Organon F 21 (1) 2014: 45-62

Je číslo vlastnost vnějších věcí?[1]
Mill – Frege – Kessler

PROKOP SOUSEDÍK

Katolická teologická fakulta. Univerzita Karlova v Praze. Thákurova 3
160 00 Praha 6. Česká republika
prokop.sousedik@seznam.cz

DAVID SVOBODA

Katolická teologická fakulta. Univerzita Karlova v Praze. Thákurova 3
160 00 Praha 6. Česká republika
davidsvoboda@sovice.net

ZASLÁN: 23-03-2013 ▪ PŘIJAT: 01-05-2013

ABSTRACT: In this paper we deal with the problem, whether number is a property of external things. It is divided into three parts. Firstly Mill's empiristic concept of natural numbers is summarized, then Frege's arguments against this conception are put forth and finally viewpoints of some contemporary analytical philosophers (first of all G. Kessler), who reject Frege's critique, are set out. Kessler and his followers in fact revive the abandoned theory of Mill.

KEYWORDS: Frege – Kessler – Mill – number – property – relation.

Podle představitelů pozitivizmu je veškeré naše poznání založeno empirickou zkušeností. S tím souvisí, že soudy, jimiž naše poznatky formulujeme, nemohou být *a priori*, ale jsou výhradně *a posteriori*. Tento postoj patrně nevyvolává pochybnosti mezi přírodními vědci, jejichž teorie či hypotézy mají vždy právě aposteriorní povahu. Může naproti tomu rozpaky vyvolat

1 Práce na tomto článku byla podpořena grantem GAČR č. 13-0852S.

mezi matematiky. Ti se totiž běžně domnívají, že si při objevování nových pravd počínají zcela jinak než přírodovědci a že jejich disciplína spočívá na naprosto odlišných základech. Vždyť matematik nekoná empirická pozorování a soudy, jež formuluje, jsou na zkušenosti nezávislé, tj. *a priori*. Lze však dát tomuto závěru zapravdu? Jsme-li důslední pozitivisté, pak jistě nikoli. Existovala by totiž významná skupina poznatků (matematických), které nejsou založeny na naší zkušenosti, ale na něčem jiném.

Mezi pozitivisty, kteří věnovali matematice zvýšenou pozornost, patří J. S. Mill. Ten vysvětluje svůj zájem o tuto královskou disciplínu mimo jiné i tím, že by nás mohla svojí výjimečností svést k iluzi, že existuje jiná než empirická realita.[2] Uznali-li bychom však existenci jakési mimo empirické reality, zpochybnili bychom nejenom jeden ze základních pilířů pozitivizmu, ale vydali bychom se opět na bludné cesty metafyziky. Iluze matematiků je proto třeba jednou provždy rozptýlit a jasně prokázat, že jejich disciplína spočívá na běžné zkušenosti podobně jako ostatní vědy. Největší pozornost je pak třeba věnovat aritmetice neboli vědě o čísle, neboť ta představuje nejtvrdší oříšek. (srov. Mill 1973, III, 24, 9)

Millův přístup k aritmetice se nevymyká běžné filosofické praxi: vychází se z předem vytvořené myšlenkové koncepce a ta se dále aplikuje i v oblastech, které jsou z jejího hlediska problematické. Mill se tedy konkrétně snaží prokázat, že s pozitivizmem spojený empirismus lze prosadit nejenom v přírodní vědě, ale i v aritmetice. Tento postup však v sobě skrývá nebezpečná úskalí. Jsme-li totiž příliš pevně svázáni s určitým myšlenkovým schématem, pak často nevidíme či dokonce odmítáme vidět, že se uvažovaná realita vzpouzí našim ideovým východiskům. Díky tomu mnohdy můžeme dospět k závěrům, které neodpovídají skutečnosti.

Uvedeným nástrahám nemusel čelit Millův pozdější odpůrce G. Frege. Ten totiž zprvu nebyl stoupencem žádného filosofického směru, a tak ani neusiloval, aby předložil filosofickou koncepci aritmetiky, která by byla ve shodě s obecnějšími východisky jeho vlastního pojetí. K otázce *Co je číslo?* ho nepřivedla filosofická úvaha, ale spíše jej trápilo, že je pro matematiku zahanbující, „když tápe v nejasnostech ve věci svého nejbližšího a zdánlivě

---

2 Mill doslova říká „... tento ráz nutnosti připisovaný matematickým pravdám a zvláštní jistota, která je s nimi ... spojena, je pouhou iluzí, kvůli níž ti, kdo jí podlehli, musí učinit předpoklad, že tyto pravdy vyjadřují vlastnosti ryze imaginárních předmětů“ (Mill 1973, II, 5, 7).

tak jednoduchého předmětu. Jestliže totiž pojem, který tvoří základy velké vědy, s sebou přináší těžkosti, pak je přeci neodmyslitelnou úlohou jej prozkoumat důkladněji a tyto těžkosti překonat" (Frege 2011, 146). Tato slova by nás mohla svést k závěru, že se Frege sice podobně jako Mill zabýval založením aritmetiky, nicméně na rozdíl od něj k tomuto problému přistoupil jako matematik a ne jako filosof. Jeho myšlenkový postup by proto měl být s Millovým nesouměřitelný a měli by jej hodnotit především matematikové. Ve skutečnosti je tomu naopak. Spolu s Kennym můžeme osud G. Frega přirovnat k osudu Krištofa Kolumba: *Tak jako Kolumbus neobjevil novou cestu do západní Indie, ale nevědomky Evropany seznámil s novým kontinentem, tak se také Fregovi nepodařilo odvodit aritmetiku z logiky, nicméně v logice a ve filosofii učinil takové objevy, které natrvalo změnily celou mapu obou disciplín* (srov. Kenny 1995, 207). Fregova práce tak nakonec nevedla k založení aritmetiky, ale vyústila ve vznik nového myšlenkového proudu – analytické filosofie.

To, že Frege na rozdíl od Milla nevyšel z předem připravené filosofické koncepce, ale ze samotné matematické praxe, jej přirozeně vedlo k rehabilitaci apriorního poznání. Tím se však dostal do zřejmého sporu s vlivným pozitivizmem. Uvědomil si, že se diskuse s představiteli tohoto proudu musí týkat primárně problematiky založení aritmetiky. Pravděpodobně z těchto důvodů podrobil Millovo empirické pojetí aritmetiky ostré kritice.

Fregova kritika měla na analytické filosofy (především na logické pozitivisty) zásadní vliv. Ti ji považovali nejenom za přesvědčivou, ale i za definitivní. K tomuto možná poněkud ukvapenému závěru je vedla nejenom hloubka předložených argumentů, ale pravděpodobně i to, že zároveň ospravedlňovaly jejich vlastní pojetí. Ve Fregově diskusi s Millem tak raní analytičtí filosofové nalezli potvrzení koncepce, podle níž neexistuje pouze aposteriorní poznání, ale stejně důležitou roli hraje i poznání apriorní, jež formulujeme výhradně v analytických výrocích.

Koncepci, podle níž je třeba rozlišovat dva druhy poznání (výroků), však někteří současní analytičtí filosofové zpochybňují.[3] Díky tomu se tak postupně vytvořilo prostředí, v němž již nebylo politicky nebezpečné se kriticky vrátit k Fregovým argumentům. Zdálo se totiž, že případná rehabilitace empirického založení aritmetiky nemusí nutně vést k odmítnutí hlavních

[3] Striktní rozlišení mezi apriorním a aposteriorním poznáním kritizoval především Quine; srov. především Quine (1995).

předpokladů analytické filosofie. Není proto divu, že se v poslední době setkáváme s pokusy Millovo pojetí obnovit a ve světle Fregovy kritiky hlouběji promyslet. Rozhodující roli v tomto ohledu sehrály úvahy amerického filosofa G. Kesslera, na něhož později navázali někteří představitelé analytické metafyziky.

V tomto příspěvku chceme stručně shrnout Millův empiristický názor na původ přirozených čísel, dále uvést argumenty, jimiž se Frege pokusil toto pojetí zpochybnit a konečně upozornit na stanoviska některých současných analytických badatelů (především G. Kesslera), kteří Fregovu kritiku odmítají, a tím se v podstatě znovu vrací k donedávna opuštěné koncepci Milla. V souvislosti s tím dělíme příspěvek do tří částí. V první krátce shrneme Millovo pojetí čísla; ve druhé části vyložíme Fregovu kritiku Milla; ve třetí ukážeme, jak Kessler reaguje na Fregovu kritiku a zároveň krátce poukážeme na další pokusy o rehabilitaci Millova pojetí.

1. Millovo pojetí čísla[4]

Chceme-li Millově koncepci čísla dobře porozumět, musíme zmínit, že jeho úvahy nejsou primárně ontologické, ale opírají se významným způsobem o sémantiku našeho jazyka. V tomto ohledu se Mill neinspiroval soudobou na subjekt zaměřenou filosofickou tradicí, ale podněty zřejmě čerpal ze starší jazykově orientované scholastické logiky.[5] Základním východiskem

---

[4] Podrobně se Millovým pojetím čísla zabýváme v Sousedík – Svoboda (2013).

[5] Mill ve své autobiografii (1973, 1-2) otevřeně přiznává, že *scholastická* logika sehrála v průběhu jeho vzdělání klíčovou roli. Říká: „My own consciousness and experience ultimately led me to appreciate quite as highly as he did, the value of an early practical familiarity with the school logic. I know nothing, in my education, to which I think myself more indebted for whatever capacity of thinking I have attained. The first intellectual operation in which I arrived at any proficiency, was dissecting a bad argument, and finding in what part the fallacy lay: and though whatever capacity of this sort I attained was due to the fact that it was an intellectual exercise in which I was most perseveringly drilled by my father, yet it is also true that the school logic, and the mental habits acquired in studying it, were among the principal instruments of this drilling. I am persuaded that nothing, in modern education, tends so much, when properly used, to form exact thinkers, who attach a precise meaning to words and propositions, and are not imposed on by vague, loose, or ambiguous terms. The boasted influence of mathematical studies is nothing to it; for in mathematical processes, none of the real difficul-

je pro něho analýza jednoduché propozice, která má tři části: subjekt, kopulu a predikát. Na místě subjektu i na místě predikátu pak může stát jedině tzv. *kategorematický* termín, který označuje některou z kategorií. Kategorematické termíny se dále dělí na dva druhy, obecné a singulární. Z našeho hlediska je důležité Millovo pojetí obecného termínu. To chápe jako jméno, které denotuje (označuje) každou věc, o níž ho lze pravdivě vypovídat. Každé obecné jméno však současně i konotuje určitý atribut, který mají všechny jím denotované věci společný. Takže např. termín *ctnostný* je podle Milla (1973 I, 2, 5) „jméno, které se aplikuje na ctnostná individua díky tomu, že tato individua jsou nositeli příslušného atributu ... Aplikuje se na všechny entity, pro něž platí, že mají tento atribut a na žádná, která tento atribut nemají.“

Ve světle právě podaného výkladu se nyní podívejme na Millovu sémantickou koncepci matematických propozic. Zamysleme se nejprve nad povahou termínů, z nichž jsou tyto propozice utvořeny, tj. nad číslovkami. Ty se ze sémantického hlediska chovají obdobně jako obecné termíny – i ony musí mít denotaci a konotaci. Číslovky se nicméně od běžných obecných termínů liší tím, že nedenotují individua v běžném slova smyslu, ale soubory individuí, jimž Mill říká agregáty. Sémantiku číselných výrazů popisuje Mill takto:

> Každá z číslovek dva, tři, čtyři atd. denotuje fyzický jev a konotuje fyzickou vlastnost těchto jevů. Dvojka např. denotuje všechny dvojice věcí, dvanáctka všechny tucty věcí, konotují pak to, co je činí dvojicemi nebo tucty ... Co je tedy to, co konotuje jméno čísla? Samozřejmě je to nějaká vlastnost, která náleží agregátu věcí, který nazýváme tímto jménem; a tato vlastnost je totožná s charakteristickým způsobem, jímž je agregát složen z částí a může být na ně opět rozložen. (Mill 1973, III, 24, 5)

---

ties of correct ratiocination occur. It is also a study peculiarly adapted to an early stage in the education of philosophical students, since it does not presuppose the slow process of acquiring, by experience and reflection, valuable thoughts of their own. They may become capable of disentangling the intricacies of confused and self-contradictory thought, before their own thinking faculties are much advanced; a power which, for want of some such discipline, many otherwise able men altogether lack; and when they have to answer opponent, only endeavour, by such argument as they can command, to support the opposite conclusion, scarcely even attempting to confute the reasonings of their antagonists; and, therefore, at the utmost, leaving the question, as far as it depends on argument, a balanced one.“

Každá číslovka N tedy jednak denotuje všechny N-tice neboli N-početné agregáty, jednak konotuje vlastnost, kterou mají tyto agregáty společnou. Touto sdílenou vlastností je pak podle Milla charakteristický způsob složení agregátu, tj. způsob, jímž je agregát složen z částí a může být na ně opět rozložen. Např. dvojici lze složit ze Sokrata a Platona a tuto dvojici lze opět na ně rozložit. Naše zkušenost se skládáním a rozkládáním bude samozřejmě daleko komplikovanější v případě skupiny, která má – dejme tomu – dvanáct prvků. V tomto případě totiž můžeme složit či rozložit dvanácti člennou skupinu větším počtem vzájemně odlišných způsobů (dvě šestice, čtyři trojice, atd.). Konotovaná vlastnost, kterou mají agregáty věcí společnou, je tedy odvozena z naší zkušenosti se skládáním a rozkládáním agregátů empirických individuí.

Jelikož se číslovka chová jako obecný termín, není číslo v ontologickém ohledu samostatně existující předmět, ale určitá vlastnost věcí vnějšího světa. Historicky vzato však Mill nebyl prvním filosofem, který při řešení problému čísla zvolil takovouto taktiku. Podobně jako on postupoval ve svých úvahách Aristoteles a v závislosti na něm i scholastická tradice. I podle aristotelsky orientovaných scholastiků totiž číslo není samostatně existující předmět (*ens in se*), ale vlastnost či akcident agregátu (*ens in alio*). Po vzoru M. Dummetta (1995, 99) budeme takovouto taktiku řešení problému čísla nazývat *adjektivní strategií*.

2. Fregovy argumenty proti Millovi

Frege kritizuje Millovo pojetí čísla ve svém díle *Základy aritmetiky* (Frege 2011). Argumenty zde uvedené jsou v podstatě čtyři. Těmto argumentům budeme pracovně říkat: (i) relativistický argument (toto označení zavedl Kessler 1980, 66); (ii) epistemologický argument – problém nuly a velkých čísel; (iii) argument obecné aplikability; (iv) gramatický argument.

(i) Z hlediska dalších diskusí hraje nejvýznamnější roli relativistický argument. Má logickou formu *reductio ad absurdum*. Připusťme tedy, že Mill má pravdu a že číslo je vlastností vnějších věcí. Tuto skutečnost vyjadřujeme v běžných singulárních výrocích, např. *Karet v mé ruce je 32*. Subjekt tohoto výroku je singulární termín *karty v mé ruce* a predikát je obecný termín *32*. Výrokům tohoto druhu budeme spolu s Fregem říkat *číselné údaje*. Číselné údaje se podle Milla nemohou podstatně lišit od běžných empirických výroků, např. *tento kámen váží 2kg*. Avšak právě toto se zdá Fregemu problematické:

> Jestliže dám někomu do ruky kámen se slovy: řekni, kolik to váží, pak jsem mu tím zadal celý předmět jeho zkoumání. Jestliže mu dám do ruky hromádku hracích karet se slovy: urči počet tohoto zde, pak dotyčný neví, jestli chci znát počet karet, anebo kompletních balíčků karet, anebo trumfů při skatu. (Frege 2011, 179-180)

Frege zde poukazuje na to, že v daném kontextu lze kameni přisoudit jednoznačně právě jednu určitou vlastnost, zatímco v případě hromádky karet toto neplatí. Té totiž můžeme připsat různá čísla; jedna a tatáž věc však zřejmě nemůže být ve stejném smyslu nositelem kontrárních predikátů (v našem případě různých čísel). Předpoklad, podle nějž v číselném údaji charakterizujeme vnější věc (agregát), má tedy absurdní či rozporuplné důsledky, a proto je ho třeba odmítnout.

(ii) Běžné empirické agregáty mají podle Milla vlastnost dva, tři, atd. Exemplifikují tedy jim příslušná čísla a z epistemologického hlediska nepředstavují žádnou obtíž. Vidíme např. dva oblázky, tři oblázky … Vážný problém však v této souvislosti představuje číslo 0, „neboť dosud stěží někdo pozoroval či hmatal 0 oblázků“ (Frege 2011, 163). Zdá se tedy, že sice existují agregáty, které mají vlastnosti běžných čísel, avšak neexistuje agregát, který by měl vlastnost nula. To je však pro matematiku jen těžko přijatelné. „Má-li mít totiž … počítání nějaký vážný význam, pak nemůže být ani znak 0 sám zcela beze smyslu“ (Frege 2011 163). Obdobný problém však pro Milla představují i astronomicky velká čísla. Tak jako nikdo nikdy zřejmě neviděl agregát, jemuž bychom byli ochotni přiřknout vlastnost 0, nikdo nikdy zřejmě neviděl agregát, jemuž bychom byli ochotni přiřknout vlastnost 1000^{1000}. Tyto skutečnosti tedy představují pro Milla vážný epistemologický problém.

(iii) Vypovídáme-li o nějakém agregátu individuí určité číslo, přisuzujeme mu přirozeně obsah příslušného číselného pojmu. Ten však může být podle pozitivistů získán výhradně na základě pozorování empirických agregátů. Zdá se ale, že vedle empirických agregátů je třeba připustit i existenci agregátů neempirických. Běžně totiž uvažujeme o určité množině prvočísel, o souboru Aristotelových kategorií, o našich představách atd. I s těmito neempirickými agregáty však spojujeme číselné predikáty. Podle Fregeho (2011, 31) by ale „bylo skutečně podivuhodné, kdybychom vlastnost, jíž jsme vyabstrahovali z vnějších věcí, mohli beze změny smyslu přenést na události, představy, pojmy. Výsledek by byl stejný, jako kdybychom chtěli hovořit o tavitelné události, modré představě, slaném pojmu či o tuhém soudu." Frege tedy jasně upozorňuje na to, že aritmetika má mnohem větší aplikabilitu, než se zdá připouštět Millovo pojetí.

(iv) Frege odmítá Millovu adjektivní strategii a zastává opačnou tzv. *strategii substantivní.* Podle jeho názoru neoznačují číslovky vlastnosti vnějšího světa, ale podobně jako běžné singulární termíny označují jim příslušný předmět. O tom prý v prvé řadě svědčí fakt, že v němčině (ale i v jiných evropských jazycích) spojujeme s číslovkami určitý člen. „Říkáme ‚číslo jedna' [‚die Zahl Eins'], a určitým členem zde ukazujeme na určitý, jedinečný předmět vědeckého zkoumání" (Frege 2011, 199). To, že s číslovkou skutečně spojujeme jedinečný předmět, dokazuje i to, že číslovky nemají na rozdíl od běžných obecných termínů množné číslo. Podle Frega (2011, 199) tedy „neexistují různá čísla jedna, nýbrž jen jedno. V 1 máme vlastní jméno, od nějž nemůžeme utvořit množné číslo, tak jako to nemůžeme utvořit od ‚Friedricha Velikého' ...".

Tyto úvahy vedou k závěru, že číselné výrazy jsou singulární a nikoli obecné termíny. Čísla tedy nemohou být vlastnostmi (agregátů či čehokoli jiného), ale jsou samostatně existujícími předměty. Z toho je zřejmé, že Millova adjektivní strategie nemůže být správná, a je třeba ji nahradit strategií substantivní.

3. Zpochybnění Fregovy koncepce a renesance Millova pojetí

Výše uvedené argumenty měly primárně za cíl podpořit Fregovu vlastní koncepci, podle níž číslo není vlastností vnějších věcí (adjektivní strategie), ale jedná se o samostatně existující množinově teoretický předmět (substantivní strategie). Toto pojetí postupně získalo velký vliv a zdálo se, že adjektivní strategie je tím definitivně překonaná. Přirozeně proto nepřipadalo v úvahu, aby se někdo vrátil k Millově koncepci a pokusil se kriticky přehodnotit Fregovy argumenty. To, že se dnes někteří autoři k Millovi opět vrací, je dáno především tím, že byla vážným způsobem zpochybněna Fregova substantivní strategie.

Klíčovou roli v tomto ohledu sehrál P. Benacerraf, který ve svém článku *What Numbers Could not Be?* (1965) ukazuje, že čísla nemohou být samostatně existující předměty. Podívejme se krátce na základní myšlenku jeho argumentace. Ta vychází z toho, že existují dvě alternativní možnosti, jak definovat jednotlivá čísla. Podle první z nich, von Neumannovy, 2 je {Ø,{Ø}}, 4 je {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}},{Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}}} (srov. von Neumann 1923, 347). Ztotožnění jednotlivých čísel s takovýmto typem množin má však poněkud překvapivé důsledky. Z uvedeného zápisu je totiž zřejmé, že 2 ∈ 4. Podle druhé definice, jíž předložil Zermelo (1908, 205), 2 je {{Ø}}, 4 je {{{{Ø}}}}. Přijmeme-li ale tento typ definic, pak již 2 ∈ 4 neplatí.

Jak by se však k uvedeným vztahům mezi 2 a 4 postavila běžná aritmetika? Tomu, kdo ji zná, by jistě přišlo nadbytečné tyto vztahy vůbec zkoumat. Patrně by nás dále upozornil, že ať už vztahy mezi 2 a 4 pojmeme podle von Neumanna nebo Zermela, vždy běžnou aritmetiku určitým způsobem obohatíme. Vždyť s formulemi 2 ∈ 4 nebo 2 ∉ 4 jsme se ve školních lavicích nikdy nesetkali. Snad bychom však proti uvedenému prohloubení aritmetiky neměli nic namítat a problematiku vzájemných vztahů mezi čísly přenechat teoretické matematice. Až ta by měla rozhodnout, kterému obohacení bychom měli dát přednost. Bohužel ale neexistují žádné argumenty, které by naše dilema rozhodly. Nelze-li však v principu rozhodnout, ke kterému obohacení aritmetiky bychom se měli přiklonit, musíme odmítnout předpoklad, z něhož jsme doposud vycházeli. Tím je podle Benacerrafa právě ztotožnění čísla s množinově teoretickým předmětem.

Na základě tohoto argumentu bychom snad mohli odmítnout ztotožnění čísla s množinami, mohli bychom nicméně nadále trvat na tom, že číslo je samostatně existující předmět, ale jiného druhu než množina. I to je však podle Benacerrafa nepřijatelné! Jeho argumentace je v podstatě obdobná jako v případě jeho odmítnutí ztotožnění čísla s množinově teoretickým předmětem. Opět předpokládá, že existuje posloupnost předmětů, které jsou vhodné pro počítání i samotnou aritmetiku. Podobně jako v případě množinově teoretických definicí tedy máme k dispozici definice jednotlivých čísel 0, 1, 2, ... Zaměřme nyní pozornost na třetí prvek v této posloupnosti, tj. na číslo 2. V prvé řadě zjišťujeme, že předmět ztotožněný s číslem dvě hraje roli dvojky díky vztahům, které nastávají mezi ním a předměty ostatními. Kromě toho však musí tento předmět mít i vlastnosti, které nejsou dány jenom těmito vztahy, ale i jeho vlastní povahou. Měl by je tedy i tehdy, kdybychom jej z číselné posloupnosti vyčlenili. Tyto vlastnosti však jsou nadbytečné ve stejném slova smyslu jako vlastnosti, které vyplývají z von Neumannovy či Zermelovy množinově teoretické definice a znovu by tedy běžnou aritmetiku určitým způsobem obohacovaly. Zjevně tak narážíme na obdobný problém jako v případě množinově teoretické definice čísla. Opětovně totiž neexistují argumenty, na jejichž základě bychom zdůvodnili, proč jsme si vybrali právě tuto a ne jinou posloupnost předmětů (srov. Maddy 2003, 81-86).

Uvedené argumenty rozhodně přispěly ke zpochybnění koncepce, podle níž je číslo samostatně existující předmět. To vedlo k tomu, že někteří autoři znovu oprášili polozapomenutý názor, podle kterého číslo není předmět, ale vlastnost agregátu. Tento obrat však nesouvisí pouze s Benacerrafovými argumenty, ale podnítila ho i určitá renesance metafyziky, k níž došlo ve druhé polovině 20. stol. Postupně vznikly koncepce, které čerpají z Aristotela či se jím alespoň částečně inspirují (srov. Armstrong – Forrest 1987; Franclin 2011). Toto obrození se přirozeně netýkalo pouze běžných ontologických témat, ale i problémů spojených s pojetím čísla. Mnozí současní metafyzikové (stejně tak jako Aristoteles či později Mill) nepovažují číslo za samostatně existující předmět, ale za určitou vlastnost agregátu.

Přehlédneme-li znovu dosavadní diskusi, je patrné, že skončila patem: proti Millovi a Aristotelovi hovoří Fregovy argumenty, proti Fregovi argumenty Benacerrafovy. I přes určitou rovnováhu se však nejedná o remízu, ale o *sui generis* vítězství obhájců Millovy či Aristotelovy koncepce. Především díky Benacerrafovým argumentům, ale také díky obnovenému zájmu o metafyziku, totiž přestalo po mnoha desetiletích vyvolávat rozpaky oprašovat či dále rozvíjet koncepci, podle níž je číslo vlastností agregátu.[6] Ti, kteří se za těchto okolností začali opět obracet k Millovi (později i k Aristotelovi), však byli postaveni před obtížný úkol. Starou koncepci čísla bylo třeba znovu promyslet ve světle Fregovy kritiky. Tohoto úkolu se jako první chopil G. Kessler ve svém článku *Frege, Mill and the Foundations of Arithmetic*

6 To je případ především G. Kesslera. V osobní korespondenci nám sdělil, že jeho odmítnutí množinově teoretického pojetí čísla bylo inspirováno především Benacerrafovými argumenty.

(1980). Především tento článek využijeme k tomu, abychom ukázali, jak se lze s výše uvedenými Fregovými argumenty vyrovnat.

(i) Z hlediska dalších diskusí má jistě největší váhu Fregův relativistický argument. Ten totiž stoupenci adjektivní strategie považují za částečně oprávněný. Na jeho základě nicméně Millovu koncepci neodmítají, ale v jeho světle ji dále prohlubují (srov. Kessler 1980, 66-67). V Kesslerových úvahách se setkáváme se dvěma pokusy, jak se s tímto argumentem tvůrčím způsobem vyrovnat. Východiskem prvního je Millem ne zcela přesně vymezený pojem agregátu. Tento pokus se však ukáže, jak uvidíme níže, jako neúspěšný. Povede nás nicméně k pokusu druhému, na jehož konci již stojí nová realistická koncepce čísla.

Podívejme se nejprve na problémy spojené s agregátem. Mill jej podle Kesslera nevymezil zcela jednoznačně, což otevřelo cestu k relativistickému argumentu. Frege v něm Millovi podsouvá (byť pouze implicitně) určité pojetí agregátu, které nejlépe vyjde najevo, připomeneme-li si znovu argument o balíčku karet. Říká se v něm, jak víme, že rukou svíraný balíček musí mít různé číselné vlastnosti. Tento důsledek přirozeně vyplývá z adjektivní strategie, ale také z nevyjádřeného pojetí agregátu. To však lze poměrně jednoduše rekonstruovat. Agregát je zřejmě předmět, který držíme v ruce, a jemuž připisujeme ony vzájemně neslučitelné číselné vlastnosti. Nezáleží na tom, zda je utvořen jednotlivými kartami, kompletními balíčky anebo trumfy při skatu. Agregáty tak jsou pouhé hromady látky – *heaps of stuff* (Kessler 1980, 67).

Podle Kesslera však Mill toto pojetí nezastával. Z jeho vyjádření je prý patrné, že agregát není pouhou hromadou látky, ale navíc je určen i způsobem složení z příslušných jednotek. Hromada karet, kterou držíme v ruce, tak sama o sobě agregátem být nemůže. Tím se stává, až když připojíme, že se jedná o balíček jednotlivých karet, balíček kompletních balíčků či balíček trumfů při skatu. Způsob složení nicméně není dán naším výběrem jednotky, tj. příslušným pojmem, ale existuje na nás zcela nezávisle. Tak jako existuje nezávisle na našem myšlení, dejme tomu Sokrates, existuje podobně i balíček jednotlivých karet, balíček kompletních balíčků karet i balíček trumfů při skatu. Tento zdánlivě nadbytečný dodatek je z hlediska Millova přístupu naprosto nezbytný. Pokud bychom totiž uznali, že agregáty existují v závislosti na našem výběru jednotky, pak bychom agregáty nemohli považovat za samostatně existující věci mající na nás nezávislé číselné vlastnosti.

Tyto vlastnosti by měly až v závislosti na námi zvolené jednotce (jednotlivá karta, kompletní balíček ...). Tím bychom se však nebezpečně přiblížili ke koncepci, podle níž je třeba číslo spojovat nikoli s agregátem, ale s pojmem.

Nyní se již, jak se zdá, můžeme vypořádat s relativistickým argumentem. Jestliže agregát není pouhou hromadou látky, ale navíc je určen i způsobem svého složení, pak tím okamžitě padá námitka, že jednomu a témuž agregátu připisujeme různá čísla. Jedna a táž hromada věcí totiž představuje různé agregáty. Mluvím-li proto o *balíčku, který držím v ruce*, pak jsem tím ještě nevymezil, jaký agregát mám na mysli. Není jasné, zda se jedná o balíček jednotlivých karet nebo o balíček kompletních balíčků či o balíček trumfů při skatu. Jestliže však není vymezeno, jaký předmět máme na mysli, nemělo by nás překvapit, že zdánlivě jednu a tutéž věc charakterizujeme různými číselnými predikáty. Jestliže tedy někomu dám balíček karet a zeptám se ho, kolik je tohoto zde, pak je moje otázka nevymezená a mohu tak očekávat různé odpovědi. Z položené otázky totiž není zřejmé, jaký agregát mám na mysli.

Lze však těmito úvahami o agregátu Millovu koncepci čísla skutečně zachránit? Podle našeho názoru lze ukázat, a to nezávisle na Kesslerovi, že nikoli. Rozpaky vyvolává především to, že zpřesněné vymezení agregátu vede k závěru, že to, co držím v ruce (nějaká hromada látky), představuje současně řadu reálně odlišných věcí: to, co držím v ruce, agregát jednotlivých karet, agregát kompletních balíčků karet či agregát trumfů při skatu. Právě uvedené věci nemohou být vzájemně identické a tudíž např. výrok *to, co držím v ruce, je totéž co balíček karet* by byl nepravdivý. Tento důsledek je zřejmě nepřijatelný, a proto lze uvedené pojetí agregátu odmítnout.[7] I kdybychom toto problematické pojetí přesto přijali, umožnilo by Fregovi použít určitou variantu relativistického argumentu. K vzájemně kontrárním od-

---

[7] Snad bychom mohli namítnout, že výrazy *to, co držím v ruce*, *agregát jednotlivých karet* či *agregát kompletních balíčků karet* jsou pouhé deskripce, které referují k témuž předmětu. To, co držím v ruce, je přece identické s agregátem jednotlivých karet či agregátem kompletních balíčků karet. Tuto skutečnost lze vyjádřit pomocí identitních výroků, které se co do logického typu neliší od výroku *Večernice je Jitřenka*. Uvedená úvaha by jistě byla správná, kdyby však neodporovala našemu předpokladu, podle nějž agregáty existují nezávisle na našem myšlení. To však znamená, že *agregát karet* a *agregát kompletních balíčků karet* jsou nejenom dva termíny, které se liší co do svého významu, ale i co do své reference. Identitní výrok *agregát karet, který držím v ruce je kompletní balíček karet, který držím v ruce* by tak nebyl pravdivý.

povědím by tentokrát sice nevedla otázka *Kolik je toho, co držím v ruce?*, ale otázka *Co držím v ruce?*

I Kessler si povšimnul, že toto zpřesněné pojetí agregátu Fregovu námitku neřeší. Ve své odpovědi však volí poněkud jinou strategii. Připomíná, že mezi základní axiomy teorie čísel patří podle Milla (1973, III, 24, 3) princip *Cokoli je utvořeno z částí, je utvořeno i z částí těchto částí.*[8] Jak se však tento axiom vztahuje k problému s balíčkem karet? Předpokládejme, že někdo drží v ruce kompletní balíčky karet. To, co má v ruce, se tedy skládá ze čtyř „barev" (červené, zelené, kule a žaludy). Tyto barvy se přirozeně dále skládají z jednotlivých karet. Máme tak před sebou instanci uvedeného axiomu. Je zde totiž něco, co je utvořeno z částí (jednotlivé barvy) a tyto části zahrnují další části (jednotlivé karty). Z axiomu jasně vyplývá, že to, co je utvořeno z částí, je totožné s tím, co je utvořené z částí těchto částí. Platí tedy, že to, co je utvořeno jednotlivými barvami, je totožné s tím, z čeho se tyto barvy skládají (jednotlivé karty). Ať už tedy uvažujeme o balíčku karet jako o složeném tím či oním způsobem, vždy se jedná o jednu a tutéž věc. Výše uvedený identitní výrok *to, co držím v ruce, je totéž co balíček karet* by tedy měl být pravdivý. Z Millova pojetí agregátu, které by mělo být integrální součástí jeho koncepce aritmetiky, však vyplývá, že je tento výrok nepravdivý.

Zdá se tedy, že koncepce, podle níž je číslo vlastností vnějších věcí, je nadále nepřijatelná. Přijmeme-li totiž Fregem předpokládané pojetí agregátu (hromada látky), narazíme na relativistický argument. Akceptujeme-li naopak Kesslerem upřesněné vymezení agregátu (celek, který je charakteristickým způsobem složený z částí), dostáváme se do rozporu s jedním ze základních matematických axiomů. Navzdory těmto obtížím se však Kessler nadále přiklání k závěru, že číslo je vlastností vnějších věcí. Postupuje tak, že přijme Fregem předpokládané pojetí agregátu a současně ukazuje, jak lze i za tohoto předpokladu čelit relativistickému argumentu.

Abychom jeho argumentaci pochopili, uvažme takovýto příklad. Představme si, že se někoho zeptáme *Jakým směrem je Praha?* Je zřejmé, že tato otázka je podobně problematická, jako otázka *Kolik je toho, co mám v ruce?* I na ní totiž mohou existovat různé vzájemně kontrární odpovědi (na jih, na sever atd.). Snad by Frege mohl namítnout, že z tohoto důvodu nemůže být směr vlastností Prahy, ale něčeho zásadně odlišného. V tomto případě bychom však jistě jeho námitku odbyli velmi rychle. Směr je vlastností Prahy,

---

[8] Totéž se v dnešní terminologii vyjadřuje *Sumy rovných si jsou rovné.*

ale nejedná se o běžnou vlastnost, ale o vlastnost relační. Otázka *Jakým směrem je Praha?* je problematická, protože jsme neupřesnili místo, od něhož směr určujeme.[9] Kessler tento typ otázek nazývá *nevymezené otázky*.

Vraťme se nyní k argumentu s balíčkem karet a zamysleme se znovu nad tím, proč je otázka *Kolik je toho, co držím v ruce?* nevymezená. Důvody by mohly být obdobné jako v případu směru Prahy. Je-li otázka na směr nevymezená, protože směr je relační vlastnost, mohla by z obdobných důvodů být nevymezená i otázka týkající se počtu či čísla. Číslo by tedy mohlo být podobně jako směr relační vlastností. Klademe-li tedy otázku *Kolik je toho?*, měli bychom stejně jako v případě směru doplnit druhý člen relačního termínu. Tím však není předmět v běžném slova smyslu, ale tzv. *individualizující vlastnost*, pomocí níž dané množství poměřujeme. V našem konkrétním příkladu tedy musíme doplnit, zda to, co držíme v ruce, vztáhneme ke kartě, kompletnímu balíčku či balíčku trumfů při skatu. Nestačí se tedy pouze zeptat *Kolik je toho, co držím v ruce?*, ale je třeba doplnit jednotku, kterou dané množství poměřujeme. Právě toto upřesnění však vyloučí, abychom jeden a tentýž předmět charakterizovali vzájemně kontrárními predikáty.

Tyto Kesslerovy úvahy však nelze považovat za pouhé odvrácení nebezpečné námitky, ale skrývají v sobě i určité prohloubení Millovy koncepce. Připomeňme si nejprve, proč je otázka *Jakým směrem je Praha?* nevymezená. Směr je dyadická relační vlastnost, a ta nastává právě mezi dvěma termíny. Podle Kesslera platí v podstatě totéž v případě otázky *Kolik je toho, co držím v ruce?* Ta je nevymezená ze stejných důvodů, jako otázka *Jakým směrem je Praha?* Je-li tomu však skutečně tak, pak by číslo mělo být podobně jako směr relační vlastnost. Jejím prvním členem je to, co držím v ruce (Fregův agregát), druhým individualizující vlastnost např. karta, kterou je to, co mám v ruce, poměřováno. Tím jsme se však již dostali k určité revizi původní pozitivistické koncepce. Millovi sice nadále dáváme zapravdu v tom, že číslo je vlastností vnějších věcí, nicméně současně upozorňujeme na to, že se nejedná o vlastnost běžnou, ale relační.

---

9 Samozřejmě nás nesmí zmást, že kontext promluvy mnohdy jednoznačně určí místo, od něhož směr Prahy můžeme měřit a že tedy v určitém kontextu (ptáme se někoho na cestu) otázka *Jakým směrem je Praha?* nevymezená být nemusí. Totéž samozřejmě platí v případě otázky *Kolik*.

(ii) Pojďme se nyní podívat na to, jak se Kessler vyrovnává s Fregovými epistemologickými argumenty, které se týkají nuly a astronomicky velkých čísel. Problém s nulou lze vyřešit poměrně snadno. Stačí připomenout, že číslo není běžná, ale relační vlastnost. Jistě existují agregáty, které ve vztahu k určité individující vlastnosti nemají žádný prvek. Např. stádo ovcí má jistě nula prvků ve vztahu k vlastnosti být krávou. S agregátem *x* (např. stádo ovcí) tedy spojíme nulu s ohledem na vlastnost *p* („kráva") právě tehdy, neobsahuje-li agregát *x* žádný prvek *w*, který má vlastnost *P* („být krávou"). Formálně tedy můžeme nulu definovat takto:

$$0(x,p) \leftrightarrow \forall w((w < x) \rightarrow \sim P(w))$$ [10]

Přejděme k problému astronomicky velkých čísel. Podobně jako v případě nuly se i zde zdá, že agregáty, s nimiž takováto čísla spojujeme, nikdo nikdy nevnímal. K těmto číslům tedy nemáme (podobně jako k nule) bezprostřední epistemologický přístup. Kessler nicméně ukazuje, že tato čísla lze na základě neproblematických epistemologických východisek konstruovat. Jeho myšlenku lze přiblížit pomocí následujícího přirovnání. Tak jako nikdo nikdy neviděl agregát, který by měl 1000^{1000} prvků, nikdo nikdy neviděl yettiho. Vlastnost *být yetti* však přesto považujeme za empirickou. To je dáno nepochybně tím, že tato vlastnost je určitým způsobem složena z vlastností, které nám empiricky dány jsou (*být zvířetem*, *být chlupatým*, *chodit po dvou*, atd.). Obdobně tomu je i v případě čísel. Číselné vlastnosti buď přímo vidíme, nebo jsme je schopni určitým mechanickým způsobem vytvořit z vlastností základních. Za onu základní vlastnost je pak třeba považovat vlastnost *být jedním*. Agregát *x* ji má s ohledem na vlastnost *p* právě tehdy, existuje-li jedna část tohoto agregátu, která má vlastnost *P*. To lze vyjádřit formálně takto:

$$1(x,p) \leftrightarrow \exists t(t < x \land P(t) \land \forall v((v < x) \land P(v)) \rightarrow v = t)$$

---

[10] Kessler v uvedeném zápisu vychází z kalkulu individuí. Pro axiomatizaci tohoto kalkulu srov. Kessler (1980, pozn. 6, 70-71). V našem zápise je použita běžná symbolika predikátového kalkulu. Symbol „<" má význam „být prvkem". Výrazem 0(x,p) zapisujeme to, že nula je relační vlastnost, která nastává mezi agregátem x a individuující vlastností p. Kessler zavádí konvenci, podle níž referuje-li predikát „*P*" k nějaké vlastnosti, referuje k vlastnosti *p*.

Máme-li vymezeno, co je nula a jedna, můžeme definovat všechna následující čísla. K tomu je však třeba doplnit relaci následnosti.[11] Ta aplikována na číslo generuje číslo následné. Její pomocí tak lze z jedničky vytvořit dvojku, z dvojky trojku atd. Tímto postupem můžeme přirozeně definovat libovolně velké číslo, a tím i odpovědět na otázku, jakým způsobem jsou nám dána astronomicky velká čísla.

(iii) Podívejme se nyní, jak se Kessler vyrovnává s argumentem obecné aplikability. Podobně jako Mill se domnívá, že z epistemologického hlediska dospíváme k číslu empiricky. Na empirických agregátech nás tedy zajímá vztah P-části k celku. Můžeme však tento empiricky zjištěný vztah (tj. příslušné číslo) aplikovat na agregáty neempirické? Na tuto otázku lze podle našeho soudu odpovědět dvojím způsobem.

V duchu Millova pozitivizmu nemá smysl uvažovat o jiných agregátech než empirických. Existují tedy pouze balíčky karet nebo ovce na louce, nikoli však Aristotelovy kategorie či Boží osoby v Trojici. Nepřipouští-li Mill existenci neempirickým agregátů, pak samozřejmě ani nepřipouští, aby se těmto „agregátům" připisovala nějaká čísla. Pokud bychom namítli, že tak v praxi přesto mnohdy činíme, ukázal by nám Mill, že agregáty, o nichž mluvíme, patří do oblasti nadsmyslného pouze zdánlivě a že jakýkoli diskurs o těchto agregátech lze redukovat na hovor o agregátech smyslově vnímatelných. Mluvíme-li např. o Aristotelových kategoriích, nemluvíme o jakýchsi abstraktních a neempirických entitách, ale pouze o slovech, která se vyskytují v Aristotelově spise *Kategorie*. I přesto by někdo mohl dále namítat, že existují neempirické agregáty, v jejichž případě takováto redukce možná není. Např. Bůh je „agregátem" tří osob, substance je „agregátem" dvou principů (látky a formy) atd. V tomto případě by Mill pravděpodobně upozornil na to, že „agregáty" tohoto druhu neexistují a ani existovat nemohou (nepatří k empirické realitě), a proto je ani nemá smysl charakterizovat žádnými, tj. ani číselnými predikáty. Spojovat trojku s agregátem Bo-

[11] Kessler věnuje definici relace následnosti poměrně velké úsilí. Nakonec dospívá k závěru, že ji je třeba definovat ve dvou krocích:

(1) $0'(x,p) \leftrightarrow 1(x,p)$

(2) $m'(x,p) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = y + z \wedge yp/z \wedge m'(y,p) \wedge 1(z,p))$.

(0' je následník nuly, tj. 1; m' je relace následnosti obecně; srov. Kessler 1980, 71-72).

žích osob by proto bylo pro pozitivisticky orientovaného Milla stejně nepřípustné jako jakýkoli jiný metafyzický výrok.

Kessler reaguje na námitku obecné aplikability poněkud jinak. Na rozdíl od důsledného stoupence pozitivizmu totiž vychází z běžné početní praxe a díky tomu uznává, že čísla lze aplikovat nejenom na empirické agregáty, ale i na agregáty, které empirickou povahu nemají. Z tohoto důvodu nemůže argument obecné aplikability (tak jako důsledný pozitivista) obejít, ale pouze zpochybnit. Poukazuje na to, že argument vychází z poněkud problematického předpokladu, který lze formulovat takto: Jestliže si osvojíme nějaký pojem na základě pozorování jeho empirických instancí, pak jej nelze aplikovat na instance neempirické (srov. Kessler 1980, 76). Tento předpoklad je však pochybný. Vždyť např. k pojmu identity jistě dospíváme rovněž na základě pozorování a přesto má tento pojem zcela jistě i neempirické instance. Totéž však platí v případě agregátů: „To, že jsme naše přesvědčení o vztahu mezi částí a celkem získali díky empirickým agregátům, nemůže vést k závěru, že neempirické agregáty neexistují“ (Kessler 1980, 76). Z hlediska našich úvah pro ně tedy platí stejné závěry jako pro agregáty empirické. Prvky těchto agregátů lze proto počítat stejným způsobem jako prvky agregátů empirických.

(iv) Na závěr tohoto paragrafu se v krátkosti věnujme Fregovým gramatickým argumentům. Kessler jim bohužel nevěnuje žádnou pozornost, ale odpověděli na ně jeho pozdější následovníci. Ti upozornili především na to, že Fregova argumentace je poněkud účelová (srov. např. Maddy 1990, 90) Svědčí-li gramatika přirozeného jazyka ve prospěch jeho vlastní (substantivní) koncepce, pak se o ni opírá, (číslovka se, jak jsme viděli, chová z gramatického hlediska jako singulární termín). Svědčí-li naopak gramatika v jeho neprospěch, pak poukazuje na to, že nás nesmí rušit to, jak se pojem čísla užívá v běžném jazyce (srov. Frege 2011, 216).

4. Závěr

Již jsme naznačili, že Kesslerovy úvahy představují v rámci diskusí o povaze čísla důležitý přelom. Jeho význam spočívá především v tom, že realistické pojetí čísla, podle nějž je číslo vlastností vnějších věcí, po delší době opět přitahuje pozornost a získává i vlivné stoupence. Větrem do plachet pro obhájce této koncepce je mimo jiné i obnovený zájem o metafyziku, s nímž se dnes v analytické filosofii opět setkáváme. Analytičtí metafyzikové se totiž často inspirují aristotelským ontologickým schématem, podle nějž je číslo právě vlastností agregátu (srov. Franclin 2011).

Významnými pokračovateli realistického pojetí čísla jsou především Armstrong – Forrest (1987). Ti ve svých úvahách v podstatě přijímají základní Kesslerovu tezi, podle níž je číslo zvláštním druhem vztahu, podrobněji se ale zamýšlejí nad jeho povahou. Dospívají k závěru, že číslo je zvláštním druhem interní relace, která nastává mezi dvěma univerzáliemi (strukturální vlastností a jednotkovou vlastností). Na tomto základě se dále řeší povaha přirozených, racionálních a reálných čísel.

Literatura

ARMSTRONG, D. M. – FORREST, P. (1987): The Nature of Number. *Philosophical Papers* 16, No. 3, 165-186.

BENACERRAF, P. (1965): What Numbers Could not Be? *Philosophical Review* 74, No. 1, 47-73.

DUMMETT, M. (1995): *Frege: Philosophy of Mathematics.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

FRANCLIN, J. (2011): Aristotelianism in the Philosophy of Mathematics. *Studia Neoaristotelica*, No. 1, 3-15.

FREGE, G. (2011): Základy aritmetiky. In: Frege, G.: *Logická zkoumání. Základy aritmetiky*. Přeložil J. Fiala. Praha: Oikoymenh, 143-261.

KENNY, A. (1995): *Frege*. London: Penguin Books.

KESSLER, G. (1980): Frege, Mill and the Foundations of Arithmetic. *The Journal of Philosophy* 77, No. 2, 65-79.

MADDY, P. (1990): *Realism in Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

MILL, J. S. (1963-1991): *Collected Works of J. S. Mill.* 33 Vols. Robson, J. M. et al. (eds.). Toronto: University of Toronto Press – London: Routledge and Kegan Paul.

QUINE, W. V. (1995): Dvě dogmata empirismu. In: Sousedík, S. – Peregrin, J. (eds.): *Co je analytický výrok?* Praha: Oikoymenh.

SOUSEDÍK, P. – SVOBODA, D. (2013): Millovo pojetí čísla. *Organon F* 20, č. 2, 201-221.

VON NEUMANN, J. (1923): On the Introduction of Transfinite Numbers. Reprinted in: van Heijenoort, J. (ed.) (1967): *From Frege to Gödel.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 346-354.

ZERMELO, E. (1908): Investigation in the Foundation of Set Theory I. Reprinted in: van Heijenoort, J. (ed.) (1967): *From Frege to Gödel.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 199-215.