Matematika a skúsenosť

Ladislav Kvasz

Abstract: Mathematics is traditionally considered being an apriori discipline consisting of purely analytic propositions. The aim of the present paper is to offer arguments against this entrenched view and to draw attention to the experiential dimension of mathematical knowledge. Following Husserl's interpretation of physical knowledge as knowledge constituted by the use of instruments, I am trying to inter-pret mathematical knowledge also as acknowledge based on instrumental experience. This interpretation opens a new view on the role of the logicist program, both in philosophy of mathematics and in philosophy of science.

Keywords: instrumental experience, expressive boundaries, logicism, recursion theory.

Podľa Stewarta Shapira veľká časť súčasnej filozofie matematiky má korene v stati Paula Benacerrafa *Mathematical truth*, ktorá načrtáva vážnu dilemu pre tento obor (Shapiro 1997, 3). Pozície, ktoré majú presvedčivý výklad sémantického aspektu matematiky (realistické programy ako platonizmus či štrukturalizmus) tvrdiac, že matematika hovorí o abstraktných objektoch rovnako, ako fyzika hovorí o objektoch telesných, majú problém s epistemologickou stránkou matematiky, teda s vysvetlením toho, ako abstraktné objekty poznávame. Naopak pozície, ktoré presvedčivo vysvetľujú matematické poznanie (antirealistické programy ako formalizmus či nominalizmus), majú problém so sémantickým aspektom matematiky, teda s objasnením toho, čo robí tvrdenia matematiky pravdivými. Vo filozofii matematiky akoby sa epistemológia rozvíjala na úkor sémantiky a naopak, pričom uspokojivý výklad oboch aspektov bol mimo možností súčasných pozícií.

Predkladaná stať je časťou pokusu o riešenie Benacerrafovej dilemy tým, že epistemologický a sémantický aspekt matematiky zasadí do historickej perspektívy. Zakladá sa na presvedčení, že *Benacerrafova dilema je do veľkej miery dôsledkom ahistorického prístupu k jazyku matematiky*, ktorý prevláda v analytickej filozofii. Predkladaná stať je zameraná na „rozpustenie" (*dissolving*) epistemologického pólu Benacerrafovej dilemy. Jej cieľom je ukázať, že ak sa na *epistemologický aspekt* matematiky pozrieme z historickej perspektívy, matematické poznanie je príbuzné s poznaním vo fyzike (táto príbuznosť, po vytrhnutí z historického kontextu, tvorí základ intuícií, na ktorých stoja realistické programy). Odpoveď na Benacerrafovu dilemu je možná len po výklade oboch jej pólov, epistemologického i sémantického. Verím však, že výklad epistemologického aspektu matematiky, ktorý matematiku zbližuje s fyzikou, je zaujímavý aj sám osebe, teda nezávisle od objasnenia ontologického statusu matematických objektov. Tento text nadväzuje na state (Kvasz 2000, 2001 a 2004a), ktoré boli venované rozvíjaniu Husserlovho výkladu vzniku novovekej prírodovedy. Podľa Husserla spočíval hlavný prínos Galilea k rozvoju novovekej prírodovedy v tom, že namiesto prirodzenej skúsenosti postavil *skúsenosť inštrumentálnu*. Tým sa novoveká veda vzdialila od fenoménov žitého sveta a postupne vytvorila vlastné univerzum teoretických konštrukcií, ktorými nahradila prirodzený svet. Husserlov výklad fyzikálneho poznania je tak v ostrom konflikte s výkladom Kantovým. Husserl pokladá novovekú fyziku za konštrukciu, ktorá sa vzdialila prirodzenej skúsenosti. Naproti tomu je podľa Kanta základom newtonovskej fyziky súbor syntetických súdov *a priori*, a tak je naša skúsenosť nevyhnutne newtonovská. Kým Kant teda stotožnil princípy newtonovskej mechaniky s formami konštituujúcimi skúsenosť, Husserl pochopil radikálnu protikladnosť newtonovskej fyziky a prirodzenej skúsenosti.

Aj keď sa pri výklade fyziky Husserl stavia do opozície voči Kantovi, pri výklade matematiky zotrváva na pozícii blízkej Kantovmu názoru, že matematika sa zakladá na nazeraní a skúsenosť s ňou spojená je *prirodzená skúsenosť*. V stati Kvasz (2007) som uviedol argumenty proti tomuto Kantovmu názoru a ukázal som, že matematika sa nemôže zakladať na prirodzenej skúsenosti (či už v podobe čistého alebo empirického nazerania). Teraz sa pokúsim túto argumentačnú líniu rozvinúť a prehĺbiť konflikt medzi *Husserlovým inštrumentálnym* *výkladom* exaktných disciplín (Husserl si asi radikálnosť svojho výkladu Galilea neuvedomil a prehliadol možnosť jeho použitia na matematiku) a *Kantovým „nativistickým" výkladom* založeným na údajnom apriórnom charaktere týchto vied.

Cieľom tejto state je ukázať, že aj matematická skúsenosť je inštrumentálna, sprostredkovaná artefaktmi. Rozdiel je len v tom, že v prípade matematiky to nie sú meracie prístroje, ale *nástroje symbolickej a ikonickej reprezentácie*, ktoré zakladajú inštrumentálny charakter jej skúsenosti. Na to, aby som matematický typ inštrumentálnej skúsenosti odlíšil od fyzikálneho typu (t. j. experimentálnej skúsenosti), budem inštrumentálnu skúsenosť v matematike nazývať *skúsenosťou symbolickou*. Pri bežnom pohľade sa môže zdať, že síce pokus vyložiť matematickú skúsenosť ako inštrumentálnu skúsenosť konštituovanú nástrojmi symbolickej a ikonickej reprezentácie má určitú plauzibilitu, ale ďaleko nepovedie. Reprezentačné nástroje ako číselné sústavy či konštrukcie kružidlom a pravítkom sú iba kontingentnými pomôckami a pravdy matematiky platia nezávisle od nich. Preto náš výklad neovplyvní status matematických tvrdení ani spôsob ich zdôvodnenia. Zdá sa, že náš výklad sa netýka podstaty problému, ale zaoberá sa len podružnými otázkami, ktoré spadajú do *kontextu objavu*.

Tu však môžeme namietať, že aj vo fyzike (pri jej bežnom chápaní) fyzikálne zákony platia nezávisle od toho, akým typom prístroja ich overujeme. A napriek tejto nezávislosti fyzikálnych zákonov od spôsobu merania Husserl ukázal inštrumentálny charakter fyzikálneho poznania. V analógii s meracím prístrojom sa pri prvom pohľade síce zdá, že aj určitý nástroj symbolickej či ikonickej reprezentácie je len pomôcka, ktorá uľahčuje overenie určitého faktu platného nezávisle od príslušného nástroja (a teda nástroje symbolickej či ikonickej reprezentácie patria do kontextu objavu), ale príklad fyziky ukazuje, že tento prvý pohľad môže byť skresľujúci. Sledujúc Husserlov výklad fyziky sa aj v prípade matematického poznania pokúsime ukázať jeho inštrumentálny charakter.

1. Pojem symbolickej skúsenosti

Náš výklad začneme analýzou bežného chápania reprezentačných nástrojov v matematike. Podľa rozšíreného presvedčenia nástroje symbolickej a ikonickej reprezentácie môžu pomôcť objaviť určitý matematický poznatok, ale zdôvodnenie tohto poznatku je čisto logické, a teda od príslušných nástrojov nezávislé. Je predsa zrejmé, že pozičná desiatková sústava *nie je dôvodom platnosti* vzťahu

135 664 + 37 863 = 173 527,

aby sme použili Fregeho príklad z jeho *Základov aritmetiky*. Desiatková sústava iba kompenzuje našu neschopnosť tento čisto logický vzťah bezprostredne nahliadnuť podobne, ako naklonená rovina u Galilea kompenzovala našu neschopnosť zmyslami nahliadnuť zrýchlený charakter voľného pádu. Takto už aj na pozadí bežného porozumenia sa otvára analógia medzi *svetom fyziky* ako svetom, do ktorého nám otvárajú prístup meracie prístroje, a *svetom čísel* ako svetom, ktorý nám pomáhajú odkrývať symbolické reprezentačné nástroje.

Ako som uviedol, táto analógia nesiaha ďaleko. Tradične sa *fyzický svet* chápe tak, že je od nášho myslenia nezávislý, a preto je na jeho poznávanie nevyhnutná empirická skúsenosť. Podľa väčšiny filozofov *svet fyziky* preberá túto vlastnosť fyzickej reality, a tak sa inštrumentálna skúsenosť vo fyzike, t. j. *experimentálna skúsenosť*, ak si jej odlišnosť od empirickej skúsenosti filozofi vôbec uvedomujú, chápe stále ako *druh empirickej skúsenosti*. Naproti tomu mnoho filozofov pokladá zákony matematiky za identické so zákonmi logiky. Ide teda o princípy, ktoré sú od empirickej skúsenosti nezávislé. Preto ak aj chceme vyložiť matematické poznanie ako poznanie založené na *symbolickej skúsenosti*, táto skúsenosť, zdá sa, má *neempirický charakter*.

Takto vzniká medzi matematikou a fyzikou ako dvomi exaktnými vedami, respektíve medzi experimentálnou a symbolickou skúsenosťou ako dvoma druhmi inštrumentálnej skúsenosti, určitá asymetria. Táto *asymetria* je však iba ťažko uchopiteľná, lebo medzi matematikou a fyzikou existuje viac-menej spojitý prechod. O tomto prechode svedčí rad disciplín, ako sú klasická mechanika, hydrodynamika či teória vedenia tepla, ktoré pred dvesto rokmi tvorili jadro empirickej vedy. Dnes sú tieto disciplíny skôr súčasťou matematiky. Povedať presne, kde končí matematika a kde začína empíria, je ťažké, ak nie nemožné. Bol objav deterministického chaosu objavom empirickým alebo symbolickým? Poincaré analýzou určitého matematického modelu objavil existenciu významného javu, pričom je málo pravdepodobné, že by sa tento jav dal objaviť čisto empiricky.

Naším cieľom je asymetriu medzi empirickým charakterom experimentálnej skúsenosti a neempirickým charakterom symbolickej skúsenosti *oslabiť*. Urobíme to tak, že podľa Husserlovho vzoru budeme radikalizovať výklad inštrumentu. Namiesto výkladu inštrumentu ako „neškodnej" pomôcky, ktorá iba uľahčuje prístup k určitým od inštrumentu nezávislým faktom, položíme Husserlov výklad inštrumentu ako nástroja, ktorého pomocou veda nahrádza prirodzenú skúsenosť skúsenosťou nového druhu (Kvasz 2000, 385 – 389). Cesta, po ktorej sa vyberieme, vedie opačným smerom, než šiel Kant. Namiesto toho, aby sme sa usilovali aj mechaniku vykladať ako apriórne poznanie (a výklad fyziky tak podriadili výkladu matematiky), pokúsime sa symbolickú skúsenosť vyložiť ako druh skúsenosti empirickej (t. j. výklad matematiky prispôsobíme výkladu fyziky). Okrem odmietnutia hranice medzi empirickým a analytickým poznaním však teória, ku ktorej smerujeme, nemá veľa spoločného s Quinovým pohľadom na jazyk.[1] Od logického pozitivizmu sa nelíšime stieraním rozlíšení. *Rozdiel je v pohľade na logiku*, ktorú pokladáme za jeden z nástrojov symbolickej reprezentácie modernej matematiky, a tak aj na logiku budeme aplikovať náš skúsenostný výklad.

a. horizont reprezentovateľnosti ako trvalá črta inštrumentálnej skúsenosti

Prvým krokom na ceste k pochopeniu úlohy inštrumentálnej skúsenosti (či už experimentálnej alebo symbolickej) pri poznávaní je spochybnenie predstavy nezávislosti skutočnosti (fyzikálnej rovnako ako matematickej) od inštrumentov. Vo fyzike kvantová mechanika

1 Quine prekonal *hranicu medzi analytickým a syntetickým*, ktorú nazval jednou z dogiem empirizmu, tým, že ju *zmazal* a celý jazyk vyložil ako súvislú sieť. Náš prístup je opačný. Miesto toho, aby sme hranicu zmazali, a tým stratili rad rozlíšení, chceme ukázať, že tam, kde pozitivizmus videl *jeden ostrý rez*, pri presnejšom pohľade uvidíme *rad jemnejších zlomov*. Namiesto Quinovho zmazávania rozlíšení navrhujeme ich *zjemnenie*. Namiesto Quinovho *holistického* modelu jazyka navrhujeme model *fragmentárny*. Jazyk netvorí jeden súvislý celok, nie je to sieť, do ktorej chytáme fakty. Jazyk je skôr súborom fragmentov, z ktorých každý bol vytvorený s iným účelom, podľa odlišných pravidiel, v rôznych dobách.

ukázala, že proces merania nie je cestou k nezávisle existujúcemu javu, lebo proces merania vstupuje do konštitúcie javu samého. Pritom sa však objektívny charakter fyzikálnych zákonov neporuší. To, že realita závisí od procesu merania, neznamená, že môžeme namerať to, čo sa nám zachce (t. j. že by rozum prírode niečo predpisoval). Závislosť javu od merania (pri dvojštrbinovom experimente) neotvára priestor ľubovôli. Heisenbergovým princípom neurčitosti sú *medze experimentálnej skúsenosti* presne, ostro, ale pritom objektívne určené.[2] Keď sa pokúšame svet matematiky vyložiť ako svet konštituovaný nástrojmi symbolickej reprezentácie, príklad kvantovej mechaniky ukazuje, že závislosť inštrumentálne konštituovanej skutočnosti (v tomto prípade kvantovej) od príslušných inštrumentov neznamená stratu objektívnosti reprezentovaných zákonov. Neotvára priestor pre ľubovôľu, ale *kladie medze tomu, kam až môžeme preniknúť*. Všetky nástroje symbolickej reprezentácie sú vybudované tak, že

135 664 + 37 863 = 173 527

vyjde vždy rovnako. Ide skôr o to, že každý reprezentačný nástroj uchopuje z matematického univerza len určitý fragment. Pokiaľ máme v aritmetike nepozičnú sústavu (napríklad rímske číslice), budú sa nám zle zapisovať čísla, ktoré majú v pozičnej dekadickej sústave zápis dlhší než 50 číslic (keď vyčerpáme malé a veľké písmená latinskej abecedy). Môžeme samozrejme používať písmená s bodkami, čiarkami a vlnovkami, ale vypočítať pomocou rímskych čísel hodnoty *ln(0,8), ln(0,9), ln(1,1), a ln(1,2) s presnosťou na 57 desatinných miest*, ako to urobil roku 1665 Newton, či vypočítať *π s presnosťou na 60 desatinných miest*, ako to urobil roku 1736 Euler, je asi za hranicami možností. Preto je pravdepodobné, že uvedené hodnoty pre ln(0,8) či *π* ležia v rímskych číslach za horizontom poznania. Samozrejme, to neznamená, že by v tejto sústave mali tieto veličiny inú hodnotu. Voľba reprezentačného nástroja nemôže ovplyvniť hodnotu veličiny. A sú to tiež stále rovnaké matematické princípy, ktoré spôsobia, že hod-

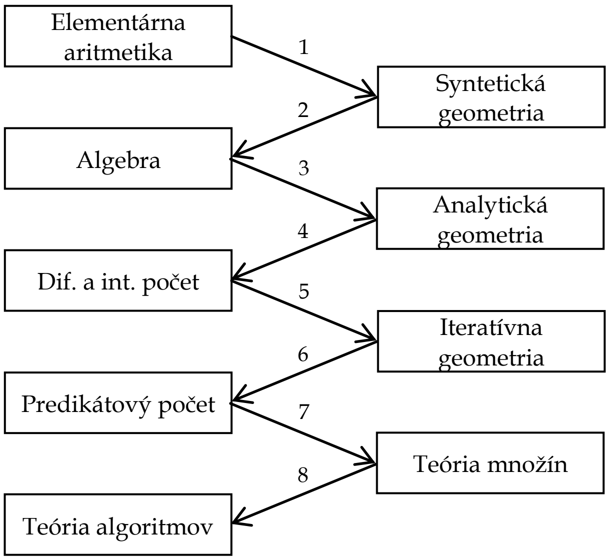
[2] Zdá sa, že Kantov objav medzí možnej skúsenosti je vecne správny. V jeho dobe však nebolo možné utvoriť si predstavu o charaktere týchto medzí a Kant skĺzol do špekulácií. Medze možnej skúsenosti sú skôr inštrumentálne než mentálne (pozri Kvasz 2004b a 2005).

noty týchto veličín sú presne také, aké sú, a nie iné. Ide len o to, že ak sa rozhodneme použiť ako nástroj symbolickej reprezentácie rímske čísla, tieto pravdy ostanú pravdepodobne navždy za horizontom možnej skúsenosti.

To, čo sme uviedli, sú iba slabé argumenty, v súvislosti s ktorými možno namietať, že určitá matematická pravda (napríklad hodnota určitej veličiny) *objektívne nejaká je* a je len náš problém, že jej výpočet prostredníctvom určitého nástroja symbolickej reprezentácie v dôsledku jeho nadmernej dĺžky nie sme schopní my, bežní smrteľníci, „domanipulovať“ do úspešného konca. V tomto „prvom priblížení“ to vyzerá tak, že pravda ešte stále existuje nezávisle od reprezentačného nástroja; je logicky nevyhnutná, len je neuchopiteľne zložitá. Teda, zatiaľ sme ukázali iba to, že nástroje symbolickej reprezentácie určujú rozsah *nám prístupnej časti* nezávisle existujúcich a logicky nevyhnutných právd matematiky. Analógia s kvantovou mechanikou je tak len čiastočná, lebo v nej Heisenbergov princíp vytyčuje medze nielen našej nedokonalosti, ale aj medze merania ako takého. Keď sa chceme dostať ďalej, ukazuje sa užitočné obrátiť sa k histórii matematiky.

b. medze jazyka a historická podmienenosť matematických poznatkov

V dejinách matematiky možno nájsť rad príkladov, kedy poznatok dokázaný pomocou určitého nástroja symbolickej reprezentácie nebolo možné dokázať prostriedkami predošlých nástrojov. Tento jav som v stati (Kvasz 2000) označil ako *logické medze jazyka*. Tu nejde o nejakú ťažkopádnosť odvodenia, ale o objektívny fakt neexistencie odvodenia pomocou určitého nástroja symbolickej reprezentácie. Príkladom logických medzí jazyka je *nedokázateľnosť základnej vety algebry* prostriedkami algebry (bez predpokladu spojitosti). Podobne možno nájsť rad príkladov, kedy matematický objekt zostrojený pomocou určitého nástroja nebolo možné skonštruovať pomocou predošlých nástrojov. Tento jav som nazval *expresívne medze jazyka*. A opäť možno objektívne dokázať neexistenciu príslušného objektu v univerze konštituovanom pomocou daného reprezentačného nástroja. Príkladom je nemožnosť *trisekcie uhla* v euklidovskej geometrii alebo neriešiteľnosť *rovníc piateho stupňa* prostriedkami algebry. Tu nejde o našu nedokonalosť, nejde o to, že by objekt ležal príliš ďaleko za horizontom. On je prostriedkami daného nástroja neopísateľný. To samozrejme neznamená, že nemožno vytvoriť iný nástroj, ktorého pomocou je možné daný objekt opísať. To, na čo chcem upozorniť, je *objektívna existencia logických a expresívnych medzí* každého nástroja symbolickej a ikonickej reprezentácie, ktorý doteraz matematici vytvorili. Prv, než pôjdeme ďalej, uvediem prehľad reprezentačných nástrojov, ktoré boli v matematike vytvorené.[3]



Prvých päť nástrojov bude asi súčasnému čitateľovi pripadať plauzibilnejšie než posledné štyri. Je to preto, lebo vplyvom veľkého časového odstupu nám rad alternatívnych pozícií, ktoré vo svojej dobe stáli proti sebe, splýva do akéhosi „stredného pojmu". Keď sa povie algebra, nikomu nenapadne, že tu stáli proti sebe Cardanova *Ars Magna* (1535), Viètove *Analytické umenie* (1591) a Descartova *Metóda*

[3] Postupnosť nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie uvedená v Kvasz (2008) končí teóriou množín. Teóriu algoritmov ako samostatný nástroj symbolickej reprezentácie som do nej nezaradil. Medzičasom som dospel k presvedčeniu, že teóriu algoritmov možno vyložiť ako nástroj symbolickej reprezentácie.

(1637) ako tri alternatívne pojatia toho, čo je to algebra. Podobne v analytickej geometrii Descartes používal iba prvý kvadrant, takže pred riešením určitej úlohy si osi zvolil tak, aby sa všetky relevantné prvky dostali do prvého kvadrantu. Newton už používal štyri kvadranty, ale pri opise pohybu volil sústavu tak, aby jedna os bola v smere pohybu. Idea súradnej sústavy volenej nezávisle od problému pochádza od Maclaurina. Preto aj v analytickej geometrii máme Descartovo, Newtonovo a Maclaurinovo pojatie, ktoré vo svojej dobe tvorili alternatívy. Súčasný čitateľ v pojme algebry alebo analytickej geometrie tieto rozdiely nevníma.[4] Naproti tomu v prípade posledných štyroch nástrojov nemáme dostatočný odstup, ešte nedošlo k splynutiu alternatívnych teórií. Preto termíny, ktorými sa usilujem pomenovať posledné štyri nástroje, čitateľ nevníma ako „ustredený" pojem. Tieto termíny v ňom preto evokujú jedno z alternatívnych pojatí aj so všetkými diferenciami voči alternatívam.

Termínom *iteratívna geometria* označujem nový nástroj ikonickej reprezentácie, nový *spôsob generovania funkcií* pomocou iteratívneho procesu, ktorý je spoločný *fraktálnej geometrii*, kde sa používa na konštrukciu útvarov, ako je Mandelbrotova množina; *teórii Fourierových radov*, kde sa používa na rozklad funkcie do bázy; *teórii funkcií reálnej premennej*, kde sa používa pri konštrukcii typických funkcií; *teórii diferenciálnych rovníc*, kde sa ako metóda postupných aproximácií používa na dôkaz existenčných viet; *funkcionálnej analýze*, kde sa používa na určenie pevného bodu operátora. Podobne *teóriou množín* nerozumiem túto teóriu v technickom zmysle, ale *metódu generovania objektov*, ktorá z formuly $\varphi(x)$ vytvorí objekt $\{x \ ; \ \varphi(x)\}$. Túto metódu má spoločnú

4 Okrem uvedených problémov sa v prípade analytickej geometrie vyskytuje ešte jeden problém. Termín „analytická geometria" má dve pojatia: širšie a užšie. V užšom pojatí analytická geometria stojí oproti geometrii algebraickej a diferenciálnej a je vlastne prerozprávaním euklidovskej geometrie (t. j. lineárnych a kvadratických objektov) pomocou súradnicovej metódy. Ja analytickou geometriou rozumiem *novú metódu generovania geometrických objektov*, keď sa do súradnej sústavy vynášajú body spĺňajúce určitú *formulu*. Do analytickej geometrie zahŕňam analytickú geometriu v jej užšom pojatí (formuly sú lineárne a kvadratické formy), algebraickú geometriu (pripustíme polynomické formy ľubovoľného stupňa) a diferenciálnu geometriu (formuly berieme diferenciálne rovnice alebo nekonečné rady). Tieto tri disciplíny sa napriek rozdielom medzi nimi od geometrie, ako bola pestovaná v antike, líšia tým, že svoje objekty generujú pomocou súradníc a formúl.

s *predikátovým počtom druhého rádu*, *Peanovou aritmetikou*, *λ–kalkulom* a radom iných teórií. Tieto teórie ešte nesplynuli, a tak čitateľ má sklon dosadiť za termín *iteratívna geometria* jednu z nich a namietať, že ostatné teórie vynechávam, a pod termínom *teória množín* zas rozumie túto teóriu v úzkom technickom zmysle, a nie ako reprezentačný nástroj.

Keď uvažujeme postupnosť nástrojov *symbolickej* reprezentácie (pozri ľavý stĺpec diagramu), nie je ťažké nájsť ilustrácie logických a expresívnych medzí jednotlivých nástrojov. Napríklad algebra priniesla symbol pre neznámu, čím sa stala prvým symbolickým jazykom, v ktorého rámci bolo možné dokázať všeobecné tvrdenie. Preto možno za logické medze jazyka elementárnej aritmetiky pokladať nemožnosť dokázať všeobecné tvrdenia. Jazyk algebry podobne zaviedol symbol pre odmocninu, čím sa stal prvým symbolickým jazykom schopným vyjadriť iracionálne veličiny. Za expresívne medze jazyka elementárnej aritmetiky možno preto pokladať jeho neschopnosť vyjadriť iracionálne veličiny. Pritom medze oddeľujúce jazyk elementárnej aritmetiky od jazyka algebry sú *objektívne*. O univerze elementárnej aritmetiky, teda o univerze, ku ktorému otvára prístup príslušný nástroj symbolickej reprezentácie (ktorý nepozná pojem premennej), možno dokázať, že v ňom neexistujú iracionálne veličiny a nemožno v ňom dokázať všeobecné tvrdenia. Pre ostatné nástroje symbolickej reprezentácie možno podobne nájsť ich logické a expresívne medze, ktoré vymedzujú, čo je možné pomocou toho-ktorého nástroja dokázať, vypočítať, či vyjadriť (Kvasz 2008, 14 – 84).

Zdá sa, že sa tu analógia s úlohou inštrumentov v kvantovej mechanike stáva striktnejšou. Medze, ktoré poznaniu kladie inštrumentálny charakter skúsenosti, sú v matematike rovnako ako vo fyzike úplne objektívne. V matematike už nejde o to, že by sme pre zložitosť zápisu neboli v stave určité iracionálne číslo (napríklad ln(2) alebo π) prostriedkami elementárnej aritmetiky zapísať, ale o to, že ono sa konečnou postupnosťou znakov jazyka elementárnej aritmetiky objektívne nedá vyjadriť. Situácia pripomína Heisenbergov princíp neurčitosti, kde tiež nejde o to, že by sme kvôli našej obmedzenosti neboli schopní súčasne namerať ostrú hodnotu súradnice a hybnosti, ale o to, že to objektívne nie je možné. Inštrumentálny charakter skúsenosti kladie na poznanie objektívne medze. Pritom je zaujímavé si uvedomiť, že medze kladené na matematické poznanie tým, že ho nadobúdame pomocou reprezentačných nástrojov, sú medze poznania samého, teda ide o epistemologický jav. Pre čísla, teda prvky univerza elementárnej aritmetiky, *platia* všetky tvrdenia, ktoré možno dokázať pomocou neskorších reprezentačných nástrojov (algebry v algebraickej teórii čísel, či diferenciálneho a integrálneho počtu v analytickej teórii čísel), len ich prostriedkami jazyka elementárnej aritmetiky nemožno odvodiť. Teda, napätie medzi sémantickým pojmom pravdivosti a syntaktickým pojmom odvoditeľnosti je tu odjakživa, aj keď si ho je len ťažko možné v rámci daného nástroja uvedomiť, lebo nedokázateľné tvrdenia často v danom jazyku nemožno zapísať, a tak si ich existenciu nemáme ako uvedomiť. Nedokázateľné tvrdenia sa vynoria až zavedením silnejšieho nástroja. Takže *objektívna podmienenosť univerza matematiky nástrojmi symbolickej skúsenosti je robustný historický fakt*.

Je možné namietnuť, že tu ide o históriu, teda o kontext objavu. Mne však nešlo o históriu, ale o *systematickú črtu každého nástroja symbolickej reprezentácie*, ktorou je existencia expresívnych a logických medzí, teda medzí, na ktoré každý takýto nástroj nevyhnutne naráža. Históriu používam preto, lebo pri reprezentačných nástrojoch minulosti máme k dispozícii novší nástroj, umožňujúci *explicitne vyjadriť* objekt či formulu, ktoré predstavujú medze uvažovaného staršieho jazyka. Tento nástroj tiež umožňuje *dokázať*, že príslušný objekt je v staršom jazyku nevyjadriteľný, resp. že príslušná formula je nedokázateľná. Sám *fakt existencie* expresívnych a logických medzí skúmaného jazyka od neskoršieho jazyka však nezávisí. Je to systematická črta každého jazyka.

Na tomto mieste by som rád upozornil na rozdiel medzi pojmom *horizontu*, ktorým som pojem inštrumentálnej skúsenosti charakterizoval v časti *a*, a pojmom *medze* jazyka, ktorým ho charakterizujem teraz. Horizont je jav, ktorý sa ukazuje každému človeku trochu inak. Je objektívny v tom zmysle, že je prítomný v každom pohľade, ale súčasne je subjektívny v tom zmysle, že každý ho vníma trochu inak (v závislosti od sily zraku či použitého inštrumentu). Niekto môže v rímskych číslach bezpečne manipulovať s 20-cifernými číslami, kým inému môžu 17-ciferné čísla (17-ciferné z hľadiska dekadickej pozičnej sústavy) predstavovať horizont, za ktorým sa bude systematicky do-púšťať chýb (podobne ako niekto v diaľke jasne rozlišuje jednotlivé stromy, kým inému sa tieto na horizonte zlievajú v súvislú škvrnu). Horizont možno posúvať, nemožno ho však odstrániť. Na rozdiel od horizontu (logickou či expresívnou) medzou jazyka rozumiem niečo objektívne, čo možno jednoznačne fixovať. Gauss dokázal, že pomocou kružidla a pravítka sú zostrojiteľné len úsečky, ktorých dĺžky možno vytvoriť pomocou konečného počtu kvadratických rozšírení poľa racionálnych čísel, a teda pravidelný 7-uholník zostrojiť nemožno, kým pravidelný 17-uholník zostrojiť možno. Vymedzil tak medzu, ktorou nemožno hýbať. Našiel objektívne kritérium konštruovateľnosti, ktoré je pre každého rovnaké. Tu už nejde o neurčitý horizont ako u rímskych čísel, ktorý každý vníma inak. Tu namiesto neostrého rozlíšenia nastupuje ostrá medza.

V časti *a* sme skúsenostný aspekt matematiky spájali s tým, že horizont možno pomocou nových reprezentačných nástrojov (napríklad pomocou pozičnej sústavy) posúvať. Teraz namiesto posúvania horizontu, ktoré je vždy viac-menej subjektívne, nastupuje prekračovanie objektívne existujúcich medzí. Skúsenostný aspekt matematiky spočíva v tom, že matematika vytvorením nových nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie objektívne existujúce medze prelamuje a otvára vstup do nových svetov, ktoré boli pre staršie nástroje neprístupné. Keď matematika otvorí vstup do nového univerza objektov, o ktorých získa rad nových poznatkov, obohacuje naše poznanie. Keď Newton ukázal, že existuje 72 druhov kubických kriviek (na 6 druhov pritom zabudol), objavil niečo, čo bolo antickým matematikom neprístupné. Kubické krivky sa vymykajú konštrukcii pomocou kružidla a pravítka, a až keď Descartes otvoril vstup do sveta algebraických kriviek, mohol Newton tento fakt objaviť.[5] Podobne, keď Grassmann a Riemann otvorili vstup do viacrozmerných priestorov, umožnili objav hlbokých poznatkov. Prelomením logických a expresívnych medzí jazyka matematika zásadným spôsobom obohacuje naše poznanie a v istom zmysle nás otvára novým druhom skúsenosti.

5 Otázka, či kubické krivky existovali predtým, ako Descartes otvoril vstup do univerza analytickej geometrie, a či Newtonova klasifikačná teoréma mala pravdivostnú hodnotu aj v antike, je otázka, ktorá sa týka sémantiky jazyka matematiky a ako takú ju odsunieme do ďalšieho dielu našej série.

c. logicizmus ako téza lingvistického pesimizmu

Doteraz sme skúsenostný aspekt matematiky opisovali negatívne – pomocou horizontov a medzí. Mohol by tak vzniknúť dojem, že skúsenostný aspekt matematiky sa viaže na našu neschopnosť uskutočniť isté výpočty (ktorá sa prejavuje ako horizont vypočítateľnosti), či na objektívnu nemožnosť uskutočniť isté dôkazy (ktorá sa prejavuje ako medze jazyka). Tieto negatívne javy sme však uviedli len preto, že – ako to s negatívnymi javmi býva – pútajú pozornosť. Negativita však nie je podstatou matematickej skúsenosti. Ilustráciou skúsenostného aspektu matematického poznania je napríklad to, že prechodom od systému rímskych čísel k pozičnému systému arabských čísel *otvoril prístup* k hodnote čísla π na 60 miest a algebraická symbolika *otvorila prístup* k riešeniu kubických rovníc. Matematika tak priniesla poznanie, ktoré prv nebolo možné. Priniesla ho prelomením medzí jazyka, vytvorením nového nástroja symbolickej reprezentácie. Nový nástroj umožňuje vytvoriť nový druh reprezentácií, s týmito reprezentáciami experimentovať a nadobúdať tak novú skúsenosť. Schopnosť matematiky prelomiť medze každého vopred daného jazyka, ktorá je jadrom jej schopnosti obohatiť našu skúsenosť, spochybňuje tradičné výklady matematického poznania.

Matematické poznanie teda *nie je apriórne v Kantovom zmysle*. Závisí od reprezentačných nástrojov, ktoré sú kontingentné, lebo sú kultúrnym artefaktom. Až keď vznikne určitý nástroj, stane sa určitá oblasť symbolickej skúsenosti prístupnou. Naše odmietnutie apriórnosti súvisí so zložitosťou poznatkov získaných pomocou reprezentačných nástrojov. Charakteristickou črtou matematického poznania je to, že prináša zložité konštrukcie a jemné rozlíšenia. Tu možno namietať, že Kantovi nešlo o poznatky, ale o princípy, ktorých pomocou sú tieto poznatky získané. Tento názor sa dá charakterizovať ako *téza o trivialite komplexnosti*, ako presvedčenie, že v zložitosti nie je nič zásadne nové, že komplexnosť nenesie žiadnu novú kvalitu, že princípy matematiky sa týkajú iba elementov. Táto téza je nesprávna. Práve na opis komplexných situácií vytvára matematika svoje reprezentačné nástroje, pričom každý nový nástroj je postavený na nových princípoch konštrukcie reprezentácií. Princípy, na ktorých je vybudovaná matematika, sa teda netýkajú iba elementov, ale aj toho, ako sa z elementov konštruujú zložité objekty. A konštrukčné princípy, na ktorých sú postavené nástroje symbolickej alebo ikonickej reprezentácie (napríklad zmena číselnej hodnoty číslice podľa jej pozície vo viacciferном zápise; odlíšenie neznámej a parametra v algebraickej symbolike, ...), sú konvenčné, a preto nemôžu byť apriórne (pre zdôvodnenie pozri Kvasz 2007).

Matematické poznanie však *nie je ani analytické vo Fregeho zmysle*. Samozrejme, poznanie získané v rámci každého jedného reprezentačného nástroja analytické je (alebo ho aspoň takým možno spraviť, keď konvencie príslušného reprezentačného nástroja prepašujeme do logiky – to urobil Frege). K *matematike však nerozlučne patrí aj tvorba nových nástrojov*. S matematickými objavmi je často spojená určitá lingvistická inovácia, a často táto inovácia spočíva vo vytvorení (zárodku) nového reprezentačného nástroja. Na prvý pohľad sa Frege a logickí pozitivisti vysporiadali s touto situáciou odlíšením kontextu objavu a kontextu zdôvodnenia. Tvorba nových reprezentačných nástrojov spadá do kontextu objavu, a preto sa logicistického či pozitivistického programu netýka. Ale iba na prvý pohľad, pretože tým, že kontext zdôvodnenia definovali pomocou formálnej logiky, vytrhli jeden z nástrojov symbolickej reprezentácie z jeho historického kontextu a *z relatívneho, kontingentného nástroja, ktorý je jedným medzi mnohými, spravili absolútny, univerzálny a výlučný rámec*. Matematika sa však vo svojich dejinách na žiadny rámec neviazala a každý rámec dokázala prekročiť. Skúsenostný charakter matematiky je daný práve jej schopnosťou vytvárať nové rámce umožňujúce vznik nového druhu skúsenosti. Pri spätnom pohľade, keď sú už všetky potrebné lingvistické inovácie zavŕšené, možno matematické poznanie vyložiť ako analytické. To však možno urobiť iba s poznaním, pre ktoré máme stabilizovaný jazykový rámec, v ktorom ho môžeme *objavovať a zdôvodňovať*. Matematika však dokáže robiť viac, než *objavovať a zdôvodňovať* poznatky. Dokáže vytvárať rámce, v ktorých sa takéto objavovanie a zdôvodňovanie poznania odohráva.

Tvrdenie, že poznatky matematiky sú analytické, možno vyložiť ako tvrdenie, že súčasná matematika je *navždy viazaná na reprezentačný rámec formálnej logiky* a v rozpore s celými jej dejinami už žiadny nový reprezentačný nástroj nevytvorí. Podľa logicizmu matematika stratila kreatívny náboj, vďaka ktorému počas celých svojich dejín prelamovala medze jazyka, ktoré ju obmedzovali. Proti logicizmu možno namietať, že analytické odvodenie je možné len pre poznanie, ktoré je založené na reprezentačnom rámci formálnej logiky. Takéto poznanie však nie je celé poznanie, lebo je pravdepodobné, že problémy, pred ktorými stojí súčasná matematika, ju prinútia vytvoriť nový reprezentačný nástroj, pričom poznanie vytvorené prostriedkami tohto nového nástroja nebude možné analyticky odvodiť prostriedkami dnešného rámca, pretože dnešný rámec má v porovnaní s tým novým obmedzenú logickú a expresívnu silu. Táto námietka nemá nič spoločného s kontextom objavu. Je jedno kto, kedy a za akých okolností ten nový nástroj vytvorí. Podstatné je to, že bude, ako všetky nástroje, prekračovať logické a expresívne medze predchádzajúceho nástroja. Preto tézu o analytickom charaktere matematiky vyložíme ako *tézu lingvistického pesimizmu*, teda ako tézu, že tvorivá sila matematiky sa vyčerpala a v budúcnosti už matematika nepríde so žiadnym radikálnym prelomením medzí jazyka. Všetky dôkazy a zdôvodnenia sa už navždy budú odohrávať v jazykovom rámci, ktorý vytvorili Frege, Peano, Russell, Hilbert a Ackermann. Proti tejto téze môžeme postaviť tézu lingvistického optimizmu, podľa ktorej ďalší vývoj matematiky bude v zhode s jej dejinami a matematika neostane uväznená vo svojom súčasnom rámci.

Sám osud logicizmu ukazuje, že Fregeho pesimizmus nebol odôvodnený. Rayo v stati *Logicism reconsidered* (Rayo 2005) píše, že logicizmus je vyvrátený, pričom ako hlavný argument používa Gödelovu vetu o neúplnosti. A Gödelova veta je výsledok získaný pomocou nového nástroja symbolickej reprezentácie (pozri štvrtú časť tejto state). Napriek Fregeho pesimistickým prognózam Gödel, Kleene, Church a Turing vytvorili nový jazykový rámec, ktorého pomocou sa podarilo ukázať, že existujú pravdivé tvrdenia matematiky, ktoré nie je možné dokázať. Teda jazykový rámec Fregeho logicizmu podobne ako ostatné rámce v minulosti má medze. Tieto medze matematika dokázala prelomiť a vytvoriť silnejší nástroj, v ktorom sa medze predošlého rámca stali explicitne vyjadriteľné.

2. Matematika ako skúsenostná veda

Uvedený pohľad na históriu matematiky posilňuje analógiu medzi matematikou a fyzikou. Ukazuje, že podobne, ako fyzika stojí na skúsenosti získanej pomocou merania a experimentu, stojí matematika na skúsenosti získanej prostredníctvom reprezentačných nástrojov. Preto je aj matematika aspoň do istej miery skúsenostná. Jej skúsenosť však nie je zmyslovou skúsenosťou, ako skúsenosť zúžene chápal empirizmus aj pozitivizmus, ale ide o skúsenosť symbolickú. Je to skúsenosť podobná tomu, keď rozumieme nejakému jazyku a za slovami sa vynárajú významy. Človek, ktorý danému jazyku nerozumie, má rovnako stimulované nervové zakončenia, ale nemá rovnakú skúsenosť. Samozrejme, zástanca empirizmu bude tvrdiť, že vynorenie významov je vecou odvodzovania a nie vnímania, a teda že v rovine skúsenosti sú si človek rozumejúci a nerozumejúci jazyku rovní a rozdiel medzi nimi je len v tom, že ten prvý dokáže zo svojej zmyslovej skúsenosti odvodiť zmysel toho, čo počuje, kým ten druhý toho schopný nie je. Nechcem sa púšťať do problémov filozofie jazyka, ale myslím, že porozumenie jazyku je neredukovateľná schopnosť podobne, ako je neredukovateľná schopnosť vnímať farby či vône. Vedľa zmyslovej skúsenosti, ktorú máme spoločnú so zvieratami, má človek špecifickú schopnosť vnímať zmysel (gest, jazyka, symbolov) a nadobúdať symbolickú skúsenosť.

Matematika nie je *a priori*, lebo závisí od nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie, ktoré sú kultúrnymi artefaktmi, a teda nemôžu byť apriórne. Matematika však nestráca svoj charakter objektívnosti a nevyhnutnosti, lebo skúsenosť nadobudnutá pomocou týchto nástrojov je objektívna a nevyhnutná. Matematika tak prišla o piedestál, na ktorý ju postavil Kant. Prišla oň však v inom zmysle, než si mysleli logickí pozitivisti. Pozitivisti z Kantovho syntetického poznania *a priori* zachovali jeho apriórnu zložku a obetovali syntetickosť matematiky. Obetovali schopnosť matematiky naučiť nás niečo nové a pravdy matematiky vyložili ako prázdne (či tautologické). *Matematika však nie je analytickou* v zmysle redukovateľnosti na logiku. Vďaka schopnosti vytvárať nástroje ikonickej reprezentácie otvárajúce prístup k stále komplexnejším tvarom *je matematika skúsenostnou vedou*.[6]

6 Samozrejme, nie v zmysle zúženého pozitivistického pohľadu na skúsenosť, ktorý ignoruje jazyk, v ktorom je skúsenosť vyjadrená.

a. geometria a vnímanie tvaru

Keď sa pozrieme na tri nástroje ikonickej reprezentácie: jazyk syntetickej geometrie, jazyk analytickej geometrie a jazyk iteratívnej geometrie, možno ich chápať ako tri spôsoby vzťahovania sa k fenoménu tvaru, ako tri pokusy o vymedzenie hranice medzi tvarom a beztvarým. *Syntetická geometria* odkrýva fenomén tvaru pomocou statických objektov, akými sú kružnica, kocka, guľa či kužeľ. Tomuto pohľadu ostáva tvar väčšiny prírodných útvarov skrytý. Syntetická geometria je vhodná na projektovanie artefaktov, teda budov, mostov a priehrad či ozubených kolies, piestov a hriadeľov. Jej vyššie partie preto tvoria dôležitú súčasť profesionálnej prípravy stavbárov, architektov či strojárov.

Druhý prístup k tvaru predstavuje *analytická geometria*, ktorá odkrýva fenomén tvaru pomocou súradnej sústavy a analytických formúl. Takto sa podarilo kvalitatívne rozšíriť oblasť fenoménov, ktorých tvar sa dá uchopiť prostriedkami geometrie. Napríklad v zavesenej reťazi vieme rozpoznať reťazovku, dokážeme opísať trajektóriu letiaceho kameňa alebo tvar kmitajúcej membrány. Tieto príklady ukazujú, že prístup analytickej geometrie nás privádza od technických artefaktov bližšie k prírode. Všade tam, kde je tvar prejavom jednoduchého zákona, kde vzniká ako výsledok pôsobenia niekoľkých faktorov, všade tam je jazyk analytickej geometrie schopný tvar exaktne uchopiť. Útvary, ktoré sa nerodia naraz, ale sú výsledkom eróznych či evolučných procesov, útvary, pri ktorých vzniku pôsobí nie jeden či desať určujúcich faktorov, ale milióny náhodných vplyvov, ostávajú však aj pre analytický prístup beztvaré.

Tretí prístup k tvaru prináša *iteratívna geometria*, ktorá odkrýva tento fenomén pomocou iterácií určitej transformácie. Keďže rast živočíchov a rastlín sa zakladá na opakovaní delenia buniek a procesy erózie sú tvorené periodickými vplyvmi prostredia, umožňuje iteratívna geometria tým, že svoje útvary generuje iterovaním určitej procedúry, exaktne hovoriť o tvare prírodných útvarov. Ako napísal Benoit Mandelbrot, jeden z tvorcov novej geometrie:

> Prečo je geometria často označovaná ako „chladná" a „suchá"? Nuž, jeden z dôvodov spočíva v jej neschopnosti opísať také tvary, ako sú tvar oblaku, hory, línie pobrežia alebo stromu. Oblaky nie sú gule, hory nie sú kužele, pobrežie nie je tvorené oblúkmi kružníc. Kôra stromu nie je hladká

> a ani blesk si nerazí svoju cestu priamo... Existencia takýchto tvarov nás vyzýva, aby sme študovali to, čo Euklides ponechal bokom ako „beztvaré“, vedie nás k morfológii „amorfného“. (Mandelbrot 1977, 13)

Vývin v línii syntetická geometria – analytická geometria – fraktálna geometria tak mení spôsob odkrytosti tvaru a posúva hranicu medzi „tvarým“ a beztvarým. Je to zaujímavé, lebo pri zbežnom pohľade sa môže zdať, že vnímanie tvaru a predovšetkým hranica medzi tým, čo má tvar, a tým, čo vnímame ako beztvaré, je záležitosť biológie alebo psychológie a je takto pevne daná. Aj keď nechcem spochybňovať význam biologických a psychologických faktorov, je zaujímavé, že vnímanie tvaru má aj jazykový rozmer. Zmeny jazyka matematiky, zrod analytickej a fraktálnej geometrie umožnili vytvoriť úplne nové univerzum tvarov. Najskôr v hlavách niekoľkých matematikov, neskôr v teóriách fyzikov, aby napokon pod vplyvom techniky tieto nové tvary prenikli aj do každodennej skutočnosti. Zdá sa, že matematika pôsobí ako faktor, ktorý ovplyvňuje vnímanie skutočnosti. Lebo každý, kto sa oboznámil s teóriou fraktálov, asi inak vníma list paprade či skalné bralo. Je možné, že dnešný človek inak vníma tvary okolo seba než antický Grék a že táto inakosť je podmienená inakosťou našej matematiky. Matematika formuje nielen myslenie a priestorovú predstavivosť, ale aj to, ako vnímame.

Matematika ovplyvňuje nielen to, ako vnímame tvar objektov, ale aj to, ako vnímame tvar trajektórií. Keď sa pozrieme na Aristotelovu teóriu prirodzených pohybov, zistíme, že v nej dominujú priamočiare a kruhové pohyby. Túto okolnosť možno pripísať Euklidovmu „vplyvu“.[7] V euklidovskej geometrii sú priamky a kružnice základné tvary. Zdá sa, že Aristoteles nachádza v prírode priamočiare a kruhové pohyby nie z fyzikálnych príčin, ale preberá ich z geometrie. Keď sa v 17. storočí matematike otvoril nový svet tvarov, priamka a kružnica stratili svoje výsadné postavenie a fyzici začali trajektórie pohybov

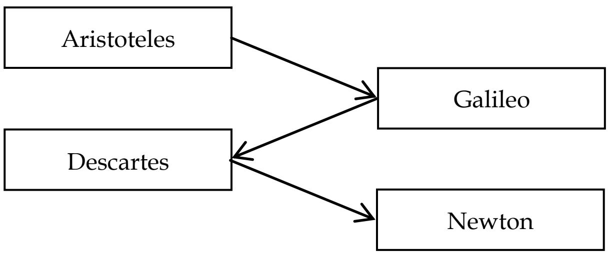
[7] Uvedomujem si, že Euklides žil po Aristotelovi, takže ak medzi nimi bol nejaký vplyv, bol opačným smerom. Euklidove *Základy* sú však kodifikáciou určitej tradície. Keď hovorím o Euklidovom „vplyve“ na Aristotela, mám na mysli vplyv tejto tradície (reprezentovanej Eudoxom, Theaitetom a ďalšími matematikmi, ktorých objavy sú zhrnuté v *Základoch*). Euklida chápem ako matematika, ktorý túto tradíciu završuje.

vyberať zo širšej škály kriviek. Zistili, že vrhnutý kameň letí po parabole, planéty obiehajú po elipsách, dráhu najkratšieho času (brachystochronu) tvorí cykloida. Aristotelova teória začala na pozadí tohto širšieho sveta tvarov vyznievať umelo. Názoru, že kruhový pohyb je „prirodzený", už nik nerozumel. Tento pohyb bol prirodzený na pozadí euklidovskej geometrie, ale vo svete analytickej geometrie nie je o nič prirodzenejší než pohyb po ľubovoľnej inej hladkej krivke. Podobne, keď sa v 19. storočí objavili prvé fraktály, postupne si našli cestu do fyziky, napríklad do teórie Brownovho pohybu. Zdá sa, že geometrické jazyky neboli dôležité len z hľadiska vnímania *tvaru*, ale zásadným spôsobom ovplyvnili aj vnímanie *pohybu*. Podobne ako geometrické tvary aj fyzikálne procesy možno opisovať syntetickým, analytickým alebo iteratívnym spôsobom.

Analytická geometria zásadným spôsobom pretvorila našu skúsenosť s tvarom a s pohybom. Nie však tak, že by nám poskytla nejaký nový fakt (ako skúsenosť zúžene chápu pozitivisti), ale tým, že všetky fakty – tie staré, známe od antiky, aj tie nové – zasadila do nového jazykového rámca. Na pozadí tohto rámca medzi faktmi vyvstali nové, netušené súvislosti a v spleti dát vyvstal poriadok. Z chaosu vnemov vznikla skúsenosť. A práve v tom, že pomocou nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie matematika otvára prístup k javom a súvislostiam, ktoré by bez týchto nástrojov ostali navždy nepoznateľné, je vzťah matematiky so skúsenosťou. Mohlo by sa zdať, že to, čo tu opisujem, je *aplikácia* matematiky, teda že ide o skúsenosti získané pomocou matematiky a nie o skúsenostný charakter samotnej matematiky. To je však omyl. Pokiaľ nebol skonštruovaný príslušný reprezentačný nástroj, nemohol nikto, ani matematik, ani nematematik, tieto tvary vnímať, nemohli byť predmetom jeho skúsenosti. Aj keby ich náhodne zazrel, nemohol si to uvedomiť. Na matematike je podstatná jej *schopnosť vytvoriť reprezentačný nástroj*, ktorý potom možno aplikovať. Schopnosť vytvoriť nástroj, ktorý umožňuje vznik nového druhu skúsenosti, je tým, čo možno nazvať skúsenostným rozmerom matematiky. Analytické krivky a fraktály ležali za horizontom prirodzenej skúsenosti. Nie že by v nás obklopujúcom svete neexistovali objekty majúce tvar analytických či fraktálnych kriviek, ale bez príslušného reprezentačného nástroja nie sme schopní ich ako také vnímať. Matematika nás tým, že vytvorí nový reprezentačný nástroj, otvorí skúsenosti s týmito objektmi. Matematika nevytvorila žiadny nový fakt (tie fakty pred nami už ležali), ale prelomením horizontu otvorila k nim prístup.

b. reprezentačné nástroje a opis pohybu

Podobne ako pri vnímaní tvaru (či už tvaru objektov alebo tvaru trajektórií), matematika zohrala zásadnú úlohu aj pri konceptualizácii pôsobenia a zrode dynamického opisu pohybu. Nasledujúci graf znázorňuje vzťahy medzi pojatiami pohybu u Aristotela, Galilea, Descarta a Newtona.



Aristoteles a Galileo sa usilujú o geometrickú teóriu, ktorá opisuje pohyb ako zmenu polohy v priestore (prvý riadok), kým Descartes a Newton budujú dynamickú teóriu založenú na opise pôsobenia (druhý riadok). Pritom Aristotelova ako aj Descartova teória je formulovaná verbálne (prvý stĺpec), kým Galileova a Newtonova teória je formulovaná pomocou matematiky (druhý stĺpec).

Podľa *Aristotela* je (miestny) pohyb premiestnením sa telesa z jedného miesta na druhé. Pohyb je určený dvoma miestami. Jednak je to východisko pohybu, t. j. miesto, kde sa teleso nachádza predtým, ako sa začne pohybovať, a jednak cieľ pohybu, t. j. miesto, kam svojím pohybom smeruje. Pohyb končí, keď teleso dosiahne svoj cieľ. Toto pojatie pohybu možno označiť ako teóriu *geometrického prechodu*. Jej základom je geometria univerza v podobe Aristotelovej teórie prirodzených miest a pohyb je konceptualizovaný ako prechod z jedného miesta na iné. Ako základný príklad takéhoto pohybu možno uviesť pohyb ťažkých predmetov, ktoré sa pohybujú priamočiaro na svoje prirodzené miesto dole. *Galileo* vložil medzi počiatočný a koncový bod pohybu trajektóriu, pričom pohyb opisuje ako spojitý proces prechádzania telesa po tejto trajektórii. K opisu pohybu tak patrí nielen to, odkiaľ a kam sa teleso pohybuje, ale aj určenie toho, po akej trajektórii sa pohybuje a akým spôsobom po svojej trajektórii prechádza. Tak pri voľnom páde Galileo doplnil Aristotelov poznatok, že ťažké teleso padá priamočiaro dole (t. j. po úsečke smerujúcej k stredu Zeme), o zákon opisujúci, ako túto dráhu prechádza – prejdená dráha je úmerná štvorcu času. Podobne, pri šikmom vrhu má dráha tvar paraboly, pričom pohyb prebieha tak, že jeho horizontálna zložka má konštantnú rýchlosť. Galileo tým pohyb premenil na *geometrické plynutie*, na spojité premiestňovanie sa telesa po trajektórii podľa presného zákona určujúceho to, v ktorom okamihu sa kde na trajektórii nachádza.

Pri opise prechodu od Aristotelovej teórie ku Galileovej teórii sa ponúka paralela s prechodom od syntetickej geometrie k analytickej. Ako sme uviedli vyššie, Aristoteles konceptualizuje pohyb prostriedkami syntetickej geometrie. Prechod ku Galileovej koncepcii možno vyložiť ako nahradenie rámca syntetickej geometrie rámcom geometrie analytickej, keď Galileo medzi počiatočný a koncový bod aristotelovského pohybu položil krivku. Preto aspoň časť Galileovho prínosu k porozumeniu pohybu možno pripísať na vrub nového nástroja ikonickej reprezentácie – analytickej geometrii.

Descartes opisuje pohyb dynamicky ako interakciu. Na rozdiel od Aristotela a Galilea, ktorí dokázali opísať iba pohyb jediného izolovaného telesa, Descartes opisuje vzájomné pôsobenie telies. Paradigmatickým modelom interakcie je preňho zrážka pohybujúceho sa telesa s telesom v kľude. Pri zrážke platí zákon zachovania množstva pohybu a interakcia spočíva v prechode určitého množstva pohybu (či hybnosti) z jedného telesa na druhé. Descartes tak pri opise pôsobenia porovnáva stav pred zrážkou so stavom po zrážke a pomocou zákona zachovania dáva tieto dva stavy do vzájomného vzťahu. Descartovu koncepciu tak možno charakterizovať ako *dynamický prechod*. Nie je to prechod medzi miestami ako u Aristotela, ale prechod medzi stavmi, prechod z počiatočného do koncového stavu systému ako celku. *Newton* vkladá medzi stav pred interakciou a stav po interakcii spojitý proces pôsobenia. Dá sa povedať, že s Descartovou teóriou robí niečo podobné tomu, čo Galileo spravil s Aristotelovou teóriou. Na miesto prechodu medzi izolovanými stavmi kladie spojité plynutie, ktoré opisuje pomocou diferenciálnej rovnice. Newtonovu koncepciu preto možno charakterizovať ako *dynamické plynutie* (detaily možno nájsť v statiach Kvasz 2002, 2004 a 2008).

Keď prechod od Descartovej k Newtonovej koncepcii opisu pôsobenia analyzujeme z hľadiska nástrojov symbolickej reprezentácie, možno v ňom rozpoznať prechod od jazyka algebry k jazyku diferenciálneho a integrálneho počtu. Descartes opisuje pôsobenie pomocou zákona zachovania množstva pohybu, čo je algebraická rovnica. Tá neumožňuje opísať spojitý proces pôsobenia, umožňuje iba porovnávať diskrétne stavy zodpovedajúce izolovaným okamihom v čase. Až keď Newton prešiel k diferenciálnemu a integrálnemu počtu, mohol na opis pôsobenia použiť namiesto algebraickej rovnice rovnicu diferenciálnu, čo umožnilo namiesto izolovaných stavov položiť spojitý proces. Vidíme, že v prípade Galilea aj v prípade Newtona zohral v rozvoji ich fyzikálneho opisu pohybu rozhodujúcu úlohu nový nástroj ikonickej, resp. symbolickej reprezentácie. Tým nechcem popierať empirickú a experimentálnu bázu ich vedeckého prínosu. Chcem len zvýrazniť úlohu reprezentačných nástrojov matematiky, ktoré túto skúsenostnú bázu urobili vôbec možnou.[8]

c. matematika a ľudská skúsenosť

Analytická geometria či diferenciálny a integrálny počet nie sú jediným príkladom, kedy nový nástroj symbolickej či ikonickej reprezentácie zásadným spôsobom pretvoril celú skúsenosť, celé vnímanie skutočnosti. Naopak, zdá sa, že každý reprezentačný nástroj priniesol podobný zlom. Objav pojmu funkcie v rámci diferenciálneho a integrálneho počtu bol rovnako konštitutívny pre vznik novovekej fyziky ako analytická geometria pre vznik novovekého vnímania tvaru. To, že sa veličiny chápu ako funkcie iných veličín, je zásadné pre celú

[8] Je nápadné, ako táto formulácia pripomína Kanta. To ukazuje, že Kant videl mnohé súvislosti presne, ale celkový obraz mu skreslilo jeho zúžené chápanie skúsenosti (viazané na zmyslovosť) a úsilie vtesnať syntetický rozmer matematiky (ktorý správne postrehol) do tohto úzkeho rámca. Keď pojem skúsenosti rozšírime o symbolickú skúsenosť, umožní to zachrániť veľkú časť Kantovej filozofie matematiky. (Samozrejme, za tú cenu, že jeho argumenty proti metafyzike a teológii sa stanú nekonkluzívnymi. Preto je otázne, či by Kant takú korekciu akceptoval.)

modernú fyziku a úplne cudzie celému antickému pohľadu na svet. Niet pochýb, že fyzika je skúsenostná veda, ale táto veda sa stala možnou iba potom, ako matematika vytvorila pojem funkcie a diferenciálnej rovnice. Bez týchto pojmov by sme asi dodnes žili vo svete aristotelovskej fyziky a s našim okolím by sme mali iný súbor skúseností. Tým, že matematika vytvára nástroje, ktoré umožňujú v spleti dát rozpoznať pravidelnosť (analytická a fraktálna geometria) či jemné rozlíšenia (ako sú prvá a druhá derivácia), robí nás schopnými *vnímať* zmysluplnú informáciu tam, kde predošlé generácie vnímali iba nezmyselný chaos. Skúsenosťou asi nie je každé dráždenie nervových zakončení, ale len také, ktoré dospeje k uvedomeniu, teda ktorému vedomie dokáže priradiť *zmysel*. Prínos matematiky k skúsenosti je v tom, že vytvára nástroje na nachádzanie jemných vzorov (patterns) v tom, čo zakúšame. Z kantovského výkladu si matematika zachováva syntetickosť, schopnosť naučiť nás niečo nové. Stráca však apriórnosť. Preto objektívnosť a nevyhnutnosť matematiky treba vyložiť inak než pomocou apriórnosti.[9] *Matematika je poznávaním objektívneho sveta konštituovaného pomocou nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie.*[10]

3. Logicizmus vo svetle symbolickej skúsenosti

V poslednej štvrtine 19. storočia došlo k zvláštnej zmene. Jeden z nástrojov symbolickej reprezentácie, predikátový počet, bol stotož-

[9] Zdôvodnenie objektívnosti, všeobecnosti a nevyhnutnosti matematiky presahuje rámec tejto state. Som však presvedčený, že toto zdôvodnenie možno podať na báze Husserlovej fenomenológie. Treba vyložiť proces konštitúcie jazyka matematiky, ku ktorému došlo v rozmedzí od Thálesa po Euklida, podobne ako je v statiach Kvasz (2000), (2001) a (2004) opísaný proces konštitúcie jazyka fyziky v rozmedzí od Galilea po Newtona.

[10] Toto tvrdenie už presahuje rámec tejto state, ktorej cieľom je len objasniť epistemologický aspekt matematiky. Objasnenie povahy objektov, o ktorých hovorí matematika, ako aj spôsobu ich konštitúcie pomocou reprezentačných nástrojov musíme ponechať na pokračovanie tejto state. Tvrdenie sme uviedli preto, aby čitateľ videl, kam spejeme. Sémantický aspekt matematiky vyložíme realisticky. Budeme tvrdiť, že objekty, o ktorých hovorí matematika, objektívne existujú podobne ako objekty, o ktorých hovorí fyzika, a teda to nie sú subjektívne konštrukty. Ich existencia je podobne ako v prípade fyziky inštrumentálne konštituovaná.

nený s logikou. Na jednej strane bolo toto stotožnenie veľkým prínosom pre rozvoj matematiky, kde viedlo k zrodu nových disciplín, ako sú teória formálnych systémov či teória modelov, aj pre rozvoj filozofie, kde sa na ňom zakladá časť analytickej filozofie a filozofie jazyka. Stotožnenie predikátového počtu s logikou svojím významom nijako nezaostáva za podobným stotožnením – stotožnením reálneho priestoru s priestorom geometrickým, ku ktorému došlo v novoveku. Z hľadiska vedy takéto stotožnenia otvárajú nevídané možnosti rozvoja. Z hľadiska filozofie však zastierajú zásadný rozdiel medzi skutočnosťou a jej matematickým opisom.

Vo filozofii matematiky stotožnenie predikátového počtu s logikou zastrelo skutočnosť, že predikátový počet je jedným z nástrojov symbolickej reprezentácie, ktoré spolu konštituujú svet matematiky. V dôsledku uvedeného stotožnenia predikátový počet prebral význam, ktorý tradične náležal logike, a na predikátový počet sa začalo hľadieť ako na niečo zásadnejšieho než bežné matematické teórie, na niečo, čo môže matematiku *fundovať*. Vznikla snaha redukovať spočiatku len aritmetiku, neskôr aj celú matematiku, na túto jej časť. Keby to nebola formálna logika, ale „prirodzená logika“, bol by logicizmus nesporne pozoruhodným programom. Zástancovia logicizmu si však neuvedomili, že v dôsledku stotožnenia predikátového počtu s logikou matematiku neredukujú na logiku, ale na kalkul (ktorý s logikou stotožnili), teda vlastne na matematiku. Keď predikátový počet položíme vedľa ostatných nástrojov symbolickej reprezentácie, zistíme, že jeho objav zapadá do celkového trendu vývinu matematiky. Predikátový počet nie je ničím výnimočný a logicizmus je tak *redukcia matematiky na matematiku*. Logicistický program redukcie aritmetiky na logiku sa v dôsledku formalizácie logiky stáva vnútromatematickým problémom redukcie jednej matematickej disciplíny na inú, rovnako matematickú disciplínu – axiomaticky budovanú logiku.

a. logicizmus a jeho príbuzní

Prehľad nástrojov symbolickej reprezentácie ukazuje paralelnosť logicizmu s radom podobných redukcionistických projektov v minulosti. Na prvom mieste je „*aritmeticizmus*“, ako možno nazvať pytagorejské presvedčenie, že pomocou čísel a ich pomerov možno opísať všetko od astronómie až po hudobnú harmóniu. Podľa Aristotela „*py-*

tagorejci sú toho názoru, že číslo je počiatkom súcna aj ako látka, aj ako jeho vlastnosti a stavy" (Metafyzika I,5,985b; Aristoteles 1972, 252). Ďalšou paralelou logicizmu je „*algebraicizmus*", ako možno nazvať Viètovo presvedčenie, ktorým uzatvára *In artem analyticam isagoge*, že pomocou analytickej metódy (formalizmus jeho algebry) bude možné vyriešiť všetky matematické problémy. Viète píše:

> Nakoniec, analytické umenie, ktorému sme dali trojakú formu zetetiky, poristiky a exegetiky si oprávnene prisvojuje problém všetkých problémov, ktorý znie: NENECHAŤ ŽIADNY PROBLÉM NEVYRIEŠENÝ.
> (Viète 1591, 353)

Viètov výrok vyjadruje presvedčenie, že celú matematiku možno redukovať na algebraický kalkul – v plnej analógii s tým, ako chce Frege redukovať aritmetiku na svoj (logický) kalkul. Ďalšou paralelou logicizmu je „*analyticizmus*", ako možno nazvať Laplacove presvedčenie, ktoré vyjadril v úvode *Filozofickej eseje o pravdepodobnosti*:

> Predstavme si Inteligenciu, ktorá by v určitom okamihu času poznala všetky sily pôsobiace v prírode a polohy všetkých častíc, z ktorých pozostáva svet; predpokladajme ďalej, že táto Inteligencia by bola schopná podrobiť všetky tieto dáta matematickej analýze. ... Potom by nič neostalo neurčité pre túto Inteligenciu. Minulosť a budúcnosť by bola odkrytá jej očiam. (Laplace 1820, 4)

Laplace tu vyjadruje presvedčenie, že určitý kalkul je schopný vyriešiť všetky problémy. Keby túto Inteligenciu zaujímala napríklad otázka úplnosti aritmetiky, vypočítala by stav sveta do roku 1931 a z polôh škvŕn tlačiarenskej farby na listoch časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik* by si prečítala Gödelov dôkaz. Znalosť matematickej analýzy, podobne ako u Vièta znalosť analytickej metódy, otvára bránu poznania všetkého. Do tejto rodiny patrí aj „*logicizmus*", podľa ktorého možno pomocou predikátového počtu definovať všetky pojmy aritmetiky a odvodiť všetky jej základné tvrdenia. Posledným v tomto rade je „*algoritmicizmus*", ako možno nazvať presvedčenie, že Turingov stroj vie simulovať ľudské myslenie. V známej učebnici teórie rekurzie Odifreddi najprv uvedie tézu AI (Artificial Intelligence) „*Mentálne funkcie môžu byť simulované strojmi*", aby ju komentoval:

> Všetka práca v oblasti umelej inteligencie (rozpoznávanie obrazcov, reprodukcia reči, riešenie problémov, strojové dokazovanie viet, hranie hier,

učenie sa a porozumenie) vytvárajú induktívnu evidenciu v prospech tézy AI.
(Odifreddi 1989, 117)

Z tohto náčrtu vidno, že vždy, keď sa vytvoril nový nástroj symbolickej reprezentácie, jeho tvorcovia podľahli očareniu možnosťami, ktoré sa matematike otvorili. A treba priznať, že oprávnene. Každý nový nástroj zásadným spôsobom rozšíril expresívnu i logickú silu jazyka matematiky, a tak umožnil vyriešiť rad problémov, ktoré boli pre predošlé generácie neriešiteľné. Rozhodne nešlo o maličkosti. Metódy matematickej analýzy, ktoré tvoria jadro Laplacovho programu, umožnili zrod fyziky, ktorá píše diferenciálne rovnice (Lagrangeovu, Maxwellovu, Schrödingerovu) a pomocou nich počíta časový vývoj fyzikálnych systémov. Podobne Turingov stroj je teoretickým základom počítačov a je tak v pozadí zmien, ktoré premenili celú modernú spoločnosť. Preto nádeje vkladané do nových nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie sú pochopiteľné. Ich tvorcom sa skutočne mohlo zdať, že vytvorili nástroj, ktorý dokáže vyriešiť všetko. Z tohto hľadiska možno chápať logicizmus v paralele s aritmeticizmom, algebraicizmom, analyticizmom či algoritmicizmom ako *zaujímavý vnútromatematický projekt*: redukovať spočiatku jednu matematickú teóriu – aritmetiku, a neskôr celú matematiku, na inú, rovnako matematickú teóriu – logiku. Ako v prípade ostatných projektov spojených so vznikom nových reprezentačných nástrojov, aj logicizmus zásadným spôsobom obohatil matematiku o celý rad pojmov, viet a teórií a fundamentálne zmenil matematiku.

Rovnako ako bolo prirodzené počiatočné očarenie novým nástrojom, dalo sa očakávať, že po čase sa vynoria problémy, na ktoré daný nástroj nepostačuje. Aritmetika narazila na *nesúmerateľnosť*, algebra narazila na *neriešiteľnosť* rovníc piateho stupňa, analýza narazila na *neintegrovateľnosť* diferenciálnych rovníc pomocou kvadratúr a logika narazila na *neúplnosť* aritmetiky. Takže osud logicizmu, čo sa týka jeho počiatočnej plauzibilnosti či jeho vyústenia, sa neodlišuje od osudu ostatných programov. Možno povedať, že projekt logicizmu, ak odhliadneme od nepríjemností spojených s Russellovým paradoxom, postihol rovnaký osud ako podobné projekty v minulosti. Usilovať sa preto o záchranu Fregeho projektu nejakou formou neologicizmu či usilovať sa o oživenie ostatných projektov pomocou nejakých neopytagoreizmov, neoalgebraizmov či neoanalyticizmov, je asi zbytočné.

Matematika doteraz prekonala medze každého nástroja symbolickej reprezentácie a niet dôvodu, aby to bolo v prípade logicizmu inak. Z *vnútromatematického* hľadiska môže neologicizmus viesť k zaujímavým výsledkom. To je však iný problém, ktorý s filozofiou matematiky veľmi nesúvisí.

b. logicizmus a filozofia matematiky

Súčasná diskusia o povahe matematiky je zastretá tým, že nástroj symbolickej reprezentácie vytvorený Fregem, Peanom, Russellom, Hilbertom a Ackermannom bol vyňatý z matematiky a stotožnený s logikou. Na logiku, t. j. filozofickú disciplínu, ktorá sa zaoberá rôznymi aspektmi správneho myslenia a argumentácie, sa začalo nazerať optikou určitého formálneho kalkulu. To, že sa jeden konkrétny kalkul presunul do logiky bez toho, aby sa priznalo, že ide o matematický nástroj, zásadne skresľuje vnímanie vzájomného vzťahu matematiky a logiky. Predikátový počet bol vyňatý z historickej postupnosti reprezentačných nástrojov, kde bol jedným z mnohých a bol mu prepožičaný status čohosi zásadnejšieho, než je nejaká symbolická reprezentácia. To skresľuje pohľad na ostatné reprezentačné nástroje, ktorých diskusia sa z filozofie matematiky vytratila.

Z filozofického hľadiska, *z hľadiska úsilia porozumieť povahe matematických objektov a povahe matematického poznania*, je logicizmus omylom. Keď zvolíme jednu matematickú teóriu a celú matematiku redukujeme na túto teóriu, nijako tým neobjasníme povahu matematického poznania. Aj keby sa redukcia celej matematiky na matematickú logiku podarila, z filozofického hľadiska je to málo poučné. Veď aký filozofický význam má fakt, že sa podarilo určitú matematickú disciplínu previesť na inú? Mali by sme situáciu, aká nastala v antike, keď Euklides celú matematiku redukoval na geometriu. Takáto redukcia je z matematického hľadiska bezpochyby významným výdobytkom, ale z *filozofického* hľadiska neumožňuje hlbšie porozumieť matematike. Jednak preto, že takáto redukcia je vždy iba dočasná. Euklidovu redukciu rozbila algebra, Fregeho redukciu teória algoritmov. Je tu však jeden rozdiel. Kým Euklidova redukcia dominovala hlavnému prúdu matematiky vyše dvetisíc rokov, Fregeho logicizmus ostal v matematike marginálny a hlásili sa k nemu skôr filozofi. Porovnanie Fregeho s Euklidom je však poučné. Spektakulárny úspech Euklidovej redukcie mal tienistú stránku v tom, že vytesnil kalkulatívnu stránku matematiky (t. j. nástroje symbolickej reprezentácie), v dôsledku čoho antická matematika postupne ustrnula. Nový rozkvet matematiky nastal až vtedy, keď Arabi obnovili kalkulatívnu stránku matematiky vynálezom algebry. Preto je otázne, či redukcia tohto typu je vôbec *želateľná*. Je otázne, či je dobré chcieť matematiku redukovať na jediný nástroj reprezentácie (či už ikonickej ako Euklides, alebo symbolickej ako Frege). Názor, že matematika je svojou povahou *bipolárna*, teda že má ako symbolický, tak aj ikonický pól je asi k pravde bližšie než redukcionistické pokusy. Snaha redukovať ju na jeden z týchto pólov je znásilnením matematiky a ako taká musí skôr či neskôr stroskotať. Okrem toho je otázne, čo redukcia matematiky na matematiku môže povedať o predmete matematiky. Husserlom inšpirovaný pohľad založený na konfrontácii inštrumentálneho poznania s poznaním nadobudnutým v rámci žitého sveta umožňuje získať horizont, na ktorom sa dá otázka o povahe matematického poznania zmysluplne diskutovať. Keď naopak celú matematiku vyložíme na báze jediného reprezentačného nástroja, vedie to k ignorovaniu disciplín, ktoré patria k opačnému pólu ako nástroj, ktorého pomocou matematiku vykladáme. Navyše povaha napätia medzi ikonickým a symbolickým pólom ostáva pri redukcionistických prístupoch zastretá.

c. logicizmus a filozofia vedy

Keď porovnáme pojatie fyziky u Galilea, Descarta a Newtona, zistíme, že tieto tri základné koncepcie fyziky sa líšia predovšetkým v matematickom rámci, na ktorom zakladajú konceptuálne uchopenie pohybu. Galileo stavil na geometriu. To mu síce umožnilo opísať pohyb jednoduchých systémov ako voľný pád, šikmý vrh, pohyb kyvadla či pohyb po naklonenej rovine. Napríklad, pri voľnom páde ukázal, že dráhy prejdené za jednotlivé sekundy sú v pomeroch 1, 3, 5, 7. Galileovi však jeho *matematický jazyk* neumožňoval opísať vzájomné pôsobenie telies. Keď sa pozrieme na príklady, ktorými Galileo prispel k rozvoju fyziky, vidíme, že všetko sú to pohyby jediného izolovaného telesa. Či už zoberieme zákon voľného pádu, zákon šikmého vrhu alebo zákon izochrónnosti kyvadla, všetko sú to zákony opisujúce pohyb jedného telesa. A nie je ťažké nahliadnuť, že je to práve jazyk geometrie, ktorý svojou konkrétnosťou vedie k tomuto obmedzeniu.

Descartes prispel k rozvoju fyziky troma zásadnými inováciami. Ako prvé treba spomenúť to, že zaviedol pojem pohybového stavu. V nadväznosti na to vytvoril v dejinách fyziky prvú teóriu interakcie. Descartes opisoval interakcie pomocou zákona zachovania, teda pomocou algebraickej rovnice. Samozrejme, dnes vieme, že táto koncepcia je pri opise interakcií obmedzená. To však nesmie zastrieť skutočnosť, že v protiklade ku Galileovej kinematickej teórii bola Descartova teória prvou dynamickou teóriou a že Newton rozpracoval svoju koncepciu ako reakciu na Descartovo pojatie. Ako tretí Descartov prínos treba spomenúť zavedenie univerzálneho zákona. Kým všetky zákony objavené Galileom boli partikulárne zákony, teda zákony opisujúce jediný jav, Descartov zákon zachovania množstva pohybu bol prvým univerzálnym prírodným zákonom. A opäť je zrejmá súvislosť Descartových inovácií vo fyzike a matematického rámca, do ktorého boli jeho inovácie zasadené. Bol to jazyk algebry, ktorý umožnil Descartovi zásadný pokrok oproti Galileovi. Stav definuje Descartes ako súčin veľkosti a rýchlosti, teda ako *algebraickú* veličinu. Zákon zachovania množstva pohybu, ktorý je na jednej strane prvým univerzálnym zákonom v dejinách fyziky a tvorí aj základ Descartovho opisu interakcie, je *algebraickou* rovnicou. Teda je to skutočne jazyk algebry, na ktorom sú postavené hlavné Descartove inovácie vo fyzike.

Aj keď sa pojem stavu, popis interakcie a univerzálne zákony stali od Descartových čias trvalou súčasťou fyziky, neznamená to, že Descartova definícia stavu, jeho opis interakcie a formulácia univerzálneho zákona ostali platné. Karteziánska fyzika má rad nedostatkov, ktoré viedli Newtona k zmene takmer každého jej pojmu. Ako prvú si Newton uvedomil pomýlenosť Descartovho skalárneho pojmu množstva pohybu a nahradil ho vektorovým pojmom hybnosti. Pri opise interakcie nahradil algebraickú rovnicu (zákon zachovania) rovnicou diferenciálnou (pohybovým zákonom). A od Newtonových čias majú základné zákony fyziky spravidla (aj keď nie výlučne) podobu diferenciálnych rovníc. Až v tejto zmenenej podobe sa Newtonovi podarilo vytvoriť fungujúcu teóriu pohybu. A opäť nie je ťažké nahliadnuť, že Newtonov zásadný pokrok oproti Descartovi bol umožnený *matematickým jazykom*. Namiesto algebry, na ktorej budoval svoju fyziku Descartes, položil Newton diferenciálny a integrálny počet. Newtonov zákon pohybu bol jednou z prvých diferenciálnych rovníc v dejinách.

V tomto výpočte by sa dalo pokračovať a na ďalších zlomoch v dejinách fyziky ilustrovať úlohu, ktorú v nich hral jazyk matematiky. Matematika tým, že pomocou nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie otvára prístup k novým oblastiam foriem a regularít, otvára nové možnosti pre fyziku. Filozofia vedy logických pozitivistov je k vyššie uvedeným rozdielom slepá. Tým, že matematiku chápe v duchu logicistického programu ako súbor analytických tvrdení, nevenuje jej pozornosť, veď všetko, čo môže matematika priniesť, je obsiahnuté v logike. Namiesto trojice (*logika, matematika, skúsenosť*) sa modernú vedu usiluje uchopiť v rámci dvojice (*logika, empíria*). Ignoruje tak matematiku a jej úlohu vo fyzikálnom poznaní. Logickí pozitivisti samozrejme vedia, že vo vedeckých teóriách sa používa matematický aparát. Keďže boli presvedčení, že matematiku možno redukovať na logiku, zo svojich úvah vypustili matematiku a otázku zdôvodnenia vedeckých teórií sa usilovali vyložiť ako spojenie logiky a skúsenosti. Preto sa logický pozitivizmus označuje aj ako logický empirizmus.

Zdá sa však, že matematický jazyk vstupuje do vedeckých teórií inak než len svojou logickou stavbou. Matematika vstupuje do fyziky expresívnou a integratívnou silou svojich reprezentačných nástrojov, pričom na pozadí takto fungujúceho matematického rámca fyzika konštituuje svoju skúsenosť. Pozitivizmus nechápe povahu fyzikálnej skúsenosti, nechápe rozdiely vo vnímaní pohybu na pozadí rámca syntetickej geometrie (Aristotelova teória) a analytickej geometrie (Galileova teória). Preto je pochopiteľné, že jeho pokusy vysvetliť fyzikálne poznanie pomocou indukcie neboli úspešné. Asi neexistuje *logická* procedúra, ktorá by na základe empirickej skúsenosti umožnila zdôvodniť vedecké zákony (vo forme indukcie, konfirmácie či koroborácie) jednoducho preto, lebo *rámcom*, v ktorom indukcia, konfirmácia alebo koroborácia vo vede reálne prebiehajú, je *matematický, a nie logický rámec*. Na pozadí toho, čo sme o galileovskej, karteziánskej a newtonovskej fyzike povedali, čitateľa asi neprekvapí, keď budeme tvrdiť, že indukcia, konfirmácia či koroborácia prebiehajú v rámci každom z týchto troch pojatí fyziky odlišne. Tieto odlišnosti sú dané matematickým rámcom, na ktorom sú príslušné teórie vybudované. (O indukcii v Newtonovej fyzike pozri Kvasz 2004a, pozn. 5.)

Logickí pozitivisti tieto rozdiely ignorujú a problém indukcie, konfirmácie či koroborácie formulujú v rámci *galileovskej fyziky*.[11] Fungovanie indukcie, konfirmácie či koroborácie však nemôžu vysvetliť. Keď chcú zdôvodniť univerzálne zákony, neuvedomujú si, že ide o prvky karteziánskej a newtonovskej fyziky, ktoré v rámci galileovskej fyziky neexistovali. Galileo nemal univerzálne zákony, do rámca jeho fyziky takéto zákony nepatria a nemožno ich preto v rámci nej ani zdôvodniť. Descartes a Newton boli práve preto, aby mohli prírodu opísať pomocou univerzálnych zákonov, nútení opustiť geometrický rámec svojho predchodcu a prejsť k inému rámcu. Keďže si pozitivisti neuvedomujú existenciu príslušných rámcov, neuvedomujú si ani rozdiely medzi príslušnými koncepciami fyziky. Popper tvrdí, že indukcia je mýtus. Rovnako je však mýtické aj tvrdenie, že indukcia je mýtus. Celá pozitivistická teória vedy je mýtická, lebo ignoruje jazykový rámec, v ktorom sa veda rozvíja. Výklad matematiky je preto dôležitý nielen pre filozofiu matematiky. Nesprávny výklad matematiky má vážne dôsledky aj pre filozofiu vedy a epistemológiu.

4. Teória algoritmov ako nový nástroj symbolickej reprezentácie

Schéma vývinu nástrojov symbolickej a ikonickej reprezentácie uvedená v tejto stati sa líši od schémy uvedenej v knihe *Patterns of change* (s. 86) tým, že pribudol nový nástroj reprezentácie – *Teória algoritmov*. Týmto názvom označujem nástroj, ktorý sa zrodil v tridsiatych rokoch minulého storočia v množstve variantov od *teórie rekurzívnych funkcií* cez *Turingove stroje* až po *normálne algoritmy*. Ako prvá sa zrodila teória rekurzívnych funkcií, ktoré zaviedol Gödel pri dôkaze neúplnosti aritmetiky. V dejinách matematiky je častým javom to, že určitý prelomový výsledok je dosiahnutý nielen vďaka genialite jeho autora, ale nezanedbateľnú zásluhu na novom výsledku má aj určitá ja-

11 Oni vlastne nehovoria o Galileovi, ale o babylonskej vede, pretože babylonská veda je veda, v ktorej matematika nehrala žiadnu rolu. Preto možno tvrdiť, že pozitivizmus je rekonštrukciou babylonskej vedy, ktorá robila to, čo pozitivisti chcú: hľadala regularity v empirických dátach. Babylonská veda je z pozitivistického hľadiska tou pravou. Od galileovskej či newtonovskej fyziky sa líši tým, že nemá matematický rámec.

zyková inovácia. Tak Cardanovo riešenie rovnice tretieho stupňa súvisí so zavedením neznámej do jazyka matematiky, podobne ako Descartovo vyriešenie Pappovho problému súvisí so zavedením súradnicovej sústavy. Preto je prirodzené predpokladať, že za Gödelovým výsledkom sa okrem geniality skrýva aj inovácia jazyka. Pokúsim sa zdôvodniť tézu, že objav *teórie rekurzie* je rovnakého druhu ako objav *neznámej* (pri vzniku algebry) či objav *funkcie* (spojený so vznikom diferenciálneho a integrálneho počtu).

a. vzťah teórie rekurzie k predošlým jazykom

Ako prvý argument v prospech našej tézy možno uviesť to, že pojem *rekurzívnej funkcie* vzniká rovnakým spôsobom ako ostatné symbolické nástroje – teda tak, že *nekonečný súbor objektov* vytvorených pomocou starého reprezentačného nástroja *sa uchopí ako jediný objekt nového nástroja*. Asi najčistejší príklad ilustrujúci tento typ prechodu poskytuje *analytická geometria*, kde sa na analytickú krivku môžeme pozerať ako na nekonečný súbor izolovaných bodov, z ktorých každý sám osebe je skonštruovaný pomocou euklidovskej konštrukcie, t. j. pomocou predchádzajúceho reprezentačného nástroja. Analytická geometria akoby tento nekonečný súbor konštrukcií „uskutočnila" v jedinom kroku, a tým vytvorila novú krivku. Uchopenie nekonečného počtu aktov predošlého nástroja ako jediného objektu nového nástroja je typické aj pre nástroje symbolickej reprezentácie.

V *algebre* polynóm $x^2 + 4x + 2$ vlastne *uchopuje nekonečný súbor* aritmetických termov typu $1 + 4 + 2$; $4 + 8 + 2$; $9 + 12 + 2$; ... *ako jediný objekt*. Samozrejme, z pohľadu konkrétnych čísel tu nepribudlo nič nové, čo by sa v rámci aritmetiky (predošlého nástroja symbolickej reprezentácie) nedalo vyjadriť. To nové, čo dáva jazyku algebry logickú a expresívnu prevahu nad jazykom aritmetiky, je zhrnutie nekonečného počtu aritmetických termov do jedného výrazu. Umožňuje to explicitne vyjadriť všeobecnosť. Algebra priniesla neskôr aj nové výrazové prostriedky ako napríklad n-tú odmocninu a komplexné čísla, ale spočiatku sa kupcom používajúcim novú algebru mohlo zdať, že algebra je len akousi vyššou aritmetikou – veď je založená na štyroch počtových úkonoch. Podobný názor zastával aj Newton, keď svoju knihu o algebre nazval *Arithmetica Universalis* (Newton 1707).

Podobne je to v *matematickej analýze*, keď z polynomickej formy $x^2 + 4x + 2$ vznikne funkcia $y = x^2 + 4x + 2$, rozdiel je tu opäť v tom, že kým algebraický polynóm uchopuje každý jeden z termov 1 + 4 + 2; 4 + 8 + 2; 9 + 12 + 2; ... *schematicky*, teda *nerozlíšene* (t. j. tým, že forma môže označovať ľubovoľný z nich) a *izolovane* (t. j. jednotlivý term dostaneme dosadením do formy, čím strácame ostatné termy zo zreteľa), funkcia prináša do hry novú kvalitu v podobe funkčnej závislosti. Všeobecnosť, ktorú uchopuje funkcia, je na rozdiel od polynómu (chápaného ako algebraický výraz) *neschematická*. Funkcia uchopuje svoje hodnoty *rozlíšene* (preto môžeme hovoriť o inverznej funkcii, na rozdiel od formy, ku ktorej v dôsledku nerozlíšenosti jej hodnôt nemáme ako určiť inverznú formu)[12] a *neizolovane* (preto môžeme o funkcii hovoriť, že je rastúca, má minimum, je spojitá, ... lebo daná hodnota je vždy uchopená v jednote s ostatnými). Matematici si však spočiatku neuvedomovali novosť univerza, ktoré sprístupnil jazyk analýzy – ešte Lagrange chcel založiť analýzu na algebre.

Predikátový počet umožnil definovať funkcie, ktoré sú na rôznych intervaloch definované rôznymi formulami. Samozrejme, matematici už dlhšiu dobu takéto funkcie používali. Pred vznikom predikátového počtu ich však nebolo možné formálne zapísať, teda ich definícia nebola termom jazyka matematiky. Keď Frege vytvoril nový nástroj symbolickej reprezentácie, stalo sa možným vyjadriť funkcie pozliepané z rôznych termov priamo v jazyku.

Teória rekurzie s pojmom rekurzívne definovanej funkcie opäť zdanlivo nepriniesla nič prevratne nové. Možnosť definovať určitú funkciu viac než jedným výrazom, teda vytvoriť term zložený z rôznych vzťahov, priniesol už predikátový počet. Preto ľubovoľnú jednotlivú *hodnotu* $f(m)$ rekurzívne definovanej funkcie môžeme vyjadriť formulou predikátového počtu ako konjunkciu konečného počtu identít, ktoré vyjadrujú jednotlivé kroky rekurzívneho výpočtu. To, že každú jednotlivú hodnotu rekurzívnej funkcie možno vyjadriť prostriedkami predikátového počtu, je však v súlade s algebrou, kde každá konkrétna hodnota polynómu je aritmetickým výrazom. A tiež

12 Keď do algebry zavedieme pojem zobrazenia, získame možnosť hovoriť o inverznej matici k danej matici. To je však importovanie výdobytkov neskoršieho nástroja do univerza konštituovaného skorším nástrojom.

v analytickej geometrii možno každý bod krivky získať euklidovskou konštrukciou. Podobne ako v algebre či analytickej geometrii, aj v teórii rekurzie vzniká expresívny presah jazyka až vtedy, keď sa celý súbor aplikácií operácie rekurzie na všetky hodnoty argumentu uchopí ako jeden objekt. Vidíme teda, že teória rekurzie vzniká úplne rovnako ako ostatné nástroje symbolickej alebo ikonickej reprezentácie.[13]

b. Gödelove vety ako typický negatívny výsledok

Druhým argumentom v prospech tézy, že teória rekurzie je nový nástroj symbolickej reprezentácie, je skutočnosť, že hlavný výsledok, ktorý sa s jej pomocou získal, je analogický s výsledkami, ktoré priniesli predošlé nástroje. Jednou z typických čŕt každého nového reprezentačného nástroja je to, že umožňuje explicitne vyjadriť logické medze predošlého nástroja, ktoré boli prostriedkami predošlého nástroja nevyjadriteľné. A Gödelove vety o neúplnosti sú výsledkom tohto druhu. Ukazujú, že určitá formula nie je pomocou určitého nástroja symbolickej reprezentácie odvoditeľná. Gödelove vety tak zapadajú do série podobných výsledkov pre ostatné reprezentačné nástroje (pozri Kvasz 2008).

5. Záver

Z doterajšieho výkladu sa zdá, že Benacerrafova dilema je dôsledkom ignorovania schopnosti matematiky prelomiť medze každého vopred daného rámca. Keď matematické poznanie „trivializujeme“ tým, že ho uzavrieme do nemenného rámca logiky (nazerania, intuície alebo niečoho iného), strácame kontakt s dynamickým jadrom matematiky, ktoré postihol Cantor, keď povedal, že podstatou matematiky je sloboda. Túto slobodu cítime, keď čítame autorov ako Descartes, Newton, Riemann či Poincaré. *Descartes* nás vyslobodil z Euklidovho sveta, keď ukázal, že okrem niekoľkých málo kriviek, ktoré poznala antika, existuje nepreberné množstvo nových. *Newton* nás zbavil fa-

[13] V prípade algebry máme pre novú kvalitu, ktorá takto vzniká, názov – všeobecnosť. Hovoríme, že algebraická formula, na rozdiel od jednotlivých aritmetických termov, *spoluvyjadruje všeobecnosť*. Žiaľ, v prípade predikátového počtu či teórie rekurzie nemáme pomenovanie pre novú kvalitu jazyka, ktorú prinášajú.

lošného ideálu strnulosti; falošného platónskeho snúbenia dokonalosti s nemennosťou, ktoré antike zabránilo porozumieť pohybu, keď ukázal, že dynamický systém (objekt opísaný diferenciálnou rovnicou) je matematický objekt, a teda je dokonalý, a napriek tomu vyjadruje zmenu. *Riemann* nás vyslobodil zo zovretia trojrozmerného priestoru, keď ukázal, že naša myseľ dokáže preniknúť za hranice trojrozmernosti do priestorov vyšších dimenzií. *Poincaré* nás zbavil mylného stotožnenia vedeckého opisu s predikovateľnosťou, keď objavil chaos a ukázal, že predstava hodinového stroja je neadekvátna predstave prírodných procesov.

V tomto zozname by bolo možné pokračovať a menovať ďalšie zlomové udalosti vo vývine matematiky. To však nie je naším cieľom. Chceli sme iba poukázať na skutočnosť, že keď z výkladu matematiky vynecháme jej výbušnú silu, ktorou rozvracia všetky medze, do ktorých bolo ľudské myslenie v minulosti zovreté, matematiku „skrotíme" a ako takú krotkú a neškodnú disciplínu ju môžeme uzavrieť tam, kam podľa svojich filozofických sklonov práve potrebujeme – do rámca apriórnej skúsenosti, do sféry analytického poznania alebo kamkoľvek inam. Za „okyptenie" matematiky však platíme cenu. Tou cenou je dezintegrácia matematického poznania, oddelenie jej epistemologického a sémantického aspektu. Iba nespútaná matematika, matematika bez obmedzení kladených na jej jazyk a metódy, dokáže neustále nanovo prepájať oba póly Benacerrafovej dilemy a vytvárať tak krehkú *dynamickú rovnováhu* epistemologického a sémantického pólu matematiky. Každé takéto prepojenie je však iba prechodné. Matematika nevyhnutne dospieva k poznaniu, ktoré rovnováhu epistemológie a sémantiky rozbije – dospieva k objektom, pre ktoré chýba akékoľvek sémantické zakotvenie (ako napríklad Cardanom objavené *komplexné čísla* alebo *veľké kardinály* v súčasnej teórii množín), alebo k objektom, pri ktorých zlyhávajú všetky dovtedajšie postupy (ako boli „patologické" funkcie objavené v matematickej analýze). Po krátkom čase sa tak rovnováha epistemologického a ontologického pólu matematiky rozpadne a je potrebný nový jazykový rámec, aby bolo možné narušenú rovnováhu opäť obnoviť. Toto obnovenie rovnováhy však je iba dočasné.

Iba metódy nespútanej matematiky sú dostatočne silné na to, aby vždy nanovo dosiahli až k skutočnosti (napríklad keď Gauss vytvoril sémantiku pre komplexné čísla) a aby vždy nanovo vytvorili metódy na poznávanie toho nového a nečakaného, na čo matematika narazila (napríklad, keď Lebesgues, Hausdorff, Frechet a ďalší vytvorili metódy vhodné na skúmanie „patologických“ funkcií). Predloženú stať možno pokladať za náčrt cesty k riešeniu Benacerrafovej dilemy. Bude potrebné využiť všetky reprezentačné nástroje a predovšetkým ich *vzájomnú previazanosť*, aby bolo možné vystavať most, ktorý prepojí matematickú skutočnosť s poznávajúcim subjektom. Najdôležitejšie je však asi uvedomiť si, že to riešenie nebude statické, nebude mať povahu definitívnej odpovede, ktorá raz a navždy ukáže, ako je v matematike prepojený jej epistemologický a jej sémantický pól. Odpoveďou bude skôr opis dynamickej rovnováhy, ktorá je krehká a časom sa rozpadá, neustále sa však vždy znova a znova obnovuje. Každý jazykový rámec rieši problémy rámca predošlého a prináša problémy nové.

Centrum pre interdisciplinárne štúdiá
Filozofická fakulta KU
Hrabovská cesta 1
034 01 Ružomberok
ladislavkvasz@gmail.com

References

ARISTOTELES (1972): *Metafyzika*. Prekl. J. Špaňár. In: *Antológia z diel filozofov, Od Aristotela po Plotina*. Bratislava: Pravda, 243 – 291.

BENACERRAF, P. (1973): Mathematical truth. *Journal of Philosophy* 70, 661 – 679.

FREGE, G. (1884): *Základy aritmetiky*. Prekl. P. Balko, Bratislava: Veda, 2001.

HUSSERL, E. (1954): *Krize evropských věd a transcendentální fenomenologie*. Praha: Academie, 1972.

KLEIN, J. (1968): *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Cambridge Mass: M.I.T Press.

KVASZ, L. (2000): Galileovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenologie. *Filosofický časopis* 48, 373 – 399.

KVASZ, L. (2001): Descartovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenologie. *Filosofický časopis* 49, 213 – 240.

KVASZ, L. (2004a): Newtonovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. *Filosofický časopis* 52, 411 – 440.

KVASZ, L. (2004b): Epistemologické otázky fyziky: od antinómií čistého rozumu k expresívnym medziam jazyka. *Organon F* 11, č. 4, 362 – 381.

KVASZ, L. (2005): Epistemologické otázky modernej fyziky. *Organon F* 12, č. 1, 40 – 61.

KVASZ, L. (2007): Kantova filozofia exaktných disciplín a Fregeho argument z veľkých čísel. In: V. Havlík (ed.): *Meze formalizace, analytičnosti a prostoročasu*. Praha: Filosofia, 129 – 149.

KVASZ, L. (2008): *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Basel: Birkhäuser Verlag.

LAPLACE, P. S. (1820): *A Philosophical Essay on Probabilities*. New York: John Wiley and Sons, 1902.

MANDELBROT, B. (1977): *Die fraktale Geometrie der Natur*. Basel: Birkhäuser, 1991.

NEWTON, I. (1707): *Arithmetica universalis, sive de compositione et resolutione arithmetica liber*. Cambridge. Ruský preklad A. P. Juškeviča *Vseobščaja arifmetika*, Moskva: Izdateľstvo AN SSSR, 1948.

ODIFREDDI, P. (1989): *Classical Recursion Theory*. Amsterdam: Elsevier.

RAYO, A. (2005): *Logicism Reconsidered*. In: Shapiro (ed.) 2005, 203 – 235.

SHAPIRO, S. (1997): *Philosophy of Mathematics.* New York: Oxford University Press.

SHAPIRO, S. (ed.) (2005): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.

VIÈTE, F. (1591): *In Artem Analyticem Isagoge*. Anglický preklad: *Introduction to the Analytical Art*. In: Klein 1968, 313 – 353.

Poďakovanie

Chcel by som sa poďakovať Vladovi Balekovi, Tomášovi Čanovi, Petrovi Dvořákovi, Vojtěchovi Kolmanovi, Róbertovi Macovi a Palovi Zlatošovi za pripomienky k rukopisu state. Príspevok je súčasťou grantovej úlohy VEGA 1/0453/09 *Vedecká racionalita, jej historické predpoklady a filozofické medze*.