ V. Mečiar) (V. Mečiar je Róm)" nie sú z logického hľadiska správne utvorené, a teda ani zmysluplné. Určitý zmysel nedáva ani nahradenie výrazov $\forall$, $\exists$ zodpovedajúcimi výrazmi prirodzeného jazyka, pravda, ak výrazy „M. Kováč" a „V. Mečiar" pokladáme v danom kontexte za jednoznačné indivíduové mená.

Medzi premennou x vo forme „x je Róm" a vo výroku „$(\forall x)(x$ je Róm)" je významný sémantický rozdiel, ktorý sa v logike odráža aj v terminológii. Hovoríme, že premenná x je vo výraze „$(\forall x)(x$ je Róm)" *viazaná* (kvantifikátorom $\forall$), kým vo forme „x je Róm" je *voľná*. Zámená „on", „ona" a pod. sa podobajú iba voľným premenným, pri prechode od voľných premenných k viazaným sa analógia medzi premennými a zámenami stráca. Viazanie premených kvantifikátormi nemá v prirodzenom jazyku nijakú zmysluplnú obdobu vo „viazaní" zámen výrazmi, ktoré v ňom zodpovedajú kvantifikátorom. Výsledkom pokusov o „viazanie" zámen sú nezmyselné výrazy, akými sú „Každý on je Róm",

„Niektorý on je Róm" a pod. Premenné sa viažu nielen kvantifikátormi, ale aj rôznymi inými operátormi, akými sú napr. „to jediné ... také, že" (operátor deskripcie), „vlastnosť tých ..., pre ktoré platí, že" (lambda operátor) a pod., pomocou ktorých sa konštruujú rozmanité nevýrokové výrazy.[3] V niektorých výrazoch sa vyskytujú viazané i voľné premenné, napr. vo výraze „$(\exists x)(x<y)$" x je viazaná (kvantifikátorom $\exists$) a y voľná premenná (lebo nie je viazaná nijakým kvantifikátorom ani iným operátorom). Neskôr uvidíme, že na rozdiel od viazanej premenej voľná premenná má i v tomto výraze podobné sémantické vlastnosti ako zámeno „on" alebo „ona".

Pojem voľnej a (kvantifikátorom) viazanej premennej možno presne vymedziť pomocou pojmu dosahu kvantifikátora. Výrokový výraz F vo výraze $(\forall\pi)(F)$ alebo $(\exists\pi)(F)$, ktorý sa nachádza za výrazom $(\forall\pi)$ alebo $(\exists\pi)$ *v zátvorkách*, sa nazýva **dosahom kvantifikátora** $\forall$ či $\exists$. Ak nehrozí nedorozumenie, zátvorky, v ktorých sa nachádza dosah kvantifikátora, sa môžu vynechať. Z intuitívneho hľadiska dosah kvantifikátora je výraz, na ktorý sa kvantifikátor „vzťahuje", resp. ktorého premenné kvantifikuje.

Viazaným výskytom premennej π vo výraze $(\forall\pi)F$, $(\exists\pi)F$ nazývame jednak jej výskyt bezprostredne za kvantifikátorom, jednak každý výskyt tejto premennej v dosahu kvantifikátora, teda vo výrokovom výraze F. Ak výskyt nejakej premennej vo výraze nie je viazaný, nazýva sa **voľný**. **Premenná** je v nejakom výraze **viazaná**, keď má v ňom aspoň jeden viazaný výskyt. Premenná, ktorá má vo výraze aspoň jeden voľný výskyt, sa nazýva **voľná.** Tá istá premenná môže byť vo výraze viazaná i voľná, ako napr. vo forme

$$(\exists x)(Sl(x) \wedge St(x)) \supset (\exists y)S(y,x),$$

v ktorej Sl, St a S sú predikáty signifikujúce vlastnosti byť Slovákom, byť študentom a byť starší. Tretí výskyt premennej x v tejto forme je voľný, ostatné sú viazané. Pomocou výrokových foriem, spojok a kvantifikátorov možno konštruovať neobmedzené množstvo rozličných výrokov tvaru $(\forall x)F$, $(\exists x)F$ a výrokov, v ktorých sa také výroky alebo formy tvaru $(\forall x)F$, $(\exists x)F$ (obsahujúce nejaké voľné premenné) vyskytujú ako ich zložky. Štruktúrna rozmanitosť týchto výrokov je nekonečná. Teraz stanovíme pravdivostné podmienky pre výroky tvaru $(\forall\pi)F$, $(\exists\pi)F$, kde π je ľubovoľná indivíduová premenná a F výroková forma, v ktorej je voľná *iba* premenná π.

Pravdivostná podmienka pre všeobecné výroky

Výrok tvaru $(\forall\pi)F$ je pravdivý práve vtedy, keď každý prvok z oboru premennosti premennej π spĺňa formu F (inak povedané, keď každé ohodnotenie spĺňa F).

Najprv sa pokúsime ukázať, že menej intuitívne tvrdenie uvedené v zátvorke pravdivostnej podmienky je ekvivalentné formulácii pred zátvorkou (čitateľ, ktorého problém tejto ekvivalentnosti nezaujíma, môže nasledujúcu časť tohto odseku preskočiť). Predpokladajme, že $\{i_1, i_2, ...\}$ je obor premennosti premennej π. Ohodnotenia priraďujúce premennej π indivíduum i_k budeme nazývať i_k-ohodnoteniami. Do množiny všetkých ohodnotení patria všetky i_1-ohodnotenia, všetky i_2-ohodnotenia, ... atď. a žiadne iné, lebo každé ohodnotenie priraďuje premennej π nejaký prvok množiny $\{i_1, i_2, ...\}$. Vieme, že prvok i_k z oboru premennosti premennej π spĺňa formu F práve vtedy, keď každé i_k-ohodnotenie spĺňa F. Ak formu F spĺňa každý z prvkov $i_1, i_2, ...$, tak túto formu spĺňa každé i_1-ohodnotenie, každé i_2-ohodnotenie, ... atď., a teda každé ohodnotenie, lebo iné ohodnotenia nejestvujú. A ak túto formu spĺňa každé ohodnotenie, tak ju spĺňa aj každé i_1-ohodnotenie, každé i_2-ohodnotenie, ... atď., z čoho vyplýva, že ju spĺňa každý prvok oboru premennosti premennej π. To znamená, že formu F spĺňa každý prvok z oboru premennosti premennej π vtedy a len vtedy, keď ju spĺňa každé ohodnotenie.

Aký je intuitívny zmysel uvedenej pravdivostnej podmienky? Ak $(\forall x)F(x)$ je pravdivý výrok, tak o každom prvku i z oblasti premennosti premennej x platí, že $F(i)$, z čoho vyplýva, že každý prvok i spĺňa $F(x)$. Obrátene, ak každý prvok i z oblasti premennosti premennej x spĺňa $F(x)$, tak o každom platí $F(i)$, takže je pravda, že $(\forall x)F(x)$.

Pokúsme sa teraz druhú, v zátvorke uvedenú formuláciu pravdivostnej podmienky uplatniť na konkrétny príklad. Predpokladajme, že F je forma „(x býva v Prešove) $\supset$ (x býva vo východoslovenskom kraji)" a oborom premennosti premennej x je množina občanov SR. Je zrejmé, že táto forma nadobúda hodnotu **1** pri každom ohodnotení, lebo ak v je ľubovoľné ohodnotenie, tak v priraďuje premennej x buď občana SR, ktorý býva v Prešove alebo občana bývajúceho mimo Prešova. V prvom prípade konzekvent uvedenej implikácie nadobúda hodnotu **1** a preto ju nadobúda i celá implikácia; v druhom prípade antecedent nadobúda hodnotu **0** a preto celá implikácia tiež nadobúda hodnotu **1**. Teda každé ohodnotenie spĺňa formu „(x býva v Prešove) $\supset$ (x býva vo východoslovenskom kraji)", z čoho vyplýva, že výrok $(\forall x)F(x)$ je pravdivý. K tomu istému

záveru by sme prišli aplikáciou prvej formulácie pravdivostnej podmienky (uvedenej pred zátvorkou), čo prenecháme čitateľovi.

Pravdivostná podmienka pre existenčné výroky

Výrok tvaru $(\exists\pi)F$, kde F je výroková forma s jednou voľnou premennou π, je pravdivý práve vtedy, keď aspoň jeden objekt z oboru premennosti premennej π spĺňa formu F (teda keď aspoň jedno ohodnotenie spĺňa F).

Intuitívny zmysel tejto podmienky je celkom jasný. Z pravdivosti výroku $(\exists x)F(x)$ vyplýva, že v obore premennosti premennej x existuje objekt i, o ktorom platí $F(i)$, z čoho vyplýva, že i spĺňa $F(x)$, takže existuje aspoň jeden objekt, ktorý spĺňa $F(x)$. Na druhej strane, ak existuje objekt i spĺňajúci formu $F(x)$, tak o i platí $F(i)$, z čoho vyplýva pravdivosť výroku $(\exists x)F(x)$. Treba podotknúť, že pravdivostnými podmienkami pre molekulárne, existenčné a všeobecné výroky sa vymedzuje význam príslušných spojok a kvantifikátorov. Každá z týchto podmienok určuje, aký vplyv má spojka alebo kvantifikátor na pravdivosť či nepravdivosť výroku, v ktorom sa vyskytuje (na mieste danom podmienkou) – iné významové komponenty do významu extenzionálnych spojok a kvantifikátorov totiž nevstupujú.

Keď obor premennosti premennej π obsahuje iba konečný počet prvkov o_1, ..., o_n, tak z významu výrokov $(\forall\pi)F(\pi)$, $(\exists\pi)F(\pi)$ (v ktorých $F(\pi)$ je ľubovoľná výroková forma s voľnou premennou π) vyplývajú tieto ekvivalencie:

(1) $(\forall\pi)F(\pi) \equiv F(o_1) \wedge F(o_2) \wedge \ldots \wedge F(o_n)$
(2) $(\exists\pi)F(\pi) \equiv F(o_1) \vee F(o_2) \vee \ldots \vee F(o_n)$

To znamená, že v jazykoch s konečným univerzom sa môžeme (aspoň teoreticky) bez kvantifikátorov zaobísť, hoci ich používanie je aj v nich veľmi účelné, lebo nám umožňuje vyjadrovať sa podstatne stručnejšie.

14. **Kategorické výroky**. Vráťme sa teraz ku kategorickým výrokom, o ktorých sme sa zmienili vo IV. pokračovaní tohto výkladu.[4] Upozornili sme tam čitateľa na skutočnosť, že logická skladba kategorických výrokov nie je vo formách

Každé S je P,
Niektoré S je P,

Žiadne S nie je P,
Niektoré S nie je P

zachytená celkom adekvátne. V modernej extenzionálnej logike sa kategorické výroky (zvyčajne) analyzujú pomocou premenných, kvantifikátorov a výrokových spojok takto:

(1*) Každé S je P – $(\forall x)(S(x) \supset P(x))$
(2*) Niektoré S je P – $(\exists x)(S(x) \wedge P(x))$
(3*) Žiadne S nie je P – $(\forall x)(S(x) \supset \sim P(x))$
(4*) Niektoré S nie je P – $(\exists x)(S(x) \wedge \sim P(x))$

Namiesto premennej x by sa v týchto formách mohla vyskytovať ľubovoľná iná indivíduová premenná. Spôsob, akým sa v (1*) analyzujú výroky tvaru „Každé S je P", často zvádza k domnienke, že výroky formy „Niektoré S je (nie je) P" treba pokladať za implikácie kvantifikované existenčným kvantifikátorom. Ľahko sa možno presvedčiť, že táto domnienka je nesprávna. Keď nepravdivý výrok „Niektorí Slováci sú astronauti" prepíšeme na $(\exists x)(S(x) \supset A(x))$, získame formálny výraz, ktorý je na rozdiel od pôvodného výroku pravdivý, lebo každé ohodnotenie, ktoré premennej x priraďuje nejakého neslováka, spĺňa formu $S(x) \supset A(x)$ (pri takom ohodnotení antecedent nadobúda hodnotu **0** a celá implikácia hodnotu **1**). Lenže výsledkom adekvátnej analýzy nemôže byť výrok, ktorý má inú pravdivostnú hodnotu ako analyzovaný výrok, a preto musíme naznačený rozbor výroku „Niektoré S sú P" zavrhnúť ako neadekvátny (a z toho istého dôvodu aj pokus o analogický rozbor výroku „Niektoré S nie sú P").

Z interpretácie výroku „Niektoré S sú P" uvedenej v (2*) vyplýva, že tento výrok je pravdivý aj vtedy, keď všetky S sú P.

Upozorňujeme čitateľa, že výraz „niektoré" má v slovenčine aj užší význam, ktorý možno explicitne vyjadriť formuláciou „Niektoré, ale nie všetky S sú P" alebo formulou

(2**) $(\exists x)(S(x) \wedge P(x)) \wedge \sim (\forall x)(S(x) \supset P(x))$.

Táto dvojznačnosť výrazu „niektorí" sa prenáša aj na výrok „Niektoré S nie sú P", ktorý je podľa (4*) pravdivý aj vtedy, keď žiadne S nie je P. Výrok

„Niektoré S nie sú P" môže mať aj užší význam vyjadrený výrokom „Niektoré, ale nie všetky S nie sú P", prípadne formulou

$$(4^{**})\ (\exists x)(Sx \wedge \sim Px) \wedge (\exists x)(S(x) \wedge P(x)).$$

15. **Hodnota kvantifikovaných výrokových foriem**. Obráťme teraz pozornosť na výrazy, v ktorých sa vyskytujú voľné i viazané premenné. Všimnime si výraz „$(\exists x)(Sl(x) \wedge Vyš(x,y))$", v ktorom sa vyskytuje viazaná premenná x a voľná premenná y (pripomíname, že predikát Sl signifikuje vlastnosť byť Slovákom a predikát $Vyš$ vzťah byť vyšší). Keď za obor premennosti premenných x, y zvolíme množinu ľudí, celý výraz bude znamenať to isté ako veta

Existuje človek x, ktorý je Slovák a je vyšší ako y.

Z jeho stavby i významu je zrejmé, že je to výrokový výraz. Je to však výrok s určitou pravdivostnou hodnotou alebo výroková forma, ktorej hodnota závisí od ohodnotenia premenných? Do prirodzeného jazyka by sme ho mohli preložiť vetou

Existuje človek, ktorý je Slovák a je vyšší ako on (ona)

alebo vetou

Niekto (nejaký človek) je Slovák a je vyšší ako on (ona).

Mimo kontextu, ktorý by bližšie určil, na koho sa vzťahuje zámeno „on" („ona"), týmto vetám nemožno pripísať nijakú pravdivostnú hodnotu. Na druhej strane však stačí priradiť zámenu určitú osobu O a veta sa stane pravdivou či nepravdivou v závislosti od toho, či nejaký Slovák je vyšší ako O. Ak niet Slováka, ktorý by bol vyšší ako osoba O, tak veta je nepravdivá, v opačnom prípade je pravdivá. Po priradení osoby O zámenu „on" či „ona" táto veta sa stane ekvivalentnou vete „Existuje človek, ktorý je Slovák a je vyšší ako M", v ktorej M je meno osoby O.

Podobné vlastnosti ako veta „Existuje človek, ktorý je Slovák a je vyšší ako on" má výraz „$(\exists x)(Sl(x) \wedge Vyš(x,y))$". Kým nie je jasné, na koho sa vzťahuje premenná y, na otázku, či je pravdivý, nemožno dať ani kladnú ani zápornú

odpoveď. Je to forma, ktorá nadobudne určitú pravdivostnú hodnotu až po priradení nejakej hodnoty premennej y. Na druhej strane výraz „$(\exists x)(\exists y)(Sl(x) \wedge Vyš(x,y))$" je výrok, v ktorom sa konštatuje, že existuje človek x a človek y, o ktorých platí, že x je Slovák a je vyšší ako y, čo možno formulovať aj tak, že nejaký Slovák je vyšší ako nejaký človek. Tento výrok je očividne pravdivý, lebo existuje Slovák, ktorý je od niekoho vyšší, napr. slovenský prezident M. Kováč je vyšší ako V. Havel.

Teda hoci sa v tomto výrokovom výraze vyskytujú premenné, sám výraz nie je forma, ale výrok s určitou pravdivostnou hodnotou, ktorý sa od formy líši predovšetkým tým, že žiadna z jeho premenných nie je v ňom voľná. Keď sa však vo výrokovom výraze vyskytuje aspoň jedna voľná premenná, výraz je forma, ktorej hodnotu možno určiť iba so zreteľom na ohodnotenie premenných. Za voľné premenné môžeme dosadzovať konštantné výrazy a tým získať konkrétne výroky, ktoré majú tú istú formu, ale dosadzovanie konštantných výrazov za viazané premenné nemá zmysel – výsledkom takého dosadenia by nebol výrok, ale nezmyselný, nesprávne utvorený výraz.

Z výsledkov skúmania uvedených príkladov je zrejmé, že výrokový výraz nie je výrok, ale forma práve vtedy, keď sa v ňom vyskytuje aspoň jedna voľná premenná. Ako sme už podotkli, premenné môžu byť viazané nielen kvantifikátormi, ale aj inými operátormi, pomocou ktorých sa konštruujú výrazy rôznych nevýrokových kategórií. Hoci sme sa nimi ešte nezaoberali, už teraz môžeme našu úvahu o výrokových formách a výrokoch zovšeobecniť a **formu** definovať ako výraz, v ktorom sa vyskytuje aspoň jedna voľná premenná, teda premenná, ktorá nie je viazaná nijakým kvantifikátorom ani iným operátorom viažúcim premenné.

Zistili sme, že hodnota výrazu, v ktorom sú viazané i voľné premenné, závisí od ohodnotenia premenných. Hodnotu ľubovoľnej formy F pri ohodnotení v sme pôvodne vymedzili ako denotát výrazu F^*, ktorý možno získať z F dosadením mien (ohodnotením v) priradených hodnôt za premenné formy F. Vtedy sme ešte nerozlišovali medzi voľnými a viazanými premennými, ale z uvádzaných príkladov i celého kontextu je zrejmé, že sme uvažovali iba o formách s voľnými premennými. Po zavedení viazaných premenných sa pred nami vynára problém, ako vymedziť pojem hodnoty formy, v ktorej sa vyskytujú nielen voľné, ale i viazané premenné. Našu pozornosť pritom obmedzíme výlučne na výrokové formy, širší záber by bol predčasný a naše úvahy by iba skomplikoval.

Keďže dosadzovanie za viazané premenné nemá zmysel, hodnotu formy F pri ohodnotení v nemôžeme definovať predchádzajúcim spôsobom. Vieme však, že výroková forma s viazanými i voľnými premennými sa zmení na výrok už po dosadení konštantných výrazov za všetky jej *voľné* premenné. So zreteľom na to by sme mohli hodnotu výrokovej formy F pri ohodnotení v, obsahujúcej voľné i viazané premenné, vymedziť ako denotát výroku F^*, ktorý možno z formy F získať tak, že za každú jej *voľnú premennú* dosadíme meno objektu, ktorý jej priraďuje ohodnotenie v. Od pôvodného pojmu hodnoty sa tento líši iba explicitnou zmienkou o *voľných* premenných formy F. Podobne by sme mohli vymedziť všeobecný pojem hodnoty formy ľubovoľnej inej (nevýrokovej) kategórie.

V 11. časti nášho výkladu sme ohodnotenie premenných, ktoré berieme do úvahy pri hľadaní hodnoty nejakej formy F, prirovnali k dotyku nekonečného množstva tykadiel, ktoré svojím dotykom premenia premenné formy F na mená ohodnotením priradených objektov a jej hodnotu sme stotožnili s denotátom výrazu F^*, na ktorý sa forma F zmení pod dotykom tohto ohodnotenia. Podotkli sme tiež, že na mená sa pritom zmenia iba jej voľné premenné. Teraz môžeme dodať, že zmena viazaných premenných na mená by bola jednak zbytočná, pretože forma sa už po nahradení voľných premenných menami priradených hodnôt stáva výrazom s určitým denotátom, jednak nežiadúca, lebo nahradenie viazaných premenných konštantnými výrazmi premení zmysluplný výraz na syntakticko-sémantický nonsens.

Z doterajšieho výkladu i uvedeného vymedzenia hodnoty formy by mohol vzniknúť klamný dojem, že pri hľadaní hodnoty formy s voľnými i viazanými premennými nemusíme o hodnotách viazaných premenných vôbec uvažovať, resp. že ohodnotenia týchto premenných tu nezohrávajú nijakú rolu. Pritom vieme, že ohodnotenie priraďuje nejakú hodnotu každej premennej daného jazyka a teda i viazaným premenným uvažovanej formy. Teraz ukážeme, že hodnota formy s voľnými i viazanými premennými závisí, resp. môže závisieť aj od toho, čo dané ohodnotenie a iné s ním súvisiace ohodnotenia priraďujú jej viazaným premenným. Našu pozornosť však zúžime na výrokové formy s jedným kvantifikátorom na jej začiatku. Najprv si všimneme niekoľko jednoduchých príkladov a potom uvedieme všeobecnú podmienku, ktorá určuje závislosť hodnoty ľubovoľnej výrokovej formy tvaru $(\forall\pi)F(\pi,\pi_1,...,\pi_n)$ alebo $(\exists\pi)F(\pi,\pi_1,...,\pi_n)$ od ohodnotenia všetkých jej premenných.

Predpokladajme, že oborom premennosti indivíduových premenných x, y (a teda aj univerzom jazyka, do ktorého patria) je množina čísel $\{0,1,...,9\}$ a $<$ je

známy predikát denotujúci reláciu byť menší obmedzenú na túto množinu. Nech v je ohodnotenie priraďujúce premennej x číslo 5 a premennej y číslo 2. Vieme, že hodnotou formy $x<y$ pri tomto ohodnotení je pravdivostná hodnota **0**, lebo výrok „5<2" je nepravdivý. Ľahko možno zistiť, že hodnotou formy $(\exists x)x<y$ pri tom istom ohodnotení v nie je **0**, ale **1**. Ako je to možné, keď v priraďuje premennej x väčšie číslo ako premennej y? Vysvetlenie je jednoduché: v obore premennosti premennej x existuje číslo, ktoré je menšie ako 2 a existenčný kvantifikátor, ktorý ju viaže, poukazuje na to, že existencia takého čísla v jej obore stačí na to, aby forma $(\exists x)x<y$ nadobúdala hodnotu **1** aj pri ohodnotení v, ktoré premennej x priraďuje číslo 5 a premennej y číslo 2. Inak povedané, hodnota formy $(\exists x)x<y$ pri v je **1**, keď v obore premennosti premennej x viazanej *existenčným* kvantifikátorom *existuje* číslo menšie ako hodnota priradená ohodnotením v *voľnej* premennej x. To znamená, že hodnota formy $(\exists x)x<y$ pri danom v nie je určená len tým, čo viazanej premennej x priraďuje v, ale aj tým, či v obore premennosti x jestvuje číslo menšie ako hodnota voľnej premennej y pri v. Ak také číslo existuje, tak hoci hodnota priradená premennej x nie je menšia ako 2, hodnota celej formy je **1**. Mohli by sme to formulovať aj tak, že forma $(\exists x)x<y$ nadobúda pri v hodnotu **1** práve vtedy, keď existuje také ohodnotenie v^* líšiace sa od v *nanajvýš* tým, čo priraďuje *viazanej* premennej x, pri ktorom forma $x<y$ nadobúda hodnotu **1**. Treba zdôrazniť, že ohodnotenie v^* priraďuje voľnej premennej y tú istú hodnotu ako v.

Na druhej strane, ak v je ohodnotenie priraďujúce premennej x číslo 2 a premennej y číslo 5, hodnota formy $x<y$ pri v bude síce **1**, ale hodnota formy $(\forall x)x<y$ pri tom istom v bude **0**, lebo nie je pravda, že každá hodnota premennej x viazanej všeobecným kvantifikátorom je menšia ako číslo 5 priradené voľnej premennej y. Forma $(\forall x)x<y$ nadobúda pri nejakom v hodnotu **1** iba vtedy, keď *každá* hodnota premennej x viazanej *všeobecným* kvantifikátorom je menšia ako hodnota voľnej premennej y pri v. Presnejšie, forma $(\forall x)x<y$ nadobúda pri v hodnotu **1** práve vtedy, keď pre každé ohodnotenie v^* líšiace sa od v nanajvýš tým, čo priraďuje *viazanej* premennej x, platí, že hodnotou $x<y$ pri v^* je **1**. Ľahko možno zistiť, že forma $(\forall x)x<y$ nenadobúda hodnotu **1** pri žiadnom v, lebo aj keď v priraďuje premennej y najväčšie číslo z oboru jej premennosti, jedno z ohodnotení v^* nespĺňa formu $x<y$, a to ohodnotenie, ktoré premennej x priraďuje číslo 9. Aj v tomto prípade každé ohodnotenie v^* priraďuje voľnej premennej y tú istú hodnotu ako v. Keby sa v uvažovanej forme vyskytovali aj iné voľné premenné ako y, každé ohodnotenie v^* by im priraďovalo tú istú hodnotu ako v.

Keďže v^* sa od v líši *nanajvýš* tým, čo priraďuje viazanej premennej x, aj v je jedno z „hviezdičkových" ohodnotení, lebo sa ničím nelíši od v. Forma $(\exists x)x<y$ nadobúda hodnotu **1** pri každom v, ktoré priraďuje premennej x menšie číslo ako premennej y (no nielen pri takom v), lebo už samo také v je ohodnotením, ktoré spĺňa formu $x<y$ a je jedným z ohodnotení, ktoré sa od v líšia nanajvýš tým, čo priraďujú viazanej premennej x. Ak v priraďuje premennej y číslo 0, tak bez ohľadu na to, čo priraďuje premennej x, forma $(\exists x)x<y$ nadobúda pri v hodnotu nepravda, lebo v obore premennosti x niet čísla, ktoré by bolo menšie ako 0, teda niet ani ohodnotenia v^*, pri ktorom by forma $x<y$ mala hodnotu **1**. Formu $(\exists x)x\leq y$ spĺňa zasa každé ohodnotenie v, lebo bez ohľadu na to, čo v priradí premennej y, v obore premennosti premennej x sa vždy nájde číslo, ktoré je menšie alebo rovné číslu priradenému premennej y, takže existuje v^*, pri ktorom má forma $x\leq y$ hodnotu **1**.

Pokúsme sa získané výsledky trochu zovšeobecniť. Predpokladajme, že $F(x,y)$ je výroková forma, v ktorej sa vyskytujú dve voľné premenné x, y. Ak ohodnotenie v spĺňa formu $F(x,y)$ (čiže táto forma má hodnotu **1** pri v), tak forma $(\exists x)F(x, y)$ má pri v hodnotu **1** – jedným z ohodnotení s hviezdičkou je samo v. Ak forma $F(x,y)$ nadobúda pri v hodnotu **0**, tak hodnotou formy $(\exists x)F(x,y)$ môže byť **1** alebo **0** v závislosti od toho, či *existuje* alebo *neexistuje* ohodnotenie v^* spĺňajúce formu $F(x,y)$.

S formou $(\forall x)F(x,y)$ je to v istom zmysle naopak. Ak $F(x,y)$ nadobúda pri v hodnotu **0**, tak hodnotou formy $(\forall x)F(x,y)$ pri v je tiež **0**, lebo v je jedným z ohodnotení s hviezdičkou, ktoré nespĺňajú $F(x,y)$. Ak ohodnotenie v spĺňa formu $F(x,y)$, tak hodnotou formy $(\forall x)F(x,y)$ pri v môže byť **1** alebo **0** v závislosti od toho, či *každé* alebo *nie každé* v^* spĺňa formu $F(x,y)$.

Teraz môžeme pristúpiť k všeobecnému vymedzeniu hodnoty kvantifikovaných výrokových foriem s kvantifikátorom na začiatku. Predpokladajme, že $F(\pi,\pi_1,\ldots,\pi_n)$ je výroková forma, v ktorej sa voľne vyskytujú iba premenné π, $\pi_1,\ldots,\pi_n$.

Výroková forma $(\exists\pi)F(\pi,\pi_1,\ldots,\pi_n)$ nadobúda pri ohodnotení v hodnotu **1** práve vtedy, keď *existuje* ohodnotenie v^* líšiace sa od v nanajvýš tým, čo priraďuje viazanej premennej π, pri ktorom má forma $F(\pi,\pi_1,\ldots,\pi_n)$ hodnotu **1**.

Výroková forma $(\forall\pi)F(\pi,\pi_1,\ldots,\pi_n)$ nadobúda pri ohodnotení v hodnotu **1** práve vtedy, keď forma $F(\pi,\pi_1,\ldots,\pi_n)$ nadobúda hodnotu **1** pri *každom* ohodnotení v^*, ktoré sa od v líši nanajvýš tým, akú hodnotu priraďuje viazanej premennej π.

Na záver treba podotknúť, že pozornosť, ktorú sme venovali formám, nie je vôbec prehnaná. Bez elementárnych poznatkov o formách nemožno adekvátne pochopiť nielen logickú štruktúru výrokov a ich významov (súdov v logickom zmysle slova), ale ani stavbu nekonečného množstva rozmanitých pojmov a výrazov, pomocou ktorých pojmy vyjadrujeme. Na tieto výrazy a ich významy sústredíme pozornosť v nasledujúcich dvoch pokračovaniach tohto výkladu.

POZNÁMKY

[1] O problémoch spätých s rozborom logickej stavby výrazov prirodzeného jazyka pozri [1], 149-150. Pri konštruovaní foriem týchto výrazov narážame na tie isté alebo veľmi podobné problémy.

[2] Pojem spĺňania prvý exaktne definoval A. Tarski, ktorý ho zaviedol najmä preto, aby pomocou neho mohol definovať pojem pravdy (pozri jeho stať [3]). V našom výklade postupujeme v istom zmysle opačne – pomocou pojmu pravdivostnej hodnoty pravda a iných pojmov definujeme pojem spĺňania.

[3] Termín „operátor" má v logike viacej významov. Niekedy sa operátormi nazývajú výrazy, akými sú výrokové spojky, a niekedy výrazy, ktoré viažu premenné. V druhom význame sa tento termín používa častejšie.

[4] Pozri [2], 367-368.

LITERATÚRA

[1] CMOREJ, P. (1994): Z logickej syntaxe a sémantiky (II). **Organon F** 1, č. 2, 149-159.
[2] CMOREJ, P. (1994): Z logickej syntaxe a sémantiky (IV). **Organon F** 1, č. 4, 363-372.
[3] TARSKI, A. (1995): Sémantická koncepcia pravdy a základy sémantiky. **Organon F** 2, č.1, 18-54.