Carnapova modální logika C

Vít Punčochář[1]

Abstract: In this paper, we present Carnap's modal logic *C*, which is one of the first attempts to use the concept of possible world (that of state description in the Carnapian original terminology) in shaping the semantics for modalities. Some older technical results, which concern the logic *C*, are summarized, namely two different kinds of axiomatization of *C*, one unusual characterization of *C* as the only set of formulae having one special property, and semantical and syntactical relations of *C* to *S5*. The fact that *C* is not closed under the universal substitution is shortly discussed. Finally, the predicate version of *C*, which is not axiomatizable, is defined.

Keywords: Carnap, modal logic, logic *C*, logic *S5*, possible worlds, substitution.

1 Úvod

Když Rudolf Carnap pracoval na své teorii významu, kterou prezentoval především v Carnap (1946), potřeboval pro tento účel explikovat pojem logické pravdivosti. Protože mu tento pojem splýval s Kantovým pojmem analytické pravdivosti, mohl se při explikaci řídit kritériem analytičnosti, které měl k dispozici. Toto kritérium můžeme rekonstruovat takto: Věta *V* je logicky pravdivá v sémantickém systému *S* právě tehdy, když *V* je v *S* analyticky pravdivá, tj. když *V* je zde pravdivá a její pravdivost je založena čistě na sémantických pravidlech systému *S* bez jakéhokoli odkazu k mimojazykovým faktům.

[1] Tento článek vznikl s podporou grantu č. 401/09/H007 „Logické základy sémantiky" Grantové agentury ČR.

Každá dobrá explikace logické pravdivosti by dle Carnapa měla být v souladu s tímto kritériem. A zdá se, že je možné toto kritérium ekvivalentně vyjádřit způsobem, který již přímo vede k přesnější definici. Postačí, když sémantická pravidla jazykového systému vymezí fixně určitou třídu interpretací či modelů. Tyto interpretace představují všechny *možné* situace či stavy věcí, na které se jazyk potenciálně vztahuje. Pak platí, že pokud je něco pravdivé již na základě sémantických pravidel daného jazyka, musí to být pravdivé za každé situace, kterou tento jazyk připouští. A předpokládáme-li, že o tom, které situace jazyk připouští, rozhodují právě pravidla tohoto jazyka, pak platí-li něco ve všech přípustných situacích, je to pravdivé čistě na základě jazykových pravidel. Ekvivalentním kritériem tedy je: Věta *V* je logicky pravdivá v sémantickém systému *S* právě tehdy, když *V* je pravdivá ve všech možných situacích či stavech, na které se tento systém vztahuje.

Zbývá tedy pro daný systém přesně uchopit, co je to možná situace. Carnap si přál, aby stavy byly reprezentovány svým úplným popisem. Definoval popisy stavů jako množiny literálů (tj. atomických vět a jejich negací) takové, že pro každou atomickou větu je v každém popisu stavu obsažena buď ona sama, nebo její negace (ale ne obojí). Množina těchto popisů stavů tedy koresponduje s množinou ohodnocení atomů. Pro výrokovou logiku je toto uchopení stavu pomocí jeho deskripce neproblematické. Carnap však užívá tohoto postupu i pro jazyk, který odpovídá logice predikátové. Zde nastávají známé komplikace s tím, že každý objekt musí mít své jméno, aby atomické věty mohly skutečně věrně a kompletně zachytit popisovanou strukturu či stav. Tyto potíže však můžeme nechat stranou, protože se zaměříme především na logiku výrokovou. Pouze v závěru se krátce zmíníme o logice predikátové a budeme se držet modernějšího přístupu.

Pro výrokovou logiku jsme získali kritérium logické pravdivosti, které je dnes zcela běžné. Formule je logicky pravdivá právě tehdy, když je pravdivá v každém popisu stavů, to znamená, když je pravdivá při každém ohodnocení svých atomů.

Pojem logické pravdivosti je pro Carnapovu teorii velmi důležitý. Je v něm fundována celá intenzionální vrstva významu. Pomocí logické pravdivosti je totiž definována logická ekvivalence designátorů stejného typu.[2] A logická ekvivalence designátorů je kritériem identity jejich intenzí.

Pro nás je nyní podstatné, že logická pravdivost je metajazykový pojem, jehož přímočarým převedením do objektového jazyka získal Carnap operátor (logické) nutnosti. Můžeme tedy říci, že tento autor jako jeden z prvních moderních logiků založil formální sémantiku modální výrokové logiky na leibnizovské ideji možných světů. Carnapovo jednoduché rozšíření klasické logiky na modální, prezentované v článku Carnap (1946) a v knize Carnap (1947), vypadá tak, že přidáme do jazyka operátor nutnosti ($\Box$) a zavedeme pro něj sémantické pravidlo: Formule $\Box\theta$ je pravdivá v daném popisu stavu právě tehdy, když θ je logicky pravdivá, tj. právě tehdy, když θ je pravdivá ve všech popisech stavů. Na základě toho získáme pravidlo pro odvozený operátor možnosti ($\Diamond$): Formule $\Diamond\theta$ je pravdivá v daném popisu stavů právě tehdy, když θ je pravdivá v nějakém popisu stavů.

V dřívější syntaktické fázi vývoje moderní modální logiky nebylo k dispozici žádné přesně vymezené kritérium tohoto typu. Logici se přeli v otázkách, který axiom je intuitivně přijatelný a který nikoli. Avšak nebyla tu žádná společná báze, na základě které by tyto otázky mohly být rozhodnuty. Carnap podává kritérium a základ pro precizní zdůvodnění přijetí či zamítnutí nějaké logické formule. Jak např. rozhodnout otázku, že axiom (4), tj. schéma $\Box\theta \rightarrow \Box\Box\theta$, má být uznán jako korektní? Jeho dřívější zavedení bylo motivováno čistě technicky. Lewis v Lewis (1932) zavedl systém *S4* (obsahující tento axiom) na základě toho, že Becker v Becker (1930) ukázal, jak v něm redukovat řetězce modalit. Carnap v rámci své sémantiky podal filosoficky zajímavější zdůvodnění: Předpokládáme-li, že věta (či formule) $\Box\theta$ je pravdivá, znamená to, že věta θ je logicky pravdivá, tj. pravdivá čistě na základě sémantických pravidel, bez ohledu na mimojazykovou skutečnost. Ale to, že je věta θ logicky pravdivá, je určeno také pouze na základě sémantických pravidel. Tedy věta $\Box\theta$ je nejen pravdivá, ale dokonce logicky pravdivá. To znamená, že věta $\Box\Box\theta$ je pravdivá. Jedná se o jedno z prvních sémantických zdůvodnění axiomu (4).

[2] Designátory jsou jazykové výrazy, u nichž předpokládáme nějaký význam, tj. na něž má být aplikována analýza významu. Jsou to např. individuové výrazy, predikáty, funktory, věty.

Podobně lze v Carnapově logice, která dnes bývá označována písmenem *C*, zdůvodnit platnost všech formulí dokazatelných v Lewisově kalkulu *S5*. Stačí ověřit platnost jeho axiomů (resp. axiomů jeho moderní verze), tj. všech formulí, které mají tvar klasické tautologie a dále schémat:

(K) $\Box(\theta \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\theta \rightarrow \Box\psi)$,
(T) $\Box\theta \rightarrow \theta$,
(5) $\Diamond\theta \rightarrow \Box\Diamond\theta$.

A také to, že pravidla tohoto kalkulu – necesitace (tj. θ / $\Box\theta$) a modus ponens – jsou korektními odvozovacími pravidly. Logika *S5* je často používána pro filosofické účely,[3] protože se má za to, že je nejpřímočařeji spojena s pojetím ontologické nutnosti jako platnosti ve všech možných světech.

Jak záhy uvidíme, není tomu tak, že by logiky *C* a *S5* byly zcela ekvivalentní. Avšak někteří autoři upozorňují na to, že jejich odlišnost bývá v literatuře velmi často opomíjena (viz např. Hendry - Pokriefka 1985, 111 či Schurz 2000, 1 a 4). Poukazují především na expozici Carnapovy modální logiky, jejímž autorem je Robert Feys (Feys 1963). V tomto článku Feys chybně zcela ztotožňuje *C* s *S5* (viz 1963, 286). V naší literatuře lze podobné ztotožnění také dohledat (viz Běhounek 2005, 62). Rozdíl není patrný např. ani v moderní učebnici modální logiky (Blackburn – de Rijke – Venema 2001, 40).

Zdá se tedy, že existuje obecný sklon považovat Carnapovu modální logiku za logiku *S5*. K tomu jistě přispěl sám Carnap, který v (1946, 40 a 41) sám činí nečekaně určitý krok, kterým obě logiky v jistém smyslu ztotožňuje. Tento krok však nechává bez komentáře a nijak výslovně neupozorňuje na to, že se tím začíná rozcházet se svým dříve vymezeným pojmem logické pravdivosti. K tomu se vyjádříme podrobněji v komentáři k páté větě.

Z právě uvedených důvodů, a také proto, že v našem prostředí je logika *C* prakticky neznámá, považuji za vhodné srovnat několik starších výsledků vyjadřujících silný vztah *C* k *S5* a na jejich základě poukázat také na podstatné rozdíly, které mezi těmito logikami existují. To je jedním z cílů tohoto článku. Při té příležitosti také předložím

3 Např. Gödelův důkaz boží existence je proveden v *S5*.

vlastní epistemickou interpretaci logiky *S5*, která je v kontrastu s jejím běžným ontologickým pojetím.

Vedle zmíněných nejasností obvykle bývá Carnapův přístup považován spíše za pouhou anticipaci. Teprve kripkovská sémantika je chápána jako adekvátní modelově teoretické založení logiky modalit. Dalším cílem článku je naopak prezentovat *C* jako plnohodnotnou logiku, která je sice v rozporu s některými tradičními požadavky jako je uzavřenost na substituci (definováno níže), ale která také splňuje určitá základní očekávání. Protože je tato logika velmi jednoduchá a kontroverzní zároveň, může být dobrým podnětem k zvážení některých filosofických otázek týkajících se logiky vůbec.

2 Axiomatizace *C* a sémantický vztah *C* k *S5*

Při výkladu a dokazování budeme nejprve postupovat podle článku (1985) autorů Hendryho a Pokriefky, kde se připravuje půda pro předvedení jednoho ze vztahů k logice *S5* tím, že se definuje sémantika modalit obecnějším způsobem, než jak to původně učinil Carnap.

Pracujeme tedy s jazykem modální výrokové logiky. Máme k dispozici spočetnou množinu atomů $At = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Základní spojky jsou $\neg$, $\&$, $\Box$, ostatní jsou definované běžným způsobem. Množinu všech formulí v tomto jazyce označíme *Fle*(*MVL*). Použijeme alternativní definici popisu stavu: Popis stavu je libovolná množina atomů. Induktivně definujeme relaci $\models$. Nechť Δ je neprázdná množina popisů stavů a $s \in \Delta$.

$\Delta, s \models p$ iff $p \in s$, pro každé $p \in At$,
$\Delta, s \models \theta \,\&\, \psi$ iff $\Delta, s \models \theta$ a $\Delta, s \models \psi$,
$\Delta, s \models \neg\theta$ iff neplatí $\Delta, s \models \theta$,
$\Delta, s \models \Box\theta$ iff pro každé $t \in \Delta$ platí $\Delta, t \models \theta$.

Řekneme, že θ je Δ-platná, když pro každé $t \in \Delta$ platí $\Delta, t \models \theta$. Sémantiku Carnapovy modální výrokové logiky *C* získáme tak, že za Δ položíme množinu všech popisů stavů. Tuto množinu označíme $\Delta(C)$.

Ihned poukážeme na jednu zvláštnost Δ-logik. Definujeme následující pojem. Substituce je každá funkce $sub\colon At \to Fle(MVL)$. *Sub* je množina všech takovýchto substitucí. Každou $sub \in Sub$ můžeme rozšířit přirozeným způsobem tak, že $sub\colon Fle(MVL) \to Fle(MVL)$, přičemž pro libovolnou $\theta \in Fle(MVL)$ neobsahující jiné atomy než $p_1,\ldots,p_n$ dodefinujeme $sub(\theta) = \theta(p_1/sub(p_1), \ldots, p_n/sub(p_n))$, tj. $sub(\theta)$ je formule, kterou získáme současným nahrazením všech atomů formulemi, které jim přiřazuje funkce *sub*. O množině formulí X řekneme, že je uzavřena na univerzální substituci, když pro každou formuli $\theta \in X$ a pro každou substituci $sub \in Sub$ platí, že $sub(\theta) \in X$. Také logiky můžeme chápat jako množiny formulí. Uzavřenost na substituci bývá někdy považována za základní podmínku, kterou by měla množina formulí splňovat, pokud ji chceme nazývat logikou.

My jsme však definovali $2^{2^{\aleph_0}}$ Δ-logik a žádná z nich tuto podmínku nesplňuje. To lze doložit zcela snadno. Pokud Δ obsahuje alespoň jeden popis stavu, který je neprázdný, vybereme z něj nějaký atom p. Pak formule $\Diamond p$ je Δ-platná. Přitom formule $\Diamond(p \mathbin{\&} \neg p)$ není Δ-platná. Tudíž formule $\Diamond p$ a substituce *sub*, pro kterou platí $sub(p) = p \mathbin{\&} \neg p$ jsou společně protipříkladem dokládajícím, že tato Δ-logika není uzavřena na substituci. Pokud Δ obsahuje pouze prázdný popis stavu, úvahu lze lehce upravit. Protože C je speciální Δ-logika, také ona není uzavřena na substituci. Z toho již je jasné, že to není logika odpovídající logice *S5*, neboť *S5* na substituci uzavřena je. To je patrné z toho, že v jejím axiomatickém vymezení jsou pouze univerzální schémata a tudíž je-li nějaká formule dokazatelná v *S5*, musí zde být dokazatelné i všechny její substituční instance. K problematice uzavřenosti na substituci se ještě vrátíme.

Je-li $n \geq 1$ přirozené číslo a $s \in \Delta$, pak formuli $\zeta^n(s)$ definujeme jako $l_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} l_n$, kde l_i $(1 \leq i \leq n)$ je atom p_i, pokud $p_i \in s$, jinak l_i je formule $\neg p_i$. Dále pro každé Δ definujeme množiny formulí:

$H^n = \{\zeta^n(s);\ s \in \Delta(C)\}$,
$H^n(\Delta) = \{\zeta \in H^n;\ \text{existuje } t \in \Delta\text{: } \Delta, t \models \zeta\}$,
$H^n(-\Delta) = H^n - H^n(\Delta)$.

Pro každé přirozené číslo n jsme tedy definovali tři konečné množiny formulí.

Přejdeme k axiomatizaci Δ-logik. Pro každou Δ-logiku vezmeme kalkul logiky *S5* a obohatíme ho o následující schémata:

($\Delta 1$) $\Diamond\zeta^n(s)$, je-li $n \geq 1$ a $s \in \Delta$,
($\Delta 2$) $\neg\Diamond\zeta^n(s)$, pokud $\Diamond\zeta^n(s)$ není instance ($\Delta 1$).

$\vdash_{\Delta} \theta$ znamená, že formule θ je dokazatelná v tomto kalkulu.

Každá z takto získaných logik je tedy silnější než *S5*. Nejedná se o logické kalkuly v běžném smyslu. V některých případech není množina axiomů rozhodnutelná. V případě $\Delta(C)$ se však jedná o rozhodnutelnou množinu – zde dokonce vystačíme pouze se schématem ($\Delta(C)1$), protože každá formule tvaru $\Diamond\zeta^n(s)$ splňuje uvedenou podmínku. Dokážeme, že ke každé Δ-logice je odpovídající Δ-kalkul adekvátní. Fixujeme tedy libovolné Δ.

Lemma 1: *Pro libovolné* $\theta, \psi, \chi \in Fle(MVL)$ *platí:*

a) *Jestliže* $\vdash_{\Delta} \Box(\theta \vee \psi)$ *a* $\vdash_{\Delta} \neg\Diamond\theta$, *pak* $\vdash_{\Delta} \Box\psi$.
b) *Jestliže* $\vdash_{\Delta} \Box(\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n)$ *a* $\vdash_{\Delta} \theta_i \rightarrow \chi$ *pro každé* i $(1 \leq i \leq n)$, *pak* $\vdash_{\Delta} \Box\chi$.
c) *Jestliže* $\vdash_{\Delta} \theta \rightarrow \psi$, *pak* $\vdash_{\Delta} \Diamond\theta \rightarrow \Diamond\psi$.
d $\vdash_{\Delta} \Diamond\Box\theta \rightarrow \theta$.

Důkaz: Jde o metateorémy pravdivé již pro logiku *S5*. Jejich pravdivost se jednoduše přenáší do všech Δ-kalkulů. Q.E.D.

V následujících dvou lemmatech budeme předpokládat, že $H^n(\Delta) = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ a $H^n(-\Delta) = \{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$.

Lemma 2: $\vdash_{\Delta} \Box(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k)$.

Důkaz: Formule $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m$ je klasická tautologie a tedy dokazatelná v Δ-kalkulu. Díky pravidlu necesitace pak platí $\vdash_{\Delta} \Box\ (\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m)$. Avšak pro každou formuli $\beta \in H^n(-\Delta)$ platí díky schématu ($\Delta 2$), že $\vdash_{\Delta} \neg\Diamond\beta$. Tudíž díky bodu a) z předchozího lemmatu získáváme $\vdash_{\Delta} \Box(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_k)$. Q.E.D.

Lemma 3: *Nechť* $\theta \in Fle(MVL)$, *n je maximální index atomů vyskytujících se ve* θ *a* $s \in \Delta$. *Pak platí* $\vdash_{\Delta} \zeta^n(s) \rightarrow \theta$ *iff* $\Delta, s \models \theta$.

Důkaz: Indukcí podle složitosti θ. Případ atomických formulí a spojek konjunkce a negace je přímočarý. Ukážeme indukční krok pro $\Box$.

Nechť tedy $\theta = \Box\psi$ a tvrzení platí pro formuli ψ a pro každé $t \in \Delta$. Nechť Δ, $s \models \Box\psi$. Pak dle indukčního předpokladu platí $\vdash_{\Delta} \alpha_1 \rightarrow \psi$, …, $\vdash_{\Delta} \alpha_k \rightarrow \psi$. Tedy díky druhému lemmatu a bodu b) prvního lemmatu platí $\vdash_{\Delta} \Box\psi$. Tedy také $\vdash_{\Delta} \zeta^n(s) \rightarrow \Box\psi$.

Nechť $\vdash_{\Delta} \zeta^{n}(s) \rightarrow \Box\psi$. Podle bodu c) prvního lemmatu $\vdash_{\Delta} \Diamond\zeta^{n}(s) \rightarrow \Diamond\Box\psi$. Podle schématu (*Δ1*) je $\Diamond\zeta^{n}(s)$ axiom, tedy $\vdash_{\Delta} \Diamond\Box\psi$. Z bodu d) prvního lemmatu dostáváme $\vdash_{\Delta} \psi$. Nechť $t \in \Delta$. Pak $\vdash_{\Delta} \zeta^{n}(t) \rightarrow \psi$. Díky indukčnímu předpokladu platí $\Delta, t \models \psi$. Protože t bylo libovolné, platí $\Delta, s \models \Box\psi$. Q.E.D.

Věta 1: *Nechť $\theta \in Fle(MVL)$. Platí, že θ je Δ-platná iff $\vdash_{\Delta} \theta$.*

Důkaz: Nechť nejprve $\vdash_{\Delta} \theta$. Ověřením korektnosti všech schémat a odvozovacích pravidel získáváme také, že θ je Δ-platná.
Nechť θ je Δ-platná. Tedy pro každé $t \in \Delta$ platí $\Delta, t \models \theta$. Tedy podle třetího lemmatu $\vdash_{\Delta} \alpha_1 \rightarrow \theta, \ldots, \vdash_{\Delta} \alpha_k \rightarrow \theta$. Tedy podle druhého lemmatu a bodu b) prvního lemmatu $\vdash_{\Delta} \Box\theta$, tedy i $\vdash_{\Delta} \theta$. Q.E.D.

Máme nyní axiomatický systém pro každou Δ-logiku. Speciálně máme axiomatizaci logiky *C*. Za pomoci Δ-logik je v článku (1985) vytvořena sémantika pro logiku *S5*. Než vyložíme, jak autoři postupovali, doplníme jedno pomocné tvrzení, které v (1985) není explicitně zmíněno, ale které je v postupu přesto použito. Domníváme se, že je vhodné uvést jeho důkaz, protože tento bod může být matoucí. Mohlo by se totiž zdát, že autoři předpokládají větu o dedukci pro logiku *S5*, která zde však ve své obecné podobě neplatí. Pravdou je, že jim pro účely důkazu stačí pouze určitá omezená varianta věty o dedukci, která již platí a kterou zformulujeme v následujícím lemmatu.

Lemma 4: *Nechť Δ je dáno, $\theta \in Fle(MVL)$ a platí $\vdash_{\Delta} \theta$. Nechť $\chi_1,\ldots,\chi_n$ jsou jediné instance schémat (Δ1) a (Δ2), které se vyskytují v nějakém Δ-důkazu formule θ. Pak platí $\vdash_{S5} (\chi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \chi_n) \rightarrow \theta$.*

Důkaz: Tvrzení lze dokázat podobně jako větu o dedukci v klasické výrokové logice. Nechť posloupnost $\psi_1,\ldots, \psi_m = \theta$ je uvedený důkaz. Dokážeme indukcí, že pro každé i ($1 \leq i \leq m$) platí $\vdash_{S5} (\chi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \chi_n) \rightarrow \psi_i$. Mohou nastat čtyři případy:

i) ψ_i je axiom logiky *S5*.
ii) ψ_i je instance schématu (*Δ1*) nebo (*Δ2*).
iii) ψ_i je odvozena z předchozích členů pomocí pravidla modus ponens.

iv) ψ_i je odvozena z některého předchozího členu pomocí necesitace.

V případech i) a iii) lze postupovat stejně jako v tradičním důkazu věty o dedukci pro kalkul klasické výrokové logiky – tj. využije se toho, že mezi axiomy jsou všechny formule tvaru $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ a také všechny formule tvaru $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$. V případě ii) lze využít faktu, že $\psi_i \in \{\chi_1,\dots,\chi_n\}$. Zbývá zdůvodnit případ iv). Zde využijeme faktu, že pro každou instanci χ schémat ($\Delta 1$) a ($\Delta 2$) platí $\vdash_{S5} \chi \rightarrow \Box\chi$. Tedy $\vdash_{S5} (\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \chi_n) \rightarrow (\Box\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \Box\chi_n)$. Přitom v S5 platí, že vzhledem ke konjunkci lze nutnost vytknout, tj. $\vdash_{S5} (\Box\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \Box\chi_n) \rightarrow \Box(\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \chi_n)$. Dohromady tedy $\vdash_{S5} (\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \chi_n) \rightarrow \Box(\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \chi_n)$. Nechť $\psi_i = \Box\psi_j$ pro nějaké $j < i$. Pak na základě indukčního předpokladu platí $\vdash_{S5} (\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \chi_n) \rightarrow \psi_j$. Aplikací necesitace, schématu (*K*) a pravidla modus ponens získáváme $\vdash_{S5} \Box(\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \chi_n) \rightarrow \Box\psi_j$. A z výše uvedeného již plyne, že $\vdash_{S5} (\chi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \chi_n) \rightarrow \Box\psi_j$. Tím je důkaz dokončen. Q.E.D.

Nyní již můžeme uvést sémantickou souvislost logik *C* a *S5* tak, jak je předložena v (1985). Jedná se o velmi známý výsledek. Netradiční je však jeho důkaz pomocí Δ-logik. Analogický výsledek (pro predikátovou verzi logiky *S5*) předvedl poprvé Saul Kripke (1959). Tvrzení lze neformálně interpretovat takto: *S5* lze chápat jako logiku, v níž (stejně jako v *C*) je nutnost interpretována jako platnost ve všech možných světech (reprezentovaných popisy stavů). Avšak podstatný rozdíl je v tom, že zatímco logika *C* operuje s jednou fixně danou sadou všech *logicky možných* světů, logika *S5* vnáší do hry další rozlišení. Připouští situace, v nichž nějaké logicky možné situace nejsou možné „materiálně“. V protikladu k stanovisku, které zastával raný Wittgenstein, tedy *S5* připouští, že atomické výroky nemusí být na sobě nezávislé – nějaká kombinace jejich ohodnocení může být nemožná. Předem (tj. na úrovni logiky) však nelze říci, které popisy stavů reprezentují „skutečně“ možné stavy a které nikoli. Proto každá množina popisů stavů určuje jeden model logiky *S5*, která je logikou právě této třídy modelů.

Věta 2: *Nechť $\theta \in Fle(MVL)$. Pak $\vdash_{S5} \theta$ iff pro každé Δ je θ Δ-platná.*

Důkaz: Jestliže $\vdash_{S5} \theta$, pak pro každé Δ platí $\vdash_{\Delta} \theta$, tedy také pro každé Δ je θ Δ-platná.

Nechť pro každé Δ je θ Δ-platná. Pak podle předchozí věty pro každé Δ platí $\vdash_{\Delta} \theta$. Z předchozího postupu je zřejmé, že v důkazu formule θ v odpovídajícím Δ-kalkulu není potřeba použít žádný atom, jehož index by byl větší než jakýkoli index atomů vyskytujících se ve formuli θ. Nechť tedy n je maximální index atomů vyskytujících se ve θ. Pro dané Δ existuje přesně 2^n formulí určených schématy ($\Delta 1$),($\Delta 2$). Nechť $\Diamond\alpha_1, \ldots, \Diamond\alpha_i$ ($1 \leq i \leq 2^n$) jsou ty axiomy, které jsou určeny schématem ($\Delta 1$) a $\neg\Diamond\beta_1, \ldots, \neg\Diamond\beta_j$ ($j = 2^n$-i) jsou ty axiomy, které jsou určeny schématem ($\Delta 2$). Při důkazu formule θ v Δ-kalkulu nebyly tedy zapotřebí další axiomy než právě uvedené. Tedy platí (dle předchozího lemmatu), že $\vdash_{S5} (\Diamond\alpha_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \Diamond\alpha_i \mathbin{\&} \neg\Diamond\beta_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \neg\Diamond\beta_j) \rightarrow \theta$. Uvažujeme-li všechny množiny popisů stavů, existuje přesně $m = 2^{2^{n-1}}$ formulí typu $\Diamond\alpha_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \Diamond\alpha_i \mathbin{\&} \neg\Diamond\beta_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \neg\Diamond\beta_j$. Nechť to jsou formule $\psi_1,\ldots,\psi_m$. Platí tedy pro každé l ($1 \leq l \leq m$), že $\vdash_{S5} \psi_l \rightarrow \theta$. Přitom také $\vdash_{S5} \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$. Tedy $\vdash_{S5} \theta$. Q.E.D.

Jak již bylo řečeno, logika *S5* je často chápána jako logika ontologické nutnosti. Stručně naznačíme, že bychom ji mohli konstruovat jako logiku s přirozenou epistemickou interpretací. Místo jednoho univerza všech možných interpretací (či popisů stavů) logiky *C*, vezměme jedno univerzum epistemických stavů sestávající z dvojic, kde první člen tvoří interpretace (ontologická složka epistemického stavu) a druhý člen tvoří libovolná množina nemodálních formulí pravdivých v dané interpretaci (složka představující znalost v epistemickém stavu). Množina všech takovýchto dvojic tvoří jedno epistemické univerzum. Pokud by v něm byla nutnost interpretována jako platnost ve všech možných světech, získali bychom opět logiku *C* (druhé složky světů by byly irelevantní). Pokud bychom si však pomohli relací dosažitelnosti a definovali bychom, že vzájemně dosažitelné jsou právě takové stavy, jejichž druhé složky se shodují, a nutnost definovali jako platnost ve všech dosažitelných stavech, získali bychom logiku *S5* (jak lze lehce dokázat). Přitom její sémantika by byla ideově zcela analogická sémantice logiky *C*, pouze obohacena o epistemický rozměr. Relace dosažitelnosti je definována přirozeným způsobem: Z epistemického hlediska je pro nás možný každý takový stav, v němž je pravda právě to, co o situaci víme.

3 Alternativní charakterizace *C* a syntaktický vztah *C* k *S5*

Steven H. Thomason (1973) podal pro logiku *C* alternativní a jednodušší kalkul než ten, s kterým jsme dosud pracovali. Mezi axiomy jsou pouze všechny formule tvaru klasických tautologií a dále všechny instance schématu ($\Delta(C)1$). Odvozovací pravidla jsou modus ponens, necesitace a dále je přidáno následující pravidlo:[4]

(c+) $\theta \rightarrow \psi \;/\; \Box\theta \rightarrow \Box\psi$.

Je-li θ dokazatelná v tomto kalkulu, píšeme $\vdash_C \theta$. Pro tento kalkul můžeme ihned dokázat analogii třetího lemmatu. Využijeme také následující úvahy. O popisu stavu řekneme, že je n-popisem, když neobsahuje žádný atom s větším indexem než n. Pokud n je maximální index ve θ, pak se lze při vyhodnocování formule θ v logice C omezit pouze na všechny n-popisy. Formule θ platí ve všech n-popisech právě tehdy, když je v C logicky platná, z čehož plyne také rozhodnutelnost této logiky.

Řekněme, že $\Delta^n(C)$ je množina všech n-popisů. Pro následující důkaz bude vhodné, vyjádříme-li analogii třetího lemmatu pomocí následujícího značení. Nechť $s \in \Delta^n(C)$. Definujeme, že je-li $\Delta^n(C), s \models \theta$, pak je $\theta^s = \theta$. Jinak je $\theta^s = \neg\theta$. Platí následující tvrzení.

Lemma 5: *Nechť $\theta \in Fle(MVL)$, n je maximální index atomů vyskytujících se ve θ a $s \in \Delta^n(C)$. Pak $\vdash_C \zeta^n(s) \rightarrow \theta^s$.*

Důkaz: Indukcí podle složitosti formule θ. Ukážeme pouze indukční krok pro operátor $\Box$. Nechť tedy $\theta = \Box\psi$.

Jestliže $\Delta^n(C), s \models \Box\psi$, tak pro každé $t \in \Delta^n(C)$ je $\Delta^n(C), t \models \psi$. Dle indukčního předpokladu $\vdash_C \zeta^n(t) \rightarrow \psi$ pro každé takovéto t. Přitom disjunkce všech $\zeta^n(t)$ ($t \in \Delta^n(C)$) je klasická tautologie. Pak ale platí $\vdash_C \psi$. Tedy i $\vdash_C \Box\psi$. A tedy také $\vdash_C \zeta^n(s) \rightarrow \Box\psi$.

[4] Toto pravidlo je ekvivalentní s podmínkou vyjádřenou v bodu c) prvního lemmatu.

Jestliže neplatí $\Delta^n(C)$, $s \models \Box\psi$, pak existuje $t \in \Delta^n(C)$ tak, že neplatí ani $\Delta^n(C)$, $t \models \psi$. Tedy dle indukčního předpokladu pro takovéto t platí $\vdash_C \zeta^n(t) \rightarrow \neg\psi$. Tedy také $\vdash_C \Diamond\zeta^n(t) \rightarrow \neg\Box\psi$. Avšak $\Diamond\zeta^n(t)$ je axiom, takže $\vdash_C \neg\Box\psi$. Tedy i $\vdash_C \zeta^n(s) \rightarrow \neg\Box\psi$. Q.E.D.

Věta 3: *Nechť $\theta \in Fle(MVL)$. θ je platná v C iff $\vdash_C \theta$.*

Důkaz: Všechny axiomy jsou v C platné a odvozovací pravidla zde zachovávají platnost. Tím je dokázána korektnost.

Nechť θ je platná v C. Pak podle předchozího lemmatu platí pro každé $t \in \Delta^n(C)$, že $\vdash_C \zeta^n(t) \rightarrow \theta$. Protože navíc disjunkce všech formulí $\zeta^n(t)$ ($t \in \Delta^n(C)$) je tautologie, platí i $\vdash_C \theta$. Q.E.D.

Thomason (1973) podává s pomocí právě uvedeného kalkulu následující charakterizaci logiky C. $Thm(C)$ je množina formulí platných v logice C.

Věta 4: *$Thm(C)$ je jediná množina X formulí jazyka modální výrokové logiky, která splňuje pro libovolné θ, $\psi \in Fle(MVL)$ následující podmínky:*

1. *Pokud je θ tvaru klasické tautologie, pak $\theta \in X$.*
2. *Pokud θ neobsahuje modality a $\theta \in X$, pak je θ tvaru klasické tautologie.*
3. *Pokud $\theta \rightarrow \psi \in X$ a $\theta \in X$, pak $\psi \in X$.*
4. *$\theta \in X$ právě tehdy, když $\Box\theta \in X$.*
5. *Buď $\theta \in X$, nebo $\neg\Box\theta \in X$.*

Důkaz: Sémantickou kontrolou lze ověřit, že pro $Thm(C)$ jsou splněny všechny z uvedených podmínek. Předpokládejme, že množina X splňuje uvedené podmínky. Z podmínek 1., 2. a 5. plyne, že X obsahuje všechny axiomy uvedeného kalkulu. Díky podmínkám 3. a 4. je X uzavřená na modus ponens a necesitaci. Indukcí lze ověřit, že kdykoli ve formuli α je každý atom v dosahu nějakého modálního operátoru, pak platí buď $\alpha \in X$, nebo $\neg\alpha \in X$ (pro žádnou formuli neplatí obojí). Tedy za předpokladu, že $\Box\theta \rightarrow \Box\psi$ není v X, θ je v X a ψ není v X, což znamená, že $\theta \rightarrow \psi$ není v X. Tím je zdůvodněno, že X je uzavřena i na (c+). Dohromady tedy $Thm(C)$ je podmnožinou X. Nechť $\theta \in X$. Pak také $\Box\theta \in X$, tedy $\neg\Box\theta$ není v X. Z toho plyne, že neplatí $\vdash_C \neg\Box\theta$. Tedy $\vdash_C \theta$. Tudíž $Thm(C) = X$. Q.E.D.

První čtyři podmínky sdílí *C* se všemi běžnými modálními logikami. Předpokládáme-li tyto podmínky jako základní požadavek při konstrukci modálních logik, pak nám předchozí věta říká, že pátou podmínku nemůže splňovat žádná jiná modální výroková logika, než logika *C*. Do jaké míry je tato podmínka žádoucí? Pokud chceme operátorem nutnosti formalizovat logickou platnost, pak působí tato podmínka zcela nevinně a spíše jen vyjadřuje naše očekávání. Říká pouze, že není-li formule θ logicky platná, pak platí $\neg\Box\theta$.

Výše jsme ukázali, jaký je sémantický vztah logiky *S5* ke Carnapově modální logice *C*. Nyní předvedeme zajímavý syntaktický vztah těchto logik. Ukážeme, že v *S5* jsou platné přesně ty formule, které jsou platné v *C* a jejichž všechny substituční instance jsou též platné v *C*. Jinými slovy, *S5* je největší na substituci uzavřená část logiky *C*. Postupujeme stále podle Thomason (1973).

Nechť $G = \{p_1,\ldots,p_n\}$ a $Int(G)$ je množina všech ohodnocení těchto atomů. Uvedeme nyní pomocné lemma. Definujeme $\theta^1 = \theta$ a $\theta^0 = \neg\theta$.

Lemma 6: *Nechť K je neprázdná podmnožina* $Int(G)$. *Pak existují formule* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *splňující následující podmínky:*

1. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *obsahují pouze atomy* $p_1,\ldots,p_n$ *a spojky* $\neg$ *a* & .
2. *Pro každé* $I \in K$ *a* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *platí* $I(\alpha_i) = I(p_i)$.
3. *Pro každé I, které neleží v K, platí* $\vdash_C \neg(\alpha_1^{I(p_1)} \vee \ldots \vee \alpha_n^{I(p_n)})$.

Důkaz: Fixujeme libovolné $I_0 \in K$. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ definujeme funkci f_i: $Int(G) \to \{0,1\}$:

$f_i(I) = I(p_i)$, jestliže $I \in K$.
$f_i(I) = I_0(p_i)$, jestliže I neleží v K.

Protože {& , ¬} je úplná množina spojek v klasické logice, k funkcím $f_1, \ldots, f_n$ existují formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které splňují 1. podmínku a pro něž platí: $I(\alpha_i) = f_i(I)$.

Jestliže $I \in K$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak $I(\alpha_i) = f_i(I) = I(p_i)$. Tedy 2. podmínka je také pro tyto formule splněna.

Nechť I neleží v K a $J \in Int(G)$. Nejprve dokážeme sporem, že pak pro nějaké $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $J(\alpha_i) \neq I(p_i)$. Předpokládejme tedy, že pro každé i platí $J(\alpha_i) = I(p_i)$. Pokud $J \in K$, pak pro každé i máme

$J(p_i) = f_i(J) = J(\alpha_i) = I(p_i)$. Tedy $J = I$, což je spor, neboť I neleží v K. Pokud J neleží v K, pak pro každé i platí $I_0(p_i) = f_i(J) = J(\alpha_i) = I(p_i)$. Tedy $I = I_0$, což je opět spor.

Lze lehce ověřit, že platí následující vztah: $J(\alpha_i^{I(p_i)}) = 1$ iff $I(p_i) = J(\alpha_i)$. Dohromady získáváme, že pro každé $J \in Int(G)$ platí, že $J(\alpha_1^{I(p_1)} \vee \ldots \vee \alpha_n^{I(p_n)}) = 0$. To znamená, že $\vdash_C \neg(\alpha_1^{I(p_1)} \vee \ldots \vee \alpha_n^{I(p_n)})$ a 3. podmínka je rovněž splněna. Q.E.D.

Každé neprázdné podmnožině K množiny $Int(G)$ odpovídá podmnožina Δ_K množiny popisů stavů $\Delta^n(C)$. Dále sub_K bude substituce taková, že pro každé $i \in \{1,\ldots,n\}$ platí $sub_K(p_i) = \alpha_i$, kde $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ jsou formule, jejichž existenci pro dané K zajišťuje předchozí lemma.

Lemma 7: *Nechť K je podmnožinou množiny $Int(G)$, $s \in \Delta_K$ a $\theta \in Fle(MVL)$. Pak platí, že $\Delta_K, s \models \theta$ iff $\Delta^n(C), s \models sub_K(\theta)$.*

Důkaz: Indukcí podle složitosti formule θ. Pro každý atom p_i ($1 \leq i \leq n$) platí $\Delta_K, s \models p_i$ iff $\Delta^n(C), s \models p_i$ iff $\Delta^n(C), s \models \alpha_i$ (viz 2. podmínka předchozího lemmatu).

Indukční kroky pro & a ¬ jsou přímočaré. Nechť $\theta = \Box\psi$. Předpokládejme, že $\Delta^n(C), s \models sub_K(\Box\psi)$. Pak – protože Δ_K je podmnožinou $\Delta^n(C)$ – pro každé $t \in \Delta_K$ platí $\Delta^n(C), t \models sub_K(\psi)$. Na základě indukčního předpokladu platí pro každé $t \in \Delta_K$, že $\Delta_K, t \models \psi$. Tedy $\Delta_K, s \models \Box\psi$.

Nechť neplatí $\Delta^n(C), s \models sub_K(\Box\psi)$. Pak existuje $t \in \Delta^n(C)$ tak, že neplatí ani $\Delta^n(C), t \models sub_K(\psi)$. Definujeme $I \in Int(G)$ tak, že $I(p_i) = 1$ iff $\Delta^n(C), t \models \alpha_i$. Z toho vyplývá, že platí $\Delta^n(C), t \models \alpha_1^{I(p_1)} \vee \ldots \vee \alpha_n^{I(p_n)}$. Nyní platí, že $I \in K$. Kdyby ne, tak bychom dostali spor s 3. podmínkou předchozího lemmatu. Protože $I \in K$, I koresponduje s popisem stavu $s_I \in \Delta_K$. Pro každé i platí:

$\Delta^n(C), s_I \models \alpha_i$ iff $\Delta^n(C), s_I \models p_i$ iff $\Delta^n(C), t \models \alpha_i$.

Protože neplatí $\Delta^n(C), t \models sub_K(\psi)$, neplatí také $\Delta^n(C), s_I \models sub_K(\psi)$. Na základě indukčního předpokladu neplatí ani $\Delta_K, s_I \models \psi$ a tedy ani $\Delta_K, s \models \Box\psi$. Q.E.D.

Nyní můžeme dokázat zmíněný významný vztah logik *C* a *S5*. Využijeme pozorování, že není-li θ platná v logice *S5*, pak existuje podmnožina Δ_K množiny $\Delta^n(C)$ (kde n je maximální index ve θ) tak, že θ není platná v Δ_K.[5] Označíme $Sub(C) = \{\theta \in Thm(C)$; pro každé $sub \in Sub$: $sub(\theta) \in Thm(C)\}$. $Thm(S5)$ je pochopitelně množina teorémů logiky *S5*.

Věta 5: $Sub(C) = Thm(S5)$.

Důkaz: Jestliže $\theta \in Thm(S5)$, pak $\theta \in Thm(C)$ a pro každou substituci $sub \in Sub$ je $sub(\theta) \in Thm(S5)$ a tedy i $sub(\theta) \in Thm(C)$. Takže $\theta \in Sub(C)$.

Nechť θ neleží v $Thm(S5)$. Pak existuje podmnožina K množiny $Int(G)$ a $s \in \Delta_K$ tak, že neplatí $\Delta_K, s \models \theta$. Tedy podle předchozího lemmatu neplatí $\Delta^n(C), s \models sub_K(\theta)$. Tedy θ neleží ani v $Sub(C)$. Q.E.D.

Uvedený výsledek dokázal již Carnap ve svém článku (1946), ve kterém se věnoval formálním vlastnostem své modální logiky. Zde stejně jako v (1947) definuje logickou pravdivost pro predikátovou logiku tak, že obor dané formule obsahuje všechny popisy stavů. V případě výrokové logiky se však odchyluje od ostatního výkladu a doplňuje podmínku uzavřenosti na substituci, tj. pracuje s výrokovými atomy jako s proměnnými za libovolné věty. Vychází mu pak korespondence s logikou *S5*. V důkazu úplnosti postupuje metodou redukce na specificky definovanou normální formu. Ukáže, že každá formule ze $Sub(C)$ je redukovatelná kanonickým postupem na konstantu *t* („pravda“), která je do jazyka přidána, a že vše, co je takto redukovatelné, je dokazatelné v *S5*.

4 Uzavřenost na substituci

Protože logika *C* není uzavřena na substituci, nespadá pod technický termín „normální modální logika“. Obecně převládá názor, že logická pravdivost je věcí formy či syntaktické struktury nezávislé na

[5] Z tohoto pozorování plyne rozhodnutelnost logiky *S5*, protože pro každou formuli stačí ověřit, zda platí v konečně mnoha konečných modelech.

interpretaci mimologických symbolů a z toho že vyplývá uzavřenost na substituci jako základní podmínka. Jinými slovy, má-li být nějaká množina formulí považována za logiku, musí být přinejmenším uzavřena na substituci. Podle takového kritéria logika *C* není vůbec logikou.

Na tuto problematiku se podíváme pohledem Gerharda Schurze, který se ve svém článku (2000) staví do opozice k obecně rozšířenému názoru. Tvrdí, že pokud chceme identifikovat nutnost jakožto logickou nutnost, pak logika *C* je nejen skutečnou logikou, ale navíc je jedinou úplnou modální logikou. Uzavřenost na univerzální substituci prezentuje jako jakýsi logický předsudek. Jedná se o podmínku zbytečně příliš silnou. Tuto podmínku lze nahradit podmínkou slabší, kterou již logika *C* bude splňovat. Schurz nezpochybňuje, že logika se má týkat pouze formy a že má být nezávislá na interpretaci mimologických symbolů. Domnívá se však, že z toho nevyplývá uzavřenost na univerzální substituci. Rozlišuje mezi syntakticky izomorfními a homomorfními substitucemi. Izomorfní substituce je taková, která přiřazuje atomickým formulím opět pouze atomické formule – a to navíc tak, že žádným dvěma různým atomům není přiřazen stejný atom. Je-li *sub* takováto substituce a θ je libovolná formule, pak formule θ a $sub(\theta)$ jsou skutečně z hlediska syntaktické formy nerozlišitelné. Schurzův pojem homomorfní substituce splývá s pojmem univerzální substituce. Atomickým formulím mohou být přiřazeny i neatomické formule. Po provedení substituce dojde v takovém případě k nárůstu syntaktické komplexity dané formule. Formule, na níž byla substituce aplikována, je tedy odlišná čistě z hlediska syntaktické formy.

Schurz nevidí žádný apriorní důvod, proč by takové logické pojmy jako logická pravda měly splňovat podmínku uzavřenosti na homomorfní substituci, která mění syntaktickou strukturu formulí. Vždyť také v tradičních logikách existují logické pojmy, které tuto podmínku nesplňují. Příkladem může být logická konzistence. Např. množina formulí $\{p,q\}$, kde p a q jsou atomy, je v KVL konzistentní. Aplikujeme-li na formule substituci s, pro niž platí $s(p) = \neg q$ a $s(q) = q$, získáme množinu $\{\neg q, q\}$, která konzistentní není. To vede Schurze k následující tezi: Každá logika musí být uzavřena na syntakticky izomorfní substituce, ale nemusí být nutně uzavřena na syntakticky homomorfní substituce.

Schurz uvádí ještě jedno přísnější kritérium, které je založeno na sémantickém pohledu. Neformálně lze říci, že substituce je sémanticky izomorfní právě tehdy, když zachovává sémantickou volnost interpretací, tj. když logický prostor všech interpretací substituovaných formulí zachovává celý prostor všech interpretací. Pro *C* bychom tuto podmínku mohli formulovat přesněji takto: Nechť *Int* je množina interpretací této logiky, $I \in Int$ a *sub* je substituce. Definujeme I_{sub} jako interpretaci splňující pro každý atom p, že $I_{sub}(p) = I(sub(p))$. Substituce *sub* je sémanticky izomorfní, když $Int = \{I_{sub}; I \in Int\}$. Zřejmě každá syntakticky izomorfní substituce je též sémanticky izomorfní. Avšak existují sémanticky izomorfní substituce, které syntakticky izomorfní nejsou (např. substituce přiřazující každému atomu jeho negaci). Schurz tedy předkládá ještě druhou, v jistém smyslu silnější tezi: Každá logika musí být uzavřena na sémanticky izomorfní substituce.

Lze lehce ukázat, že logika *C* je skutečně na sémanticky izomorfní substituce uzavřena. Navíc, má-li tato logika modelovat logickou nutnost a možnost, zdá se, že se jedná o jedinou úplnou modální logiku, protože skutečně pro každou splnitelnou formuli θ v *C* platí $\Diamond\theta$.

Důsledkem této úplnosti však je další zvláštnost logiky *C*. Modality v ní jsou totiž v jistém smyslu zcela eliminovatelné. Každá formule začínající operátorem $\Box$ je v *C* logicky ekvivalentní buď s libovolnou tautologií, nebo s libovolnou kontradikcí.

5 Predikátová verze logiky *C*

Alespoň krátce se zmíníme o predikátové verzi logiky *C*. Jak již bylo uvedeno, na svoji predikátovou modální logiku neklade Carnap v článku (1946) podmínku uzavřenosti na substituci. Definuje sémantiku pro jazyk obsahující spočetnou množinu jmenných konstant. Předpokládá jedno spočetné univerzum, neboť každý prvek univerza má v tomto jazyce fixně přidělené jméno a žádné dvě jména neoznačují stejný objekt. Sémantika kvantifikátorů může být tedy stanovena pomocí substitucí konstant za proměnné. My však sémantiku logiky *C* formulujeme moderním způsobem (jak je to např. provedeno v Mostowski – Mostowski 2006, odkud definici přebíráme), tj. s využitím pojmů modelu (který nahrazuje pojem popisu stavu) a valuace. Nebudeme předpokládat ani spočetnost univerza. Pochopitelně se tím lehce změní množina platných formulí.

Nechť tedy L je prvořádový jazyk a $V = \{x_1, x_2, \ldots\}$ je spočetná množina prvořádových proměnných. Nechť M je prvořádový model pro jazyk L. Libovolná funkce e z V do nosné množiny modelu M se nazývá valuace v M. Formule lze vystavět z atomických formulí pomocí kvantifikátorů, výrokových operátorů & , ¬ a operátoru nutnosti. Definujeme induktivně pravdivost formule θ v modelu M při valuaci e ($M \models \theta\ [e]$). Případ atomických formulí je stejný jako v klasické predikátové logice. Kroky pro operátory & , ¬ a kvantifikátory jsou též stejné. Zbývá dodefinovat krok pro operátor nutnosti: $M \models \Box\psi\ [e]$ iff pro každý L-model N, který má společnou nosnou množinu s modelem M, platí, že $N \models \psi\ [e]$. Formule θ v jazyce L je logicky platná v C, když pro každý L-model a každou valuaci e v M platí, že $M \models \theta\ [e]$.

Predikátové verze logik C a $S5$ jsou v podobném sémantickém vztahu jako jejich výrokové verze. Axiomatický systém predikátové modální logiky $S5$ vypadá tak, že se k axiomatizaci klasické predikátové logiky přidají schémata (K), (T), (5) a pravidlo necesitace. Přitom všechna schémata se vztahují na formule jazyka predikátové logiky obohaceného o operátor nutnosti. V již zmíněném článku (1959) vytváří Kripke sémantiku této logiky. Lze ji formulovat tak, že její L-modely jsou libovolné dvojice $\langle M,S\rangle$, kde S je množina L-modelů klasické predikátové logiky na stejném univerzu a $M \in S$. Nutnost formule ψ v $\langle M,S\rangle$ při dané valuaci e je definována takto: $\langle M,S\rangle \models \Box\psi\ [e]$ iff pro každé $N \in S$ platí $\langle N,S\rangle \models \psi\ [e]$.

Modely logiky C lze tedy chápat jako takové modely $\langle M,S\rangle$ logiky $S5$, v nichž S je třída všech modelů na univerzu modelu M. Opět tak získáváme, že C je silnější než $S5$. Např. v C platí formule $\Diamond\forall xPx$, která neplatí v $S5$. Obecně jestliže θ má model libovolné mohutnosti, pak v C platí $\Diamond\theta$. Ukážeme ještě jeden, zajímavější příklad, který je uveden v Mostowski – Mostowski (2006, 88). Zvažme formuli

$$\Box\,(\forall x\forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \to \forall x\exists y(f(y) = x)) \to$$
$$\to\Box((\forall x\forall y\forall z((Rxy \,\&\, Ryz) \to Rxz) \,\&\, \forall x\neg Rxx) \to \exists x\forall y\neg Rxy).$$

Tato formule je tvaru implikace. Čteme-li operátor nutnosti z perspektivy Carnapovy logiky, vyjadřuje přední člen, že každá injektivní funkce na univerzu je zároveň surjektivní. To znamená, že univerzum je konečné (podle Dedekindovy definice). Zadní člen této implikace říká, že každá tranzitivní a antireflexivní relace má maximální prvek, což je jiný způsob jak vyjádřit konečnost univerza. Tato formule je platná v *C* avšak nikoli v *S5*. Můžeme totiž vzít prvořádový model *M*, kde nosná množina je množina přirozených čísel, interpretace funktoru *f* je identita a interpretace predikátu *R* je relace <. K *M* vezmeme *S5*-model <*M*, {*M*}>. V tomto modelu platí přední člen naší formule, ale zadní nikoli.

Zajímavé a hodně diskutované schéma modální predikátové logiky, které je platné v *S5* (a tedy i v *C*), je tzv. Barcan formula vyjadřující zaměnitelnost obecného kvantifikátoru za operátor nutnosti:

(*Barc*) $\forall x \Box \theta \leftrightarrow \Box \forall x \theta$.

Platností této formule se zabývá Carnap (1946, 37) i (1947, 178).

Na závěr ukážeme, že v jistém smyslu je predikátová logika *C* až příliš silná. Nechť je dán jazyk *L* obsahující alespoň jeden predikát, jehož arita je větší než jedna. Následující zdůvodnění lze nalézt v Hendry – Pokriefka (1985).

Lemma 8: *Jestliže množina formulí v jazyce L platných v C je rekurzivně axiomatizovatelná, pak je rozhodnutelná.*

Důkaz: Předpokládejme, že množina formulí v jazyce *L* platných v *C* je rekurzivně axiomatizovatelná. Všechny důkazy v daném systému můžeme efektivně uspořádat v posloupnost $d_1, d_2, \ldots$ Nechť θ je formule v jazyce *L*. Platí, že právě jedna z formulí θ, $\neg\Box\theta$ je platná a tedy dokazatelná. Tedy budeme-li procházet posloupnost důkazů, v konečně mnoha krocích najdeme důkaz jedné z těchto formulí. Pokud najdeme důkaz formule θ, je tato formule platná v logice *C*. Pokud najdeme důkaz formule $\neg\Box\theta$, není formule θ platná v *C*. Máme tedy rozhodovací proceduru pro problém platnosti v *C*. Q.E.D.

Věta 6: *Množina formulí v jazyce L platných v C není rekurzivně axiomatizovatelná.*

Důkaz: Kdyby byla, byla by podle předchozího lemmatu rozhodnutelná, a potom bychom mohli pro každou formuli predikátové logiky rozhodnout, zda platí v *C*, či nikoli. Ale každá formule, která neobsahuje modality, je platná v *C* právě tehdy, když je platná v klasické predikátové logice. Získali bychom tedy rozhodnutelnost predikátové logiky (pro jazyk *L*), což by byl spor. Q.E.D.

6 Závěr

Na závěr neformálně shrnu několik aspektů logiky *C*, které jsem se v článku snažil představit. Na tomto místě lze také sledovat, jak tyto aspekty vyplývají z pojetí jazyka, které je formulováno ve Wittgensteinově Traktátu.

Za prvé, logika *C* není uzavřena na substituci (a tudíž nespadá pod současný technický termín „normální modální logika"). To znamená, že se jedná o logiku, která bere vážně označení základních formulí jako „atomů". Písmena „p_1", „p_2", … nemohou být chápána jako proměnné za libovolné výroky jazyka, ale spíše jako konstanty určené k tomu, aby reprezentovaly elementární věty jazyka, tj. věty, které neobsahují jiné věty jako své části.[6]

Pokud bychom toto pojetí nechtěli akceptovat a základní výroková písmena chápali skutečně jako proměnné (nikoli za pravdivostní hodnoty, ale za libovolné výroky), každá formule by znamenala zcela otevřenou větnou formu (pouhé schéma) a my bychom pak měli požadovat podmínku uzavřenosti na substituci. Tím bychom se dostali od logiky *C* k logice *S5* (viz věta 5 výše). Tento krok na jednom místě činí také sám Carnap (viz 1946, 40 – 41).

Za druhé, logika C předpokládá, že elementární věty jsou na sobě nezávislé. Každé ohodnocení atomů je z logického hlediska *možné*. Odstranění tohoto požadavku vede opět k logice *S5* (viz věta 2 výše). S tímto bodem souvisí otázka adekvátní logické variability. Logika je ze sémantického hlediska vždy invariant určitých variací. Kam až tyto variace mají sahat? Pokud vytváříme logiku logické nutnosti, vytváříme – viděno z perspektivy logiky *C* – jakousi logiku druhého stupně,

[6] Písmena „*p*", „*q*", atd. mohou být však chápána jako metajazykové proměnné za výrokové konstanty objektového jazyka „p_1", „p_2", atd.

tj. jakousi reflexi na systém variací logiky prvního stupně (nemodální logiky). V této nadstavbě nad hotovou nemodální logikou se již žádná nová variace neobjevuje.

Požadujeme-li variaci i na modální úrovni, jsme vedeni nejprve k logice *S5* a s pomocí zavedení nového variačního parametru – relace dosažitelnosti – dále ke kripkovské sémantice a ostatním běžným modálním logikám (např. *K*, *B*, *T*, *S4*). Výsledkem je, že modální jazyk lze použít jako matematicky zajímavý nástroj ke studiu relačních struktur. Otázkou zůstává, jestli přitom nejsme odváděni od původního cíle vytvořit logiku logické nutnosti.

Filozofická fakulta Univerzity Karlovy v Praze
Ústav filosofie a religionistiky
Nám. Jana Palacha 2
116 38 Praha 1
Česká republika
puncv4af@jinonice.cuni.cz

Literatura

BECKER, O. (1930): Zur Logik der Modalitäten. *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* 11, 497 – 548.

BĚHOUNEK, L. (2005): Formální sémantika logiky modalit. In: Kolman, V. (ed.): *Možnost, skutečnost, nutnost*. Praha: Filosofia (2005), 51 – 88.

BLACKBURN, P. – DE RIJKE, M. – VENEMA, Y. (2001): *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

CARNAP, R. (1946): Modalities and Quantification. *The Journal of Symbolic Logic* 11, 33 – 64.

CARNAP, R. (1947): *Meaning and Necessity: A Study in Semantics and Modal Logic*. Chicago: The University of Chicago Press.

FEYS, R. (1963): Carnap on Modalities. In: Schilpp, P. A. (ed.): *The Philosophy of Rudolf Carnap*. London: Cambridge University Press, 283 – 297.

HENDRY, H. E. – POKRIEFKA, M. L. (1985): Carnapian Extensions of S5. *The Journal of Philosophical Logic* 14, 111 – 128.

KRIPKE, S. A. (1959): A Completeness Theorem in Modal Logic. *The Journal of Symbolic Logic* 24, 1 – 14.

LEWIS, C. I. – LANGFORD, C. H. (1932): *Symbolic Logic*. New York: The Century Co.

MOSTOWSKI, G. A. – MOSTOWSKI, M. (2006): Recursive Complexity of the Carnap First Order Modal Logic C. *Mathematical Logic Quarterly* 52, 87 – 94.

SCHURZ, G. (2000): Rudolf Carnap's Modal Logic. http:// www.phil-fak.uniduesseldorf.de/fileadmin/Redaktion/Institute/Philosophie/Theoretische-Philosophie/Schurz/papers/2000a.pdf.

THOMASON, S. K. (1973): A New Representation of S5. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 14, 281 – 284.