PERMANENTNÁ AKTUÁLNOSŤ SÉMANTICKÝCH TRANSFORMÁCIÍ V MATEMATIKE

Ján GATIAL

PERMANENT TOPICALITY OF SEMANTICAL TRANSFORMATIONS IN MATHEMATICS

In the development of mathematical thinking two fundamental phenomena can be indentified, i.e., quantity and form. The mathematical disciplines that are related to them are algebra and geometry. In the course of the development they shared the leadership. In the phylogeny of mathematical thinking each period of taking the lead brought semantical shifts. Among the most notable semantical transformations in the development of mathematics we rank Pythagorean and Descartean ones. In Pythagorean semantical transformation, algebraic thinking was changed to geometrical one, whereas in the Descartean semantical transformation geometrical thinking was changed to algebraic one. In the paper the above transformations are commented thoroughly. In the next part of the paper, there is an illustration of the semantical transformation accomplished in the present time. In this illustration geometrical situations are algebraized to form an idempotent, medial and commutative quasi group and then all is modelled in the algebraic language. The algebraic structure that has been built takes the lead from geometry and modifies the known geometric situations.

V histórii matematického myslenia pozorujeme dva základné fenomény, a to mnohosť a tvar. Zopovedajú im matematické disciplíny algebra (aritmetika) a geometria, ktoré sa striedajú vo vedení. Raz je v popredí algebra, inokedy geometria. Každé obdobie preberania žezla znamenalo vo fylogenéze matematického myslenia významný zlom. Mení sa pri ňom charakter odrazu matematickej reality vo vedomí ľudí, prichádza k sémantickému posunu. Príčiny, priebeh a dôsledky tohto javu prekračujú hranice matematiky a zasahujú hlboko do celkového kultúrneho rozvoja ľudstva. Medzi najvýznamnejšie sémantické transformácie zaraďujeme pytagorovskú a descarteovskú.

V pytagorovskej sémantickej transformácii sa algebraické myslenie mení na geometrické. Uskutočnila sa v druhej polovici 6. storočia pr. Kr., teda na začiatku gréckeho matematického obdobia. Príčiny sa pokúsime vysvetliť nasledujúcou hypotézou.

Je známe, že Pytagoras sa vo svojom výskume zameral hlavne na tri oblasti:

1. Učenie o harmónii a proporciách.
2. Učenie o deliteľnosti s teóriou párneho a nepárneho.

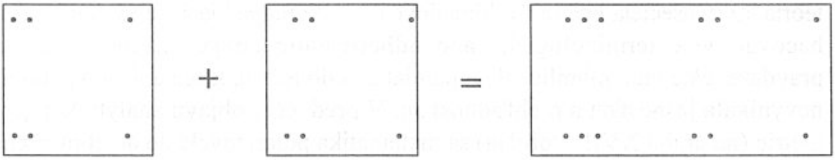
ORGANON F 2 (1995), N.1, 13-17

3. Učenie o figurálnych číslach.

Metódy práce pytagorovskej matematiky charakterizuje identifikácia pojmového aparátu, hľadanie kauzálnych súvislostí javov a snaha logicky skĺbiť poznatky, až po vytvorenie ucelenej teórie. Pred pytagorovským obdobím bola matematika nástrojom pomáhajúcim človekovi orientovať sa v bežných situáciách všedného dňa. No vďaka Pytagorovi a jeho nasledovníkom sa matematika stáva nástrojom filozofickej orientácie, prostriedkom na pochopenie sveta a smerovníkom hľadania pravdy. Pytagorovské učenie asociovalo javy reálneho sveta a verilo, že skutočnosť možno poznať skúmaním matematiky. Rozpor medzi neschopnosťou človeka spoznať univerzálnu pravdu kozmu a túžbou prekonať toto obmedzenie bol energetickým zdrojom výskumu pytagorovcov. Doviedol ich k objavu nového spôsobu chápania mnohosti, k tvarovej pséfofórii. V tejto metóde je podľa nášho názoru podstata sémantickej transformácie algebry na geometriu. Tvarová pséfofória je nielen metódou dokazovania, ale aj metódou odhaľovania nových zákonitostí. Vyslovenú tézu teraz podoprieme argumentmi. Predstavme si, že by Grék predpytagorovského obdobia chcel dokázať tvrdenie:

(1) Súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo

Postupoval by tak, že by dve hromady kameňov, jednu s párnym, druhú s nepárnym počtom zosypal dohromady a potom preveril, či v novej je nepárny počet kameňov. Pokus by ešte niekoľkokrát zopakoval v iných variantoch a dospel by k záveru, že to tak bude aj v ďalších prípadoch. Univerzálnu platnosť zákona (1) by ani nepochopil a pravdepodobne by aj pripustil, že najmä pri veľkých hromadách možno pravidlo (1) aj narušiť. V spomínanom období sa v celom stredomorí počítalo pomocou oblých kamienkov (pséfoi) a počtárske umenie sa nazývalo pséfofória. Pokiaľ išlo o rozumne zvládnuteľné čísla, manipulatívne získané skúsenosti boli jasné, jednoznačné a presvedčivé. Stávali sa však nepoužiteľné pri vyšetrovaní veľmi veľkých mnohostí. Táto technika sa používala až do pytagorovského obdobia, keď vznikla potreba dokázať všeobecnú platnosť tvrdenia (1). Žiadalo sa nájsť nové vymedzenie parity, ktoré by nebolo ohraničené iba na malé čísla, ale poskytovalo by možnosti pracovať s ľubovoľne veľkými mnohosťami. Pytagoras ho našiel pomocou tvaru. Za párne prehlásil také číslo, ktoré je určené počtom všetkých pséfoi naukladaných do obdĺžnika so šírkou 2. Pokiaľ ide o dĺžku obdĺžnika, tú netreba obmedzovať. Nepárne číslo je určené ako párne číslo zväčšené o jednotku. Tvrdenie (1) možno dokázať nasledujúcimi obrázkami:



Ak spojíme dva obdĺžniky so šírkou 2, očividne dostaneme znovu obdĺžnik so šírkou 2. Teda súčet dvoch párnych čísel je číslo párne a odtiaľ vyplýva tvrdenie (1), ktoré je takto dokázané vo všeobecnosti. Uvedená ilustrácia ukazuje podstatu hypotézy o príčinách sémantickej transformácie algebry na geometriu. Tvarová pséfofória po prvý raz v histórii matematiky stmelila fenomény mnohosti a tvaru. Štúdium geometrie sa takto stalo štúdiom pracovného nástroja, a nie pôvodného objektu výskumu. Objektom výskumu sa stalo zrejme až trochu neskôr. Podobný jav pozorujeme aj v súvislosti s logikou, infinitezimálnym počtom, alebo v nedávnom období s matematickými jazykmi. Ak opísaný zlom manipulatívnosti na tvarovosť posudzujeme z hľadiska súčasných vedomostí, tak sa nám núka námietka: V čom je vlastne dôkaz tvrdenia (1) uskutočnený tvarovou pséfofóriou presnejší ako dôkaz pomocou manipulatívnej pséfofórie? Dôvody sú dva. Prvý je psychologický. Namiesto potenciálneho chápania prišlo chápanie aktuálne. Vylúčenie pohybu z reflexie čísla kvalitatívne zvýšilo presvedčivosť argumentácie. Druhý dôvod, prečo tvarový dôkaz tvrdenia (1) nebol spochybňovaný, je utilitaristický. Tvarová pséfofória umožnila zvládnuť úlohy inak ťažko riešiteľné. Ponúkla metódu práce, ktorou sa problematika riešila názorne a systematicky. Stručne povedané, obstála v praxi.

V descartovskej sémantickej transformácii sa geometrické myslenie mení na algebraické. V priebehu XVI. storočia zaznamenala algebra veľký pokrok. Objavilo sa mnoho kalkulatívnych postupov, v prvom rade spôsoby riešenia rovníc tretieho a štvrtého stupňa. Používanie písmen poskytlo nový, od čias Pytagora, jazyk zovšeobecnenia. Poznatky o postupnostiach a radoch umožnili vypočítať číslo π s presnosťou na 35 desatinných miest. Významne vzrástli skúsenosti s funkčnou závislosťou, schyľovalo sa k objavu logaritmov. Všetky nové výsledky mali algebraický charakter. Geometria očividne stagnovala.

Bola neschopná prekročiť Eulkidovu autoritu a neúspešne útočila na nezvládnuteľné antické problémy. Využívala sa skôr pri komentovaní, preskupovaní a rozširovaní dávno známych výsledkov. Názorne to dokazuje teória kužeľosečiek, kde sa Archimedove a Apollóniove klasické výsledky obohacovali viac terminologicky ako odhaľovaním nových zákonitostí. To, pravdaže, ešte viac zahmlievalo a parcializovalo teóriu, ktorá ani za Apollónia nevynikala jasnosťou a prehľadnosťou. V predvečer objavu analytickej geometrie (na prahu XVII. storočia) sa matematika polarizovala do algebraického a geometrického toku. Silný algebraický prúd veľmi rýchlo predbehol lenivo napredujúcu geometriu. Pôvodná jednoliatosť euklidovskej matematiky zanikla. Rozháranosť matematiky jatrila mysle matematikov, ktorí, vedení renesančným ideálom harmonie mundi, túžili po návrate jednoliatej vedy. Tento program formuluje R. Descartes v *Pravidlách na vedenie rozumu* takto: „Veď všetky vedy nie sú nič iné ako ľudská múdrosť, ktorá vždy ostáva jedna a tá istá, čo ako sú odlišné predmety, na ktoré sa vzťahuje ...". Descartes bol presvedčený, že odhalením metódy bádania nájde kľúč ku každému poznaniu. Ideu analytickej geometrie, sprevádzanú veľkou eufóriou mysle, objavil Descartes už v roku 1619. Zobrazenie f, ktoré interpretujeme v množinovom jazyku ako bijekciu z E^2 na R^2, chápal Descartes ako sémantickú projekciu geometrie do algebry, pomocou ktorej môžeme každú geometrickú úlohu algebraizovať, teda previesť na jazyk rovníc. To znamená, že stačí dokonale ovládať algebru rovníc a všetky problémy geometrie sa stanú riešiteľné. Úspechy, ktoré v riešení rovníc zaznamenala algebra bezprostredne pred Descartesom, oprávňovali k optimistickým prognózam nielen v oblasti geometrie, ležiacej bezprostredne nad algebrou, ale aj vo vyšších vrstvách descarteovskej hierarchie vied. I keď Descartesov objav analytickej geometrie bol objavom projekcie geometrie do algebry, jeho matematická podstata bola neskôr celkom prirodzene rozšírená inverzným zobrazením na izomorfizmus obidvoch týchto disciplín. Slovo „izomorfizmus" tu chápeme voľnejšie, nie prísne v duchu teórie kategórií. Hoci vieme, že Descartesov program sa dôsledne realizovať nemôže, myšlienka morfizmu jednotlivých matematických disciplín, teda sémantických transformácií, ostala trvale plodná.

Teraz uvedieme ukážku riešenia geometrických situácií v jazyku algebry, teda ukážku sémantickej transformácie realizovanej v súčasnosti. Metóda spracovania tejto problematiky má štandardnú pečať fylogenetického dejinného postupu matematiky. Najprv sa intuitívne názorné geometrické väzby algebraizujú do idempotentnej, mediálnej a komutatívnej kvázigrupy, ktorú pomenujeme A-štruktúra. Teda ak Q je neprázdna množina, tak A-štruktúra je daná axiomatickým systémom

Q ... (Q,.) je kvázigrupa (symbolom . značíme binárnu operáciu na Q).
C ... Kvázigrupa (Q,.) je komutatívna.
I ... Kvázigrupa (Q,.) je idempotentná.
M ... Kvázigrupa (Q,.) je mediálna.

Dá sa dokázať, že definícia A-štruktúry nie je redundantná, t.j. každá z axióm Q,C,I,M je podstatná. Teraz sa v algebraickom jazyku modeluje všetko, čo sa nachádza v uvažovanej štruktúre. Vybudovaná algebraická štruktúra preberá od geometrie vedúcu úlohu a pomáha modifikovať pôvodné, intuitívne názorné geometrické situácie do svojich, už nie takých názorných modelov. Túto metódu rozpracoval Belousov (pozri [1]) a pomocou nej sa dá ukázať úzka spriaznenosť A-štruktúr a komutatívnych grúp (pozri [2]). V [2] a [3] sa uvažuje o štruktúre, ktorá je v n-rozmernom afinnom reálnom priestore (A_n) daná pojmom „ťažisko sústavy k bodov". Uvažujme o k-árnej operácii $\cdot_k$: $A^k_n \mapsto A_n$ danej predpisom $(x_1, x_2, \dots x_k) \mapsto 1/k\,(x_1 + x_2 + \dots x_k)$, keď $x_1, x_2, \dots, x_k \in A_n$. Treba hľadať tie vlastnosti operácie $\cdot_k$, ktoré možno opísať v jazyku všeobecnej algebry a ktoré „čo najlepšie" charakterizujú situáciu v A_n. Pre $k = 2$ pracuje uvedená charakteristika len s jednou binárnou operáciou. Z uvedeného dôvodu nemôže obsiahnuť tie vlastnosti afinného priestoru, ktorých podstata tkvie napr. v topologickej štruktúre, v lineárnej štruktúre nad poľom R, resp. C. Napríklad nedá sa zaviesť pojem dimenzie uvažovaného grupoidu.

Katedra matematiky FEI STU
Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava

LITERATÚRA

[1] BELOUSOV, D.D. (1967): **Osnovy teorii kvazigrupp i lup**. Moskva.
[2] GATIAL, J. (1969): Some Geometrical Examples of an IMC Quasigroup. **Matematický časopis** 19, 292-298.
[3] GATIAL, J. (1972): Über die IMC-quasigruppe und den Schwerpunkt eines Dreiecks. **Mathematische Nachrichten**, Band 53, 119-123.