VÝVINOVÉ ŠTÁDIÁ V DEJINÁCH ALGEBRY

Roman HRIC

DEVELOPMENTAL STAGES IN THE HISTORY OF ALGEBRA

The paper deals with one of the possible approaches to the development of science proposed by J. Piaget and R. Garcia in [5]. The preliminary part of the paper gives a brief characterization of essential ideas of this theory. This is then illustrated in the next two parts concerned with problems of the beginning of algebra and the development of the theory of solvability of algebraic equations. In the final part a short discussion on some problems arising in this theory is given.

Nasledujúce strany sú venované jednému z možných pohľadov na vývin vedy, ktorý predkladajú autori monografie *Psychogenéza a dejiny vedy* ([5])[1] Jean Piaget a Rolando Garcia. Vzhľadom na rozsah témy som sa obmedzil na veľmi stručnú všeobecnú charakterizáciu tohto prístupu a jednu konkrétnu ilustráciu na príklade vývinu riešenia algebraických rovníc. V snahe o čo najlepšiu čitateľnosť textu som zredukoval množstvo matematickej symboliky na minimum a pokúsil som sa zdôrazniť len tie najpodstatnejšie momenty.

Významný švajčiarsky psychológ Jean Piaget (1896-1980)[2] objavil v psychogenéze dieťaťa niektoré fundamentálne mechanizmy, ktoré, ako sa neskôr ukázalo, sa uplatňujú aj vo vývine vedeckých teórií. Piaget zastáva dôsledne konštruktivistickú pozíciu; zhruba povedané, snaží sa nájsť mechanizmy, ktoré, vychádzajúc z nevyhnutného minima, zabezpečia postupnú konštrukciu poznania jedinca. Svoje závery dokladá množstvom psychologických experimentov uskutočnených s deťmi rôznych vekových kategórií.

V spomínanej práci J. Piaget spolu s R. Garciom predkladajú nový, veľmi všeobecný mechanizmus *intra*, *inter*, *trans*, ktorý bol objavený najskôr v psychogenéze a neskôr aj v dejinách vedy. V krátkosti spomeňme, o čo vlastne ide.

V dejinách vedy, obdobne ako v psychogenéze, môžeme vyčleniť isté vývinové štádiá, pričom sa ukazuje, že tieto štádiá nenasledujú po sebe náhodne, ľubovoľne, ale že sú usporiadané vo forme postupnosti, v ktorej sa konštrukcia každého štádia stáva možnou na základe predchádzajúceho a naopak, toto štádium umožňuje konštrukciu nasledujúceho. Cieľom autorov je objasniť mechanizmus prechodov medzi štádiami na základe analógie vývinu vedeckých teórií a psychogenézy.

ORGANON F **2** (1995), N. 2, 128-136

Hlavným prínosom práce je popis základnej štadiálnej triády *intra*, *inter*, *trans*. Ukazuje sa, že táto triáda je značne všeobecná a jej pochopenie už vlastne v sebe zahŕňa tiež pochopenie hľadaného prechodového mechanizmu tejto triády. Pokúsme sa stručne vo všeobecnosti charakterizovať jednotlivé štádiá.

*Intra*štádium je typické snahou o pochopenie nejakého súboru objektov (čo môžu byť súčasti domu, ale aj algebraické rovnice), prípadne činností prevádzaných s týmito objektami, pričom dané objekty alebo činnosti sa javia ako navzájom izolované a nesúvisiace. Pri analýze sa každý objekt skúma osobitne, bez súvislostí s ostatnými a pri narábaní s ním sa od objektu k objektu používajú osobitné metódy. Napríklad malé dieťa skúmajúce „dom" (dom je to pre nás) si všíma dvere, okno, komín atď., pričom v okamihu, keď zameria pozornosť na dvere, „zabúda", že existuje aj okno a komín.

V *inter*štádiu sa postupuje ďalej; zistí sa, že „izolované" objekty sú zviazané súvislosťami a začínajú sa skúmať vzťahy a prípadné transformácie medzi objektami. Dieťa si uvedomuje, že okno je vedľa dverí a komín je na streche.

Nakoniec v *trans*štádiu dochádza ku konštrukcii a pochopeniu celkovej štruktúry, ktorú vytvárajú objekty a ich vzťahy. Dieťa „pochopí" dom.

To, čo tu bolo stručne ale nie celkom presne načrtnuté, sa budem v dvoch nasledujúcich častiach snažiť ilustrovať na vývine algebry. Pretože nebolo mojou ambíciou korigovať historickú analýzu vývoja riešení algebraických rovníc, ktorú uvádzajú J. Piaget a R. Garcia (na báze diela J. Kleina), obmedzil som sa len na drobné faktografické doplnenia a spresnenia. V prvých dvoch častiach state občas bez explicitného upozornenia voľne citujem z kapitoly *Algebra* uvádzaného diela [5].

1. POČIATKY ALGEBRY

Začnime objasnením stanoviska J. Piageta a R. Garciu k tomu, kedy vlastne v dejinách matematiky môžeme hovoriť o začiatkoch algebry. Autori prijímajú názor, ktorý sformuloval Jacob Klein vo svojej práci [2]. Napriek tomu, že ide o, podľa mojej mienky, v súčasnosti všeobecne uznávaný názor, pokúsme sa ho priblížiť aj so stručným uvedením hlavnej myšlienky, ktorá ho podporuje.

U niektorých historikov matematiky môžeme vidieť snahu nájsť počiatok algebry už u Asýrčanov, Babylončanov, Egypťanov prípadne o niečo neskôr v Alexandrijskej škole. Najmä jej vrcholný predstaviteľ Diofantos (okolo roku

250 n. l.) býva často považovaný za prvého matematika, ktorý sformuloval aritmetické problémy v symbolických termínoch a zaviedol „neurčité hodnoty" predstavované písmenami a nie číslami.

Pri tomto je potrebné sa na chvíľu pozastaviť. Je skutočne pravda, že Diofantos používa rôzne znaky a skratky na označenie neznámych v rovniciach. Ak však prijmeme stanovisko, podľa ktorého o algebre môžeme hovoriť až od chvíle, keď symboly nadobúdajú svoje vlastné bytie ako „abstraktné entity", toto ešte nestačí na to, aby sme hovorili o algebraickom symbolizme. V tejto súvislosti hovorí Jacob Klein: „Písmeno môže nahradiť ľubovoľné číslo, ale len tam, kde je predpokladaný výskyt čísla; nesymbolizuje jeho hodnotu a nie je použité ako také v operáciách." Ďalej Klein uvádza: „Takéto písmeno nikdy nie je *symbol* v zmysle, že to, čo je označované symbolom, je samo osebe *všeobecný objekt*."

Pokrok v symbolike sa dosiahol až o mnoho storočí neskôr a je spojený s menom Francois Viète (1540-1603). Začal používať písmená namiesto čísel, účelovo a systematicky, nielen na označenie neznámej, ale ako všeobecné koeficienty – písmeno preňho predstavuje „všeobecné číslo". Tento pohľad mu umožnil zaviesť nové objasňujúce rozlíšenie medzi metódou narábania s číslami (*logistica numerosa*) a metódou narábania s druhmi alebo formami vecí (*logistica speciosa*). Tým vlastne nakreslil deliacu čiaru medzi aritmetikou a algebrou v našom súčasnom ponímaní.

Autori, sledujúc postup Jacoba Kleina, analyzujú tento problém omnoho detailnejšie, pre naše účely však bude uvedený náčrt zrejme postačujúci.

2. VÝVIN ALGEBRY

Pri pokuse o analýzu vývinu algebry sa hneď vynára problém, ktorý súvisí s rozsiahlosťou danej témy. Algebra je v súčasnosti širokou matematickou disciplínou, ktorá je natoľko prepletená a zviazaná s ďalšími matematickými disciplínami, najmä s geometriou, topológiou a matematickou analýzou, že nie je možné precízne analyzovať jej vývin bez toho, aby sme zahrnuli aj jej interakcie s ostatnými časťami matematiky. Keď uvážime túto skutočnosť, je zrejmé, že v rozsahu niekoľkých strán pravdepodobne nie je možné dôsledne spracovať danú tému, a teda náš záujem budeme nútení ohraničiť do skromnejšieho priestoru, ako by sa dalo očakávať podľa názvu.

Budeme sa zaoberať len jednou vývinovou líniou algebry, a to teóriou riešenia algebraických rovníc (riešenie algebraických rovníc by sme v dnešnej terminológii mohli vyjadriť ako hľadanie koreňov polynómu $p(x)$ v neurčitej x). Pre túto voľbu hovoria minimálne dva argumenty:

1. Historický. Počnúc Viètom až do polovice 19. storočia algebra pozostávala len z pokusov o riešenie algebraických rovníc a táto snaha, ako ďalej uvidíme, vlastne viedla k vzniku algebraických štruktúr a k postupnému profilovaniu sa algebry ako vedy o štruktúrach, teda takej algebry, ako ju poznáme dnes. Preto, ak sme nútení obmedziť sa na jednu vývinovú líniu, myslím si, že by to mala byť práve teória riešenia algebraických rovníc, pretože je pre ďalší vývin algebry vo veľkej miere podstatná, takpovediac ho v sebe nesie implicitne „zakódovaný".

2. Praktický. Táto línia je dostatočne samostatná – mohli by sme povedať, že sa vyvíjala sama v sebe – na to, aby sme mohli zanedbať interakcie s inými matematickými disciplínami, čím sa zbavíme už spomínaného problému.

Teraz prejdime k charakterizácii jednotlivých štádií vo vývine teórie riešenia algebraických rovníc.

2.1. Intraoperacionálne štádium

Už pred Viètom vedeli Hindovia riešiť rovnice druhého stupňa. Metódy na riešenie rovníc tretieho a štvrtého stupňa našli v 16. storočí Tartaglia (vlastným menom Niccolo Fontana, 1499-1557), Geronimo Cardano (1501-1576) a jeho žiak Lodovico Ferrari (1522-1565). Až do polovice 18. storočia potom už v algebre vlastne žiadny pokrok nenastal.

Z hľadiska toho, čo zaujíma nás, je podstatný fakt, že v období od Vièta až do polovice 18. storočia matematici zaobchádzali s každou skúmanou rovnicou ako s oddeleným, izolovaným objektom, na ktorý aplikovali značne individuálne metódy. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že sa vlastne jednalo o metódu pokusov a omylov.

2.2 Interoperacionálne štádium

Až v druhej polovici 18. storočia sa začínajú hľadať všeobecnejšie metódy riešenia rovníc. Po prvýkrát bol formulovaný všeobecný problém existencie riešenia, a to viedlo ku skúmaniu transformácií rovníc, najmä so zreteľom na redukciu danej formy rovnice na formu riešiteľnú.

Pri prechode od intraoperacionálneho štádia k interoperacionálnemu je kľúčovou postavou Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Lagrange si, namiesto toho, aby uskutočňoval „empirické" pokusy s rôznymi rovnicami, položil nasledujúcu otázku: Aká (Čo) je *povaha metód* riešenia rovníc tretieho a štvrtého stupňa a čo je dôvod ich úspechu ? Objavil, že tieto úspešné metódy spočívajú v zavedení istých funkcií redukujúcich pôvodné rovnice, a to ho viedlo k hľadaniu vzťahov medzi riešením pôvodných a riešením redukovaných rovníc.

Ďalším, pre nás zaujímavým momentom, je to, že v ďalšom postupe Lagrange použil pojem permutácie, konkrétne permutácie premenných v istých polynómoch viacerých premenných, ktoré vznikli pri transformácii rovníc. Ako neskôr uvidíme, pojem permutácie povedie k teórii grúp.

Na Lagrangeove myšlienky nadviazal Paolo Ruffini (1765-1822), ktorý sa na ich základe pokúsil dokázať nemožnosť všeobecného riešenia rovnice piateho stupňa v radikáloch (zjednodušene povedané, Ruffini sa snažil dokázať, že pre rovnice piateho stupňa neexistuje vzorec používajúci len operácie +,-,.,: a odmocniny). Dôkaz sa mu síce nepodarilo dokončiť, napriek tomu je jeho dielo veľmi cenné pojmovým rámcom, ktorý vytvoril a ktorý je už veľmi blízky Galoisovmu.

Ruffini definoval permutácie premenných v danej funkcii a klasifikoval ich podľa druhov. Tieto jeho myšlienky môžeme v súčasnosti formulovať v reči teórie grúp, avšak Ruffini sa ešte k štruktúre grupy permutácií nedostal, presnejšie, pochopil, že prechod z jednej permutácie na inú predstavuje istú transformáciu, nepochopil však štruktúru, v ktorej sú tieto transformácie zasadené.

O niečo ďalej sa dostal Augustin Louise Cauchy (1789-1857), ktorý na základe permutácií poriadku písmen definoval substitúciu ako prechod od jednej permutácie k inej, zaviedol ich násobenie, identickú substitúciu a tiež substitúciu inverznú k danej substitúcii. Pokiaľ ide o substitúcie, dokázal dokonca niekoľko výsledkov, avšak štruktúru grupy netematizoval.

Najvýznamnejšou postavou konca interoperacionálneho štádia je nesporne Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Z jeho diela je pre naše účely podstatná najmä analýza kvadratických foriem, ku ktorej ho priviedla snaha o riešenie istých typov rovníc. Gauss sa zaoberá formami tvaru

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

ktoré abstraktne reprezentuje trojicou (a,b,c). Ukazuje, že vlastnosti formy podstatne závisia od čísla

$$b^2 - ac,$$

ktoré nazýva *determinantom formy*. Zavádza transformáciu formy s neznámymi x,y na inú formu s neznámymi x',y' pomocou substitúcií

$$x = kx' + ly',$$
$$y = mx' + ny',$$

kde k,l,m,n sú celé čísla a ukazuje, že

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(kn - lm)^2$$

V prípade, že sa daná forma dá transformovať na inú formu, pričom $(kn - lm)^2 = 1$, hovorí o *ekvivalencii foriem*, pomocou ktorej zavádza rozklad množiny foriem s danou hodnotou determinantu na *triedy foriem*. Z každej takejto triedy môžeme vybrať jednu formu, ktorá ju bude reprezentovať, pričom tohto reprezentanta sa snažíme zvoliť čo najvýhodnejšie (aby sa s ním pohodlne pracovalo), na čo Gauss poskytuje kritériá. Ďalej Gauss zavádza isté špeciálne relácie medzi triedami foriem a definuje *rády* a *druhy*, aby mohol prejsť k tomu, čo nás predovšetkým zaujíma, a to síce k definícii kompozície foriem, prvej operácie pracujúcej s nečíselnými objektami.

Pod *kompozíciou formy* f v premenných x, y a *formy* f' v premenných x', y' rozumie ďalšiu *formu* f'' v premenných x'', y'' takú, že premenné x'', y'' dostaneme pomocou vhodných (pre nás nie je podstatné akých presne) substitúcií z premenných x, y, x', y'. Prichádza k nasledujúcim záverom:

„Ak forma f je toho istého rádu, druhu a triedy ako g a forma f' je toho istého rádu, druhu a triedy ako g', potom forma zložená z f a f' je tej istej triedy ako forma zložená z g a g'."

„Z toho môžeme ľahko vidieť, čo rozumieme pod triedou zloženou z dvoch, alebo niekoľkých tried."

Z dnešného pohľadu môžeme povedať, že Gauss sa (použitím faktorizácie) dostal k implicitnému pojmu grupy, konkrétne predstavovanej množinou tried foriem a operáciou skladania foriem, ale napriek tomuto štruktúru grupy netematizoval.

2.3. Transoperacionálne štádium

Mladý nórsky matematik Niels Henrik Abel (1802-1829) sa zaoberal riešiteľnosťou rovníc piateho stupňa v radikáloch. Pôvodne veril, že odpoveď na túto otázku je kladná, ale postupne nadobudol opačné presvedčenie a snažil sa ho dokázať. V roku 1826 sa mu to aj podarilo. Nezostal však iba pri tom, a položil si tiež otázku, ako charakterizovať tie rovnice piateho stupňa, ktoré riešiteľné v radikáloch sú. Získal čiastočné výsledky, ale zaviesť pojem grupy a sformulovať svoje úvahy v takomto kontexte mu zabránila predčasná smrť.

Tento krok urobil Evariste Galois (1811-1833). Dal návod, ako skonštruovať takzvanú grupu rovnice, pomocou ktorej sa dá rozhodnúť, či je daná rovnica riešiteľná v radikáloch. Týmto vlastne definoval grupu permutácií. V jeho práci sú implicitne obsiahnuté pojmy niektorých ďalších základných štruktúr algebry.

Skúmanie algebraických rovníc bolo zavŕšené v druhej polovici 19. storočia. V tomto období nastáva v algebre veľký historický skok. Vo vývine teórie rovníc bol významnou postavou Gauss. Jeho kompozícia foriem je prvá operácia, v ktorej nie sú čísla priamo obsiahnuté, avšak bolo zjavné, že každá forma je vzťah, v ktorom koeficienty a premenné predstavujú čísla.

Ďalším krokom vo vývine teórie algebraických rovníc bolo odhalenie skutočnosti, že do vzťahov, foriem a pod. nemusia vstupovať čísla, ale môžu to byť akékoľvek objekty, ktoré sú obsiahnuté v nejakej štruktúre podobnej číselnej štruktúre. Táto myšlienka viedla k pojmu *poľa* (nazývaného aj *komutatívne teleso*), štruktúry s dvomi operáciami – sčítaním a násobením, ktoré majú podstatné vlastnosti štandardného sčítania a násobenia reálnych čísel. V tomto procese zohral významnú úlohu Richard Dedekind (1831-1916). Nielenže tematizoval pojem poľa, ale čo je dôležitejšie, upozornil na to, že pre nás nie sú podstatné objekty, ale štruktúry v ktorých sú tieto obsiahnuté.

3. NIEKTORÉ PROBLÉMY KONCEPCIE PIAGETA A GARCIU

Na záver by som sa rád pristavil pri dvoch „sporných miestach“ uvádzanej koncepcie, a to pri probléme relativity intra, inter, trans a probléme počtu štádií.

Je nesporné, že pri určovaní jednotlivých štádií tejto postupnosti môžeme uplatňovať pomerne veľkú ľubovôľu. Autorom však pravdepodobne nešlo o jednoznačné určenie akýchsi štádií, ale o popísanie konštruktívneho mechanizmu, ktorý funguje jednak v psychogenéze a jednak vo vývine vedy. Navyše sa zdá, že keď určíme prvotné objekty nášho záujmu (napr. algebraické rovnice) a ujasníme si, čo s nimi chceme robiť (v prípade algebraických rovníc ich chceme riešiť), vieme pomerne jednoznačne rozlíšiť fázy *intra, inter, trans.*

Podobným spôsobom sa tiež dá odpovedať na otázku, či námietku, prečo je počet štádií práve tri, a nie, povedzme, dve alebo päť. Dokonca sa nedá nič namietať proti tvrdeniu, že počet štádií je ľubovoľný a závisí len na tom, ako sa na situáciu pozeráme, aký raster zvolíme. Avšak počet štádií tri vyplýva prirodzene z toho, že autorom ide predovšetkým – nezostáva nám nič iné, len to znovu zdôrazniť – o uchopenie mechanizmu vývinu. To je dobre viditeľné predovšetkým z psychologického bodu pohľadu.

Pokúsme sa pozrieť na štádiá a rozdiely medzi nimi v takomto psychologicky zafarbenom svetle. *Intra*štádium sa javí ako prvé poznanie situácie, bez toho, aby sa vôbec vyslovila otázka, či medzi objektmi záujmu nie sú prípadné vzťahy; tieto vzťahy (dokonca možnosť ich existencie) sú zatiaľ neviditeľné. *Inter*štádium je formulovanie čiastkových pochopených vzťahov medzi objektmi a postupné dopĺňanie „mozaiky“, predovšetkým ale pochopenie a pripustenie možnosti existencie vzájomných vzťahov medzi objektmi; vzťahy sa zviditeľňujú. Nakoniec *trans*štádium je pochopenie celkovej štruktúry skompletizovanej „mozaiky“ objektov, operácií (činností) s nimi prevádzanými a ich vzájomných vzťahov.

Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Mateja Bela
Tajovského 40
975 49 Banská Bystrica
e-mail: hric@fmph.uniba.sk

POZNÁMKY

[1] Používam rukopis slovenského prekladu J. Rybára.

[2] J. Piaget je známy predovšetkým ako psychológ, aj keď by bolo sotva možné obmedziť jeho vplyv len na oblasť psychológie; bližšie o jeho koncepcii pozri Rybár [6]. Nás budú predovšetkým zaujímať jeho epistemologické skúmania.

LITERATÚRA

[1] BOURBAKI, N. (1960): **Eléments d'histoire des mathématiques**, Hermann, Paris; ruský preklad **Očerki po istorii matematiki**, Izdateľstvo inostrannoj literatury, Moskva, 1963.

[2] KLEIN, J. (1934): **Die griechische Logistik und die Enstehung der Algebra**; anglický preklad **Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra**, Massachusetts Institute of Technology Press, 1968.

[3] KLINE, M. (1972): **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, Oxford University Press.

[4] NOVÝ, L.(1973): **Origins of Modern Algebra**, Academia, Praha.

[5] PIAGET, J. - GARCIA, R. (1983): **Psychogenèse et histoire des sciences**, Paris; anglický preklad **Psychogenesis and History of Science**, Columbia University Press, New York, 1989; slovenský preklad **Psychogenéza a dejiny vedy**, rukopis.

[6] RYBÁR, J. (1993): **Epistemológia ako exaktná disciplína?** In: **Kapitoly z epistemológie I**, ed. Rybár, J., Univerzita Komenského Bratislava, 6-23.

[7] STRUIK, D. J. (1956): **A Concise History of Mathematics**, G. Bell and Sons, London; český preklad **Dějiny matematiky**, Orbis, Praha, 1963.