LOGICISMUS A PARADOX (I)

Vojtěch KOLMAN

LOGICISM AND PARADOX I.

This is the first part of the essay devoted to the story of logicism, in particular to its Fregean version. Reviewing the classical period of Fregean studies, we first point out some critical moments of Frege's argumentation in the *Grundlagen*, in order to be able later to differentiate between its salvageable and defective features. We work on the presumption that there are no easy, categorical answers to questions like "Is logicism dead?": Wittgenstein's critique of the foundational program as well as the remarkable neo-Fregean discoveries of Boolos and Wright have to be confronted with the effects which the logicistic idea actually had on logico-matematical practice. But that is another story, a sequel to this essay, the purpose of which is systematic rather than critical.

Málokterému objevu náleží v dějinách logiky tak pozoruhodné místo jako Russellovu paradoxu. Když se po dlouhých staletích neplodných spekulací nad univerzálními zákony pravdy, myšlení a pravidly pro řízení lidského rozumu již zdálo, že je logika definitivně mrtvá, vstoupila do hry disciplína, o jejíž plodnosti – přes srovnatelnou míru abstrakce – nikdo nepochyboval, totiž matematika, a to v jedné ze svých nejúspěšnějších částí – infinitesimálním kalkulu. Již v době, kdy Kant identifikoval nezpochybnitelnou jistotu matematických pravd v apriorních názorech prostoru a času, se v něm totiž začaly objevovat první pojmové problémy, související jednak s nekontrolovaným užitím nekonečna (*paradoxy nekonečna*), jednak v rozporu některých výsledků s jejich názornou reprezentací (*paradoxy názoru*). Tak jako Řekové při první matematické krizi, totiž objevu iracionalit, utekli od aritmetiky ke geometrii, byl pozvolna nastaven kurs zcela opačný, totiž aritmetizace analýzy. Krize základů jedné disciplíny měla být tedy zažehnána odkazem na disciplínu jinou.

Aby se kritická situace v nějaké jiné podobě záhy neopakovala, zdálo se být nutné prozkoumat pevnost základů výchozího oboru. Výhoda aritmetiky a algebry v očích většiny matematiků – v rozporu s Kantovým přesvědčením – spočívala v tom, že patří k disciplínám analytické metody, tedy s úzkou, byť poněkud vágní vazbou na ty nejobecnější,

ORGANON F 12 (2005), No. 1, 1 - 20

a tedy i nejjistější pravdy lidského rozumu, pravdy pojmové, nezávislé na stavu ba ani formě empirického světa. Tato idea se v té či oné podobě objevovala u všech hnutí participujících na nezbytné reformě základů matematiky, uvozujících svá zkoumání zpravidla jako „logická". V praxi se však v takovémto odkazu k logice či prohlášeních o redukci aritmetiky na logiku – tzv. *logicismu* – neskrývalo nic víc nežli verbální vymezení vůči Kantovi, v duchu Dedekindova: „pojem čísla je nezávislý na pojmech či názorech prostoru a času."[1]

Gottlob Frege, jeden z představitelů reformy, s nímž je myšlenka logicismu přímo spojována, měl bezesporu pravdu, když si opakovaně stěžoval, že je mezi matematiky či filosofy jen málo těch, kdo by se dokázali shodnout v otázce „co je číslo?". To samé mohl ale říci i o otázce „co je logika?", a to s právem o to větším, že narozdíl od úspěšné a všeobecně pěstované matematiky nic jako zavedená, funkční logická praxe prostě neexistovalo. Tento slabý článek všech logicizujících trendů (od Leibnize po Bolzana, Schrödera a Dedekinda) vyřešil Frege jednoduše tím, že logiku, na níž se *měla* a *mohla* problematizovaná matematická praxe postavit, založil sám.

Výrokový a predikátový kalkul, který Frege ve svém drobném spise s výmluvným názvem *Begriffsschrift* (pojmové písmo) roku 1879 předložil, je nepochybně dílem přelomovým; již tato výjimečnost ale naznačuje, že se nemohlo jednat o pouhý soubor zcela evidentních a přirozených rozumových pravd, jak by si to výše načrtnutý smysl logicistického programu žádal. Iluze bezprostřednosti, které Frege sám při stanovování „základních zákonů pravdivosti" částečně podlehl a kterou s ním dodnes mnozí lektoři moderní logiky sdílí, byla však záhy konfrontována s naprostým nepochopením jeho cílů a dílčích výsledků, a to i ze strany programově spřízněných badatelů. Fregovy výkony na poli logiky tak zůstaly z větší části nepovšimnuty, mnohé z nich proslavili až jeho pokračovatelé jako Russell či třeba Hilbert, který jim paradoxně zprvu odmítal věnovat pozornost. Definitivní ránu ale Fregovu systému uštědřilo až Russellovo zjištění, že jeden z jeho „nejpřirozenějších" principů, podle něhož se dvě množiny vydělené jistými vlastnostmi rovnají tehdy a jen tehdy, mají-li tytéž prvky, vede ke sporu.

Ačkoli se Russellův objev dotýkal stejnou měrou i ostatních pokusů o založení aritmetiky, jmenovitě Peanova a Dedekindova systému

[1] Dedekind (1888).

a Cantorovy teorie množin, byl to pouze Frege, kdo jej považoval za fatální, dávaje najevo naprostou bezradnost ve věci jeho původu a zároveň nechuť v logicistickém projektu dále pokračovat. Již tato dobře známá skutečnost se stala podkladem pro obecně přijímanou tezi, že idea logicismu nadobro ztroskotala a Fregův důkazový systém spolu s velkou částí realizovaných dedukcí drasticky ztratil na hodnotě. Úlohy stavitele základů se ujala axiomatizovaná teorie množin, pojmový ráj, z něhož se – Hilbertovými slovy – matematici nedají vyhnat. Dobrovolný odchod některých, podpořený Brouwerovou kritikou a Weylovou „zradou", přesvědčil část matematiků, aby se – pod vlajkou konstruktivismu – vrátili z Cantorova Elysia nazpět ke Kantovi a jeho konstrukcím v prostoru a čase. Jelikož se jednalo o skupinu podstatně menší, bylo na ni od počátku pohlíženo jako na herezi vůči vládnoucímu trendu.

V sedmdesátých letech minulého století, kdy byl logicismus jako program již dobrých padesát let spolehlivě mrtev, zjistil George Boolos (a jiní), že to s inkonzistencí Fregova systému není tak zlé, jak to na první pohled vypadá resp. celá desetiletí vypadalo, neboť lze z Fregova axiomatického systému získat jednoduchou úpravou systém konzistentní, přinejmenším konzistentní relativně k systémům jiným, za konzistentní běžně považovaným, a sice tak, že velká část významných dedukcí zůstane nedotčena. To se následně stalo přímým podnětem k pokusům o znovuoživení Fregovy doktríny, jak je ve svém neofregeanismu ohlašují a systematicky hájí Crispin Wright a Bob Hale.

Celá záležitost s údajným zmrtvýchvstáním logicismu je ovšem o trochu složitější, nežli by se povrchně informovaný čtenář mohl domnívat, a zaslouží si podrobnější zhodnocení. Podobně, jako jsem se ve svém článku *Logicismus a moderní logika*[2] pokusil popsat podmínky a okolnosti jeho vzniku, pokusím se nyní v první části této práce podat stručný náčrt „vzestupu a pádu" Fregova logicistického programu, a tím i jakési shrnutí klasické éry fregovského bádání. V něm bude probrána Fregova idea definice čísla, jak ji sám prezentoval ve svých *Grundlagen*,[3] spolu s příčnou krachu – Russellovým paradoxem. Na to pak naváže v druhé části, vydané v některém z příštích čísel časopisu, vylíčení toho podstatného, čeho dosáhlo Wrightem podnícené novofregovské bádání při revizi Fregových výsledků, tedy celá záležitost (údajného) znovu-

[2] Viz Kolman (2004).

[3] Frege (1884).

vzkříšení logicistické ideje, počínaje analýzou příčiny paradoxu po odhalení bezespornosti Humova principu a důkazu tzv. Fregova teorému.

Pro sepsání takovéto poněkud obšírné studie bych chtěl uvést dva ospravedlňující důvody. Ten první, *objektivní*, spatřuji v jejím využití coby průvodce a komentáře některých obtížně interpretovatelných míst ve Fregových *Grundlagen*, spisu, který by měl každý student logiky a filosofie alespoň jednou držet v ruce. V mé fregovské knize[4] jsem se musel držet poněkud jiné linie výkladu a mnohé relevantní souvislosti zůstaly proto zcela nevyřčeny nebo je nebylo docela snadné nahlédnout. Druhý důvod byl spíše *subjektivní*: chci si zde připravit půdu pro další, nezávislou stať, v níž už konečně – zhruba v duchu Wittgensteinovy kritiky fenoménu zakládání aritmetiky – posoudím některá problematická místa užité argumentace pro či proti platnosti logicistické teze a pokusím se využít dosaženého k získání komplexnějšího pohledu na proces vývoje moderní logiky od Kanta po naši dobu.

1. Caesarův vzestup a pád

Již před Fregem se matematikům podařilo ukázat, jak lze redukovat obory „vyšších" čísel na „nižší", s přirozenými čísly jakožto bází. Dedekind, vycházeje z antické teorie proporcí a geometrické představy kontinua, definoval reálná čísla jako řezy na číslech racionálních (1872), Cantor je popsal jako jejich konvergující (fundamentální) posloupnosti (1871) a Weierstrass jako posloupnosti vnořených intervalů (1860).[5] Definováním racionálních čísel jakožto dvojic čísel přirozených mohl být program aritmetizace analýzy považován za uskutečněný. Těm, kdo se jako Frege neshlédli v Kroneckerově hesle: „milý Bůh stvořil celá čísla, vše ostatní je dílem člověka", kdo tedy číslo nepovažovali za primitivní, nedefinovatelnou ideu, ale práce teprve začala – zbývalo redukovat přirozené číslo na logické pojmy.

1.1 Číslo a existence

Otázku, *kde* začít, vyřešil Frege jednoduše: u aplikace, použití číselných výrazů ve větách. „Po významu slov se je třeba ptát v kontextu věty, ni-

---

[4] Kolman (2002).

[5] Weierstrass své výsledky nepublikoval a známe je tedy až prostřednictvím jeho žáků. Datování je proto nepřesné.

koli izolovaně;" tak zní jedna ze tří zásad, jež předesílá svému „spisu o čísle", *Základům aritmetiky*, aby v něm krátce na to rozlišil dva typy kontextů, v nichž se číslovky běžně vyskytují, totiž (i) *adjektivní* jako „mušketýři jsou 4", v nichž se zdá číslovka fungovat gramaticky stejně jako ve větě „mušketýři jsou stateční", tj. po způsobu přídavného jména, a (ii) *substantivní*, k nimž se řadí většina vět matematiky, dejme tomu „5 je prvočíslo" či „5 = 2+3", v nichž je analogicky k větám „Mušaraf je generál" a „Mušaraf je pákistánský prezident" připisována substantivu nějaká vlastnost resp. tvrzena identita dvou předmětů.

Zaměřiv se na adjektivní užití, Frege zjišťuje, že se přípis číslovky od přípisu jiných, např. empirických predikátů, významně liší: číslo se totiž narozdíl od výše uvedené vlastnosti „být statečný" nechová distributivně, tj. není připisováno jednotlivým mušketýrům, třeba Aramisovi, ale jejich celku. Coby vlastnost nenáleží tedy jednoduchým předmětům, ale jejich skupině. Ani to ale není přesné: přirozené (kardinální) číslo představuje (ve Fregově analýze) odpověď na otázku „kolik?". Ta však u daného fenoménu (knihy, skupiny lidí) nedává smysl, není-li ve tvaru „kolik *čeho*?", tj. není-li doprovozena udáním (sortálního) predikátu (kolik stránek, kapitol, mušketýrů, bot atd.). Číslo se tak nevztahuje přímo ke skupině předmětů, ale k pojmu (vlastnosti), který tuto skupinu vyděluje.

V tom se, argumentuje Frege, číselný údaj (*Zahlangabe*) podobá přípisu existence, jenž se rovněž prostřednictvím existenčního kvantifikátoru vyjadřuje k počtu předmětů spadajících pod daný pojem. Toto pozorování se zdá nejen ospravedlňovat uchopení čísla jako predikátu druhého řádu – jímž podle Frega kvantifikátor je – tj. výrazu „MxΦx", který doplněn o výraz kategorie predikát „Fξ" dává výraz „MxFx" kategorie věta,[6] ale dovoluje oba vidět jako určení počtu předmětů spadajících pod daný pojem, tj. jako tzv. *numerické kvantifikátory*. Existenční kvantifikátor např. „říká", že pod daný pojem spadá alespoň jeden (≥) předmět.

Čísla samotná představují ještě speciálnější případ tzv. *numericky definitivních kvantifikátorů*, určujících přesně (=), kolik předmětů čítá daná extenze. Jejich definice s pomocí logických spojek, rovnítka

[6] Zavedeme-li výrazy „s" resp. „t" jako zkratky základních kategorií věta resp. vlastní jméno, můžeme odvozenou kategorii kvantifikátoru značit jako „s/(s/t)", kde „s/t" označuje kategorii (jednomístného) predikátu prvního řádu.

a existenčního kvantifikátoru je záležitostí běžné logické rutiny: první z nich, nulu získáme jako

(E0) $(\exists_0 x)Fx \equiv_{Def} \neg(\exists x)F(x)$,

čísla další pak induktivním krokem

(En) $(\exists_n x)Fx \equiv_{Def} (\exists x)[Fx \wedge (\exists_{n-1} y)(Fy \wedge x \neq y)]$.

1.2 Číslo a dobyvatel Galie

Poté, co Frege v §55 *Grundlagen* načrtl výše uvedenou analýzu, argumentoval hned v následujícím oddílu, tj. v §56 pro její nedostatečnost. Uvedené definice obsahují numerál n, jehož použití ve větách mělo být vysvětleno. Tento numerál sám ale nefiguruje v inkriminovaných formulích jako plnohodnotné *definiendum*: narozdíl od proměnné „x" je pouhým schematickým písmenem, zastupujícím pevnou část komplexního predikátu „$(\exists_n x)\Phi x$", od níž nemůže být odloučen. Není přes něj tedy možné kvantifikovat, ani jej postavit vedle znaménka rovnosti, jak by si to obvyklé věty matematiky typu „$\forall x(x+0 = x)$" zdály vyžadovat. Jelikož výskyt v kontextu rovnosti je pro Frega nutná a postačující podmínka toho, aby mohl být výraz uchopen jako vlastní jméno, formuluje tuto námitku poněkud bizardním způsobem, který jí v příslušné literatuře vynesl název „problém Julia Caesara": předložená definice je vadná, neboť nám nedovoluje rozhodnout, zda „některému pojmu nenáleží Julius Caesar a zda je vůbec dobyvatel Galie číslo nebo ne?"

Fregův argument, jak na to jako první upozornil Dummett,[7] ale směšuje dvě odlišné věci, a to (i) nutnost uniformě vysvětlit obě, tj. adjektivní i substantivní užití věty a (ii) tvrzení, že je numerál vlastní jméno. To první je předem akceptovaným cílem prováděné analýzy, druhý bod ale obnáší něco, co by příslušná analýza měla teprve ukázat, tj. přesvědčit nás, že věty jako „2+3 = 5" nemají třeba skrytě adjektivní strukturu, založenou na výše uvedených definicích. Máme-li k dispozici logiku vyšších řádů, není ve skutečnosti problém něco takového realizovat. Zmíněnou rovnost lze např. přeložit do věty logicky dokazatelné z (E0) a (En) a řady notačních zkratek „1" za „0+1", „2" za „1+1", „3" za „2+1" atd., tedy ze samých definic, jak to odpovídá cílům analytického projektu. Pro přepis kvantifikovaných vět „$\forall x,y(x+0 = x)$" se pak zdá

[7] Dummett (1991), s. 103nn.

být postačující nahradit symboly numerických kvantifikátorů speciální proměnnou. Problém je ovšem v tom, že tato nová proměnná probíhá přes všechny pojmy druhého řádu, nikoli pouze přes čísla, jak to předpokládáme u původní věty. To by se dalo samozřejmě napravit, kdybychom byli čísla od ostatních predikátů s to odlišit. Jsme ale schopni pouze na základě definice (E0) a (En) říci, kdy je daný predikát numericky definitivní kvantifikátor a kdy ne?, jinými slovy: jsme schopni pro daný predikát druhého řádu rozhodnout, zda je to číslo? Teď se ovšem ptáme velmi podobně jako Frege v problému Julia Caesara, tedy až na to, že nejsme na úrovni předmětu (vlastního jména), na níž se vyskytuje dobyvatel Galie, ale o dvě úrovně výš, tj. na úrovni pojmů (predikátů) druhého řádu. Přece jenom se tedy vyplatí, když se k Fregově námitce vrátíme.

K úplnému porozumění pozadí Fregova argumentu nejprve patří obeznámenost s jeho koncepcí univerzálního diskurzu, v němž jsou zahrnuty všechny výrazy typu vlastní jméno resp. jim odpovídající předměty nehledě na přirozené kategorie. Celé toto univerzum tvoří obor hodnot jediné předmětné proměnné a pro všechna jeho jména musí být specifikována *kritéria identity*, Fregem nazývaná *kritérii znovurozpoznání*, tj. pro libovolné N, M z oboru musí být výrazu N = M přiřazena právě jedna pravdivostní hodnota. Odtud tedy Fregova potřeba posoudit, zda se Julius Caesar nerovná nějakému číslu, na jehož „předmětné" povaze (zatím) nepřesvědčivě trvá.

Vidíme-li nyní čísla jako pojmy druhého řádu, je Caesarův problém v jednom, totiž triviálním směru vyřešen: Caesar není číslo jednoduše proto, že to je objekt jiného typu a celá otázka po jejich identitě nedává gramatický smysl. Identita ale, jak jsme již zmínili, je podle Fregeho charakteristickým znakem předmětů, tj. významů výrazů kategorie jméno. Dává tedy zobecněný Caesarův problém na úrovni predikátů vůbec smysl, tj. lze se vůbec ptát, zda je nějaký konkrétní pojem druhého řádu *identický* s nějakým číslem? Odpověď zní ano, pokud přes dané výrazy kvantifikujeme, tedy činíme-li jejich významy *objekty*, hodnotami proměnné, i když hodnotami určitého (vyššího) typu. Znak tohoto typu s sebou příslušná proměnná vždy nese, tj. nepřipouští dosazení výrazů typu odlišného. Totéž se samozřejmě týká i identity, po jejíchž stranách se mohou vyskytovat pouze výrazy resp. proměnné téže logické kategorie.

Přenesen na úroveň adjektivní analýzy žádá po nás vlastně Caesarův problém dvojí: (i) kritérium identity pro predikáty druhého řádu a (ii) definici predikátu třetího řádu, pod nějž by spadaly pouze numericky definitivní predikáty. První bod není obtížné splnit, přidržíme-li se Fregova extenzionálního pojetí logiky, podle něhož se lze koneckonců i na dva pojmy prvního řádu dívat jako na jistým způsobem identické, a to tehdy, platí-li o stejných předmětech. Analogicky k této druhořádové identitě

$$(=^2) \quad =^2_{x,y}(Fx, Gy) \equiv_{\mathrm{Def}} (\forall x)(Fx \leftrightarrow Gx)$$

definujeme pak binární relaci třetího řádu

$$(=^3) \quad =^3_{X,Y}(MxXx, NxYx) \equiv_{\mathrm{Def}} (\forall X)(MxXx \leftrightarrow NxXx).$$

Splnění druhého bodu již tak jednoduché není. Ekvivalence (E0), (En) jsou definitorická schémata, jejichž sledováním jsme s to explicitně definovat každé číslo nacházející se v řadě 0, 1, 2, 3, ..., nikoli však pojem čísla samotný. Zde je tedy Fregova výtka nedostačnosti příslušné definice do jisté míry oprávněná. Ve zdánlivě přímočaré frázi „číslo je to, co se rovná 1 nebo 2 nebo 3 atd.“ se totiž v obratu „atd.“ skrývá odkaz k nekonečné disjunkci a pravou stranu proto nelze považovat za řádné *definiens*, alespoň ne podle Fregových dnes již klasických standardů.

I tato potíž je ale podle Frega řešitelná, a to prostředky tzv. „teorie řad“, kterou rozvrhl již v *Begriffsschrift* resp. kvůli které byl jeho logický kánon vůbec zkonstruován.[8] Budeme-li totiž schopni z relace přímého následníka v nějaké řadě, jak ji pro případ řady čísel 0, 1, 2, 3, ... popisuje definice (En), definovat relaci následníka obecného, tj. relaci toho, k čemu lze dojít konečným počtem aplikací následníka přímého, budeme schopni číslo zachytit jakožto obecného následníka čísla 0, které již bylo explicitně definováno v (E0). Frege nyní v *Begriffsschrift* ukázal, že to možné je, a to prostředky aparátu logiky vyššího řádu. Ten musí být v případě čísla jakožto druhořádového pojmu samozřejmě vyšší než u čísla coby jednoduchého předmětu, to je ale pouze technický problém, k němuž se později ještě vrátíme. Momentálně je důležité vědět, že je adjektivní analýza čísla možná a důvody, které proti ní v §56 Frege uvedl, liché. Důraz na §56 je zde ale podstatný, neboť – jak později uvidíme – Frege číslo jako předmět v jistém smyslu uchopit musel.

[8] Viz Kolman (2004).

Nyní se ovšem znovu vraťme k analýze užití číslovky v kontextu věty, teď již k její substantivní části.

1.3 Humův princip

Frege se rozhodl, že vysvětlit substantivní užití čísla z adjektivního není možné a že pravý tvar číslovky je definitivně tvarem vlastního jména. Tím se ocitl před inverzním problémem, totiž (i) jak vysvětlit užití adjektivní z užití substantivního a zároveň (ii) jak zachránit velkou a evidentně zdravou část dosavadní analýzy, z níž vyšlo číslo jako něco, co přísluší pojmu. Klíčem k řešení bodu (i) je samozřejmě ukázat, že věty jako „Jupiter má 4 měsíce" či „mušketýři jsou čtyři" mají *de facto* také substantivní strukturu, tedy že jejich forma logická neodpovídá formě, k níž nás svádí gramatika. Sloveso „být" v druhé z vět, které lze do první dostat přepisem „Jupiterovy měsíce jsou 4", funguje jako kopula, nikoli jako výraz pro rovnost – právě to z obou přirozeně dělá případy užití adjektivního. K identitě lze ale podle Frega snadno přejít, upravíme-li větu „Jupiterovy měsíce jsou 4" na „počet Jupiterových měsíců je 4".

Tím je jednak vysvětlen bod (i), alespoň dílem ale také bod (ii), neboť na místě východiska celé substantivní strategie se ocitá komplexní jmenný výraz, skládající se z druhořádového funktoru „počet X", přesněji „$\text{počet}_x \Phi x$" (symbolicky „$Nx\Phi x$"), tedy výrazy kategorie t/(s/t), nasycované predikátem „$F\xi$" prvního řádu. Číslo je tedy opět dáno do souvislosti s pojmy, tentokráte ale nikoli jakožto speciální druhořádový operátor, přiřazující pojmům pravdivostní hodnoty, tj. výraz kategorie s/(s/t), ale jakožto *výsledek* aplikace druhořádového operátoru $Nx\Phi x$, tzv. *operátoru kardinality*, na nějaký pojem, tedy jako výraz kategorie t. Jelikož výrazy „NxFx" jsou jedinými jmény čísel coby samostatných předmětů, zavazuje nás Fregovo kritérium znovurozpoznání k ohodnocení výrazů tvaru „NxFx = NxGx." Teprve to nám umožní „uchopit číslovku jako vlastní jméno." (§62)

Řekneme-li, že by dvěma pojmům mělo být přiřazeno stejné číslo tehdy a jen tehdy, jestliže mají stejný počet předmětů, zní to nejspíš jako pouhý pleonasmus. To je ale v jistém smyslu vinou přirozeného jazyka, který nám narozdíl od jazyka formálního zastírá, že lze pravou stranu této „triviality" narozdíl od rovnosti strany levé uchopit jako druhořádovou relaci $EQ_{x,y}(Fx, Gy)$ takovou, že

$$(EQ)\quad (\exists R)[(\forall x)(Fx \rightarrow (\exists! y)(Gy \wedge xRy)) \wedge \wedge (\forall y)(Gy \rightarrow (\exists! x)(Fx \wedge xRy))],$$

tedy jako vztah, v němž se dva pojmy nachází tehdy a jen tehdy, lze-li si pod ně spadající předměty vzájemně jedno-jednoznačně přiřadit. Výsledné kritérium má tedy podobu

$$(HP)\quad NxFx = NyGy \leftrightarrow EQ_{x,y}(Fx,Gy)$$

a ve fregovské literatuře se pro něj ustálil Boolosův název „Humův princip". Jeho pravou stranu budeme v dalším textu příležitostně zapisovat také jako „F eq G", přičemž příležitostné potlačení proměnné u pojmového slova bude obecně záležitostí srozumitelnosti kontextu.

Co do formy vyhlíží HP jako pokus o definici *rovnosti* čísel. Není to ale rovnost, upozorňuje Frege, nýbrž číslo samo, co potřebuje být v rámci logicistického programu definováno. Jak by ale měla takováto definice vypadat tj. s odvoláním k čemu by mělo být číslo definováno? Na to se – možná překvapivě – pokouší Frege odpovědět v rámci vymezeném kantovskou otázkou „jak je nám dáno číslo?", na níž si posléze odpovídá: nikoli jako fyzický či psychický předmět, ale *v kontextu věty* – stanovením kritéria znovurozpoznání. Takové kritérium, jak víme, je ovšem nutně spjato s každým předmětem, lhostejno, zda se jedná o číslo či gauč, naznačovaná odlišnost tedy může spočívat v jediném: Stanovení kritéria identity mezi číselnými termy není jen nutný, ale zároveň *postačující* prostředek jejich uchopení, tj. při jeho stanovení se není třeba odvolávat ani k empirické zkušenosti, ani k formám její možnosti, jak to v aritmetice vyžadoval Kant, ale pouze k principům logického charakteru. Skrze ně dostaneme něco, co by se Kantovi nutně jevilo jako *contradictio in adjecto* – čísla coby logické předměty.

Fregův termín „logický předmět" resp. jeho definice není ale tvrdý oříšek pouze pro transcendentální idealisty. Zvykli jsme si již, že je logika formální věda, která od všeho obsahu, tedy i významu vlastních jmen abstrahuje. Něco jako „vlastní předmět" jí v tomto smyslu nepřísluší. Přece však ponechává i ona význam některých výrazů neměnný, konstantní – totiž právě význam tzv. *logických konstant*. K těm se řadí obvykle tzv. výrokové funkce a kvantifikátor, jehož význam coby význam výrazu kategorie s/(s/t) lze chápat jako funkci přiřazující pojmům pravdivostní hodnoty.

Výhoda adjektivní strategie spočívala v tom, že jsme při zavádění čísel již disponovali „objekty" stejného typu, totiž právě existenčním a obecným kvantifikátorem, a mohli tak v (E0), (En) podat definici explicitní. V případě substantivním, konkrétně při zavádění operátoru $Nx\Phi x$ ale v takové situaci nejsme, neboť žádnou funkcí (konstantou) kategorie t/(s/t) nedisponujeme, ani ji nejsme schopni získat složením z konstant stávajících. Přirozeně se tedy nabízí možnost uchopit jako konstantu operátor kardinality samotný. Jeho úloha v logickém systému nemůže být samozřejmě stanovena explicitně, snad by to ale bylo možné kontextuálně, podobně jako je úloha existenčního kvantifikátoru vyjádřena formulí (axiomem)

$$F(N) \rightarrow (\exists x)Fx.$$

Tímto uchopením – definicí – čísla v kontextu věty by mohl být právě Humův princip jakožto jediný předpoklad, který na čísla resp. operátor $Nx\Phi x$, jehož jsou hodnotami, klademe.

1.4 Definice abstrakcí

Frege si byl samozřejmě vědom atypičnosti, s níž je označení HP za definici spjato, a jelikož byl sám zastáncem pojetí „přísných pravidel definování", protežujících především explicitní definice, byl z něho i patřičně nesvůj. V *Grundlagen* se odvolával především k tomu, že je tento způsob implicitního zavádění „nových" předmětů v matematice hojně využíván, a to v procesu tzv. logické abstrakce. Právě jeho prostřednictvím bylo dosaženo redukce vyšších číselných oborů na přirozená čísla, jak jsme o ní mluvili úvodem.

Uvažme např. již definici *racionálních čísel* jako dvojic čísel přirozených. Prosté prohlášení dvojice <2, 4> za racionální číslo nás okamžitě postaví před otázku, zda se v případě dvojice <1, 2> jedná o *totéž či různé* číslo. To není ovšem nic jiného nežli problém kritéria identity, které se u racionálních čísel a prostých dvojic evidentně liší, tj. z toho, že se $m \neq p$ či $n \neq q$, nelze usoudit, že <m, n> ≠ <p, q>. Nyní snad o trochu jasněji vidíme, proč je to podle Frega identita, co dělá předmět předmětem, především ale proč je velká chyba, řekneme-li, že je racionální číslo definováno jako dvojice přirozených čísel. Správně můžeme říci pouze, že bylo racionální číslo odvozeno z dvojic přirozených čísel prostřednictvím konvence, podle níž se dvě racionální čísla <m, n> a <p, q> rovnají, jestliže se součin čitatele prvního a jmenovatele druhého rovná součinu jmenovatele prvního a čitatele druhého. Matoucí už je tu jen použití téhož výrazu „<m, n>" jak ve významu číselné dvojice tak čísla racionálního, což lze ošetřit zavedením operátoru Q, který tento přechod – *abstrakci* – od jednoho k jinému typu předmětů explikuje. Definujeme-li relaci O mezi dvojicemi čísel jako

$$(\mathrm{O}) \quad O(\langle m, n\rangle, \langle p, q\rangle) \equiv_{Def} mq = pn,$$

lze onen přechod zachytit formulí

$$(\mathrm{QP}) \quad Q(\langle m, n\rangle) = Q(\langle p, q\rangle) \leftrightarrow O(\langle m, n\rangle, \langle p, q\rangle),$$

svou formou připomínající Humův princip. Místo výrazu „$Q(\langle m, n\rangle)$" pak obvykle píšeme „m/n". Tentýž proces pro případ *reálných čísel* může vypadat takto: Vyjdeme z toho, že máme posloupnosti a^* racionálních čísel $a_0, a_1, \ldots$ následující vlastnosti:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall p, q > N)(|a_p - a_q| < \varepsilon),$$

kde ε je racionální a p, q, N přirozená. Takovýmto posloupnostem říkal Cantor *fundamentální*, dnes se obvykle nazývají Cauchyho nebo koncentrované. Existuje-li racionální číslo s takové, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall p > N)(|a_p - s| < \varepsilon),$$

řekneme, že posloupnost a^* *konverguje* k s, symbolicky: $\lim a^* = s$. Zatímco každá racionálně konvergentní posloupnost je posloupnost fundamentální, inverzní tvrzení neplatí, tj. existují fundamentální posloupnosti, které nekonvergují k žádnému racionálnímu číslu, např. posloupnost $a_0 = 1$, $a_1 = 1{,}4$, $a_2 = 1{,}414$, $a_3 = 1{,}4142, \ldots$ stále bližších aproximací „řešení" rovnice $x^2 - 2 = 0$, dávající počáteční segmenty desetinného rozvoje čísla $\sqrt{2}$. Podstata příslušné abstrakce spočívá v tom, že fundamentální posloupnosti uchopíme jako reprezentanty čísel i v případě, kdy nekonvergují k žádnému číslu racionálnímu a výraz $\lim a^*$ pro ně tedy zprvu nedává smysl. Získá jej ale, když po definování relace

$$(\mathrm{T}) \quad T(a^*, b^*) \equiv_{Def} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall p > N)(|a_p - b_p| < \varepsilon)$$

položíme

$$(\mathrm{RP}) \quad \lim a^* = \lim b^* \leftrightarrow T(a^*, b^*)$$

coby kritérium identity „nových" předmětů – reálných čísel.

HP, QP a RP jsou nyní tři různé případy tzv. definice abstrakcí, jak jí Frege jako jeden z prvních explicitně popsal právě v souvislosti s analýzou čísla. V konstruktivistickém žargonu je cílem této definice zavést nové předměty *via* kritérium jejich rovnosti. To má podobu relace mezi nějakými výchozími objekty (pojmy, dvojicemi přirozených čísel, fundamentálními posloupnostmi racionálních čísel), přičemž se vždy jedná o relaci ekvivalence, tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Není obtížné ukázat, že relace EQ, O a T tyto podmínky splňují. Obecná podoba *definice abstrakcí* vypadá tedy takto

(DA) $\#(x) = \#(y) \leftrightarrow x \sim y$,

přičemž operátoru $\#(\xi)$ říkáme operátor abstrakce nebo též *abstraktor*.

1.5 Kontextuální definice

Nauka o definici patřila k Fregovým oblíbeným tématům zejména proto, že se proti ní podle jeho mínění většina jeho spoluputovníků v oblasti výzkumu základů matematiky hrubě prohřešovala. Jednalo se zejména o tendence zavádět nové objekty prostou stipulací, jakýmsi vyvářením z ničeho, v důsledku čehož – jak se jednou vyjádřil směrem ke Cantorovi – není člověk dalek všemohoucnosti. Definice v pravém slova smyslu (*eigentliche Definition*) je podle Frega prostá notační konvence, jíž je novému symbolu, *definiendu*, stojícímu nalevo od znaku definitorické ekvivalence ($\equiv_{\mathrm{Def}}$), dán význam prostřednictvím symbolů již zavedených, tvořících tzv. *definiens* strany pravé, u něhož je význam předpokládán. Zavádí se tedy nový znak, nikoli předmět, a celá záležitost je proto především otázkou větší přehlednosti a pohodlí.

Potřeba zavést logické předměty prostředky logického aparátu, který žádnými elementárními konstantami skládajícími výrazový typ vlastní jméno nedisponoval, postavil ovšem Frega před těžce řešitelné dilema zavedení něčeho, co celý život kritizoval, totiž definice produktivní povahy. Takováto definice by se nemohla lišit pouze od definice explicitní, ale i od smysluplné věty, v níž – právě aby byla smysluplná – musí být význam všech užitých znaků předpokládán jako známý, a nelze jej tam tedy teprve zavádět. Název *implicitní* či *kontextuální definice* je ale narozdíl od pojmu definice explicitní příliš vágní, abychom jej mohli jen tak označit za Fregem navržený třetí typ větného výrazu.

Pojem kontextuální definice je v obecném povědomí spjat především s Russellovou teorií deskripcí resp. jeho naukou o neúplném symbolu (*incomplete symbol*). Výraz typu „francouzský král", analyzovaný Russellem jako „to jediné *x* takové, že *x* je francouzský král", symbolicky „ιxFx", nemůže být zaveden explicitně, protože bychom mu pak museli přiřadit předmět, který momentálně neexistuje. Je proto předveden v kontextu celé věty resp. větného schématu, jemuž je definicí přiřazen způsob, jak jej z tohoto kontextu eliminovat, konkrétně

(R1) $H(\iota x Fx) \equiv_{Def} (\exists x)[Fx \wedge (\forall y)(Fy \rightarrow x = y) \wedge Hx]$.

Podstatné je, že mimo uvedený kontext, a to především po stranách rovnosti, nedávají výrazy jako „ιxFx" smysl. Nejsou to vlastní jména, u nichž lze třeba od výskytu ve větě „H(N)" přejít k „$(\exists x)(Hx \wedge x = N)$", ale neúplné symboly, tedy pevné části komplexních notačních zkratek „$H(\iota xFx)$", jimiž lze nahradit věty na pravé straně příslušné definice. Z tohoto důvodu se zdá být výše uvedené užití symbolu „$\equiv_{Def}$" oprávněné, neboť levou stranu tvoří klasické *definiendum* jediného symbolu resp. jeho schématu.

U abstrakčních definic, jak je Frege prezentuje v *Grundlagen*, se ale má věc jinak. Výrazy jako „NxFx" jsou sice také zaváděny v kontextu specifické věty, totiž rovnosti, nyní ale právě proto, že je tento výskyt nutná a postačující podmínka jejich využití coby vlastního jména, tj. rovnou se předpokládá, že budou substituovatelné ve všech výskytech ostatních jmen, a naopak, že je samotné bude možné nahradit předmětnou proměnnou. To je podle Frega dáno s tím, že k *definiens* abstrakční definice nepatří pouze pravá strana ekvivalence, ale i symbol (prvořádové) rovnosti na straně levé, jenž ve svém obecném logickém významu zachycuje substituovatelnost přidružených výrazů, a to substituovatelnost *salva veritate*, neboli

($=^1$) $N = M \leftrightarrow (\forall F)(F(N) \leftrightarrow F(M))$.

Na jedné straně je tu tedy explicitní definice a Russellova definice kontextuální, v nichž je od sebe symbolem „$\equiv_{Def}$" ostře odděleno definující a definované, na straně druhé smysluplná věta, v níž není definováno nic a vše se předpokládá jako dané, a mezi nimi jako pokus o spojení bezobsažnosti, analytičnosti první s netriviálností druhé Fregova definice čísla abstrakcí. Analytičnost DA podle Frega spočívá v tom, že jeho levá strana předkládá pouhou alternativní „analýzu" strany pravé, rozkládá jí tedy jen novým způsobem do tvaru, v němž figuruje rovnost coby klín celého štěpného procesu; obě strany mají proto stejné pravdivostní podmínky a jejich ekvivalence je tautologická.

Ať už si o analytičnosti DA či konkrétně HP myslíme momentálně cokoli – i když vzpomeňme: HP formulovaný slovy skutečně vyhlíží jako pleonasmus – faktem je, že se z povahy své výše popsané odlišnosti dopouští selhání, z něhož Frege obvinil definici adjektivní. Zavádí totiž abstraktní výraz „NxFx“ pouze v kontextu

NxFx = NyGy,

současně však připouští jeho užití ve větě

NxFx = M,

kde M je libovolné vlastní jméno, tedy i jméno potenciálně jiného tvaru než „NxFx“. Odsud však narozdíl od prvního případu není jeho výskyt schopna eliminovat, jinými slovy: není schopna rozhodnout, zda daná rovnost platí či nikoli. Jelikož jiným principem týkajícím se významů výrazů typu „NxFx“ nedisponujeme, vrátili jsme se opět k problému Julia Caesara.

1.6 Číslo a průběh hodnot

Jestliže Frege o novém typu věty-definice očividně pochyboval, znovuvynoření problému Julia Caesara mu bylo v *Grundlagen* přímým podnětem, aby kontextuální definici čísla zamítl a nahradil definicí explicitní. Tu měla ospravedlnit jiná matematická zvyklost, nahrazující řeč o předmětech jisté vlastnosti řečí o jejich množině, tj. přechod od pojmu F k množině {x; Fx}, zvyklost, jež vedla v moderní sémantice k interpretaci prvního (predikátu) druhým (podmnožinou nosiče). Frege o {x; Fx} hovoří tradiční terminologií jako o „rozsahu pojmu F“ či vlastní terminologií jako o „průběhu hodnot funkce F“. Rozsah pojmu, množina, agregát atd. mají podle Frega tu přednost, že jsou narozdíl od pojmu užívány substantivně, přechod od adjektivní k substantivní analýze je tedy zvláště bezbolestný, ba vlastně vyhlíží jen jako záležitost vkusu. Nic není vzdálenější pravdě, jak se záhy přesvědčíme.

Korespondence pojmů a jejich rozsahů ovšem nabízí přímý návod, jak odvodit explicitní definici čísla v substantivní verzi z verze adjektivní: namísto pojmu druhého řádu, příslušícího těm a jen těm pojmům prvního řádu, pod něž spadá určitý stejný počet předmětů, tj. jsou v relaci EQ, stačí vzít jeho rozsah. Operátor NxFx tak libovolnému pojmu Fξ přiřadí množinu všech pojmů, které jsou s ním v relaci EQ neboli všech pojmů rovnopočetných. Symbolicky

(NX) NxFx $=_{\mathrm{Def}}$ {H; H eq F}.

Pro tento způsob definice se v dnešní matematické praxi vžil také název „definice abstrakcí“, a ve skutečnosti je používán takřka výhradně v tomto smyslu, nikoli ve smyslu DA. Jeho základní myšlenka spočívá v tom, že od původního „předmětu" *x*, nacházejícího se v oboru předmětů s definovanou ekvivalencí ~, přejdeme k novému objektu, totiž množině předmětů s ním ekvivalentních. Ta je obvykle značena jako „$[x]_\sim$" a nazývá se třída ekvivalence ~ reprezentovaná prvkem *x*. Tato definice (explicitní) abstrakcí má tedy podobu

(DX) $[x]_\sim =_{\mathrm{Def}} \{y;\, y \sim x\}$.

Příčina její obliby je zřejmá: libovolný abstraktní předmět je možné explicitně definovat nad bází jednoho množinového univerza jakožto množinu určité vlastnosti. *Přirozená čísla* jsou množiny všech rovnopočetných množin, *racionální čísla* jsou množiny dvojic – rovněž množin – čísel přirozených, *reálná čísla* jsou množiny posloupností – také množin – čísel racionálních atd. Hierarchie implicitních definic

$$\lim a^* = \lim b^* \leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N)(\forall p > N)(|a_p - b_p| < \varepsilon)$$
$$m/n = p/q \leftrightarrow mq = pn$$
$$\mathrm{N}x\mathrm{F}x = \mathrm{N}x\mathrm{G}x \leftrightarrow \mathrm{F\ eq\ G}$$

se třemi typy implicitně definovaných, a proto neeliminovatelných výrazů, se nám rázem promění v řadu teorémů, dokazatelných (viz dále) z explicitních definic výrazů na levé straně. Problém zůstává jediný: co za abstraktní předmět je množina resp. fregovský průběh hodnot.

Odpověď lze samozřejmě tušit: je to onen hledaný „logický předmět", Frege ji ale v *Grundlagen* odsouvá stranou s tím, že rozsah pojmu lze v podstatě užívat stejným způsobem jako samotný pojem (§68), i když poněkud nesměle tvrdí, že pojem narozdíl od rozsahu pojmu nemusí mít extenzionální kritéria identity, daná definicí ($=^3$). Extenzionální kritérium Frege tiše využívá v důkazu Humova principu, tj. původní implicitní definice čísla, z nynější definice explicitní. Připomeňme si, že HP má formu

$$\mathrm{N}x\mathrm{F}x = \mathrm{N}y\mathrm{G}y \leftrightarrow \mathrm{F\ eq\ G},$$

z níž po dosazení podle (NX) a notace z (DX) dostáváme

$$[\mathrm{F}]_{\mathrm{EQ}} = [\mathrm{G}]_{\mathrm{EQ}} \leftrightarrow \mathrm{F\ eq\ G},$$

což máme nyní dokázat. Podle Frega (§73) k důkazu implikace $\leftarrow$ stačí, ukážeme-li, že za uvedeného předpokladu F eq G platí ekvivalence

$$H \text{ eq } F \leftrightarrow H \text{ eq } G,$$

pro libovolné H. Takový úsudek je ale evidentní důsledek nevysloveného předpokladu, podle něhož se {H; H eq F} a {H; H eq G}, tj. $[F]_{EQ}$ a $[G]_{EQ}$ rovnají, jestliže pod ně spadají tytéž pojmy (objekty), tj. právě jestliže

$$(\forall X)(X \text{ eq } F \leftrightarrow X \text{ eq } G).$$

Teprve máme-li tento princip, lze HP dokázat, a to pouze z toho, že je rovnopočetnost relací ekvivalence. Důkaz lze proto zobecnit.

Zapíšeme-li nyní Fregův skrytý předpoklad obecně pro libovolné průběhy hodnot prvního řádu

$$\text{(GV)} \quad \{x; Fx\} = \{x; Gx\} \leftrightarrow (\forall x)(Fx \leftrightarrow Gx),$$

vidíme, že se opět jedná o případ definice abstrakcí, a to definice implicitní, jíž se chtěl Frege pro případ HP s pomocí NX vyvarovat. Převedl však pouze problém implicitní definice kardinálního operátoru $Nx\Phi x$ na obecnější rovinu, totiž implicitní definice množinového operátoru $\{x; \Phi x\}$, rovněž coby výrazu kategorie t/(s/t). Tento princip, v *Grundlagen* nevyřčený, zařadil Frege v *Grundgesetze* mezi své základní zákony aritmetiky jako tzv. *Grundgesetz V*. Ospravedlněním mu měla být běžná – a zdánlivě neškodná – matematická praxe, přechod od pojmu k jeho rozsahu, od ekvivalence stejných hodnot k rovnosti rozsahů (extenzí), od nevyjádřeného vztahu *funkcionální aplikace* F(N) k explicitní *relaci náležení* $N \in \{x; Fx\}$.

1.7 Russellův paradox

Srovnáme-li definici $(=^2)$, tj. definici rovnosti (prvořádového) pojmu, a GV, tj. definici rovnosti průběhu hodnot pojmu, vidíme nejprve shodu na pravé straně ekvivalence, což by nás mohlo podnítit k soudu, že se od sebe v podstatě neliší. Vyplatí se však připomenout, že v případě GV před námi neleží klasický typ definice, tj. že *definiens* není vyčerpáno pravou stranou ekvivalence. V GV jsou především – narozdíl od $(=^2)$ – definovány objekty stejného typu jaký má proměnná části *definiens* na pravé straně; výraz „F{x; Fx}“ je narozdíl od „F(Fx)“ správně utvořený a náleží kategorii t.

Ač se to na první pohled nezdá, tento zdánlivě bezvýznamný detail vede ke katastrofě. Uvažme predikát $W\xi$ takový, že

(W) $W\xi \equiv_{Def} (\exists F)(\xi = \{x; Fx\} \wedge \neg F\xi)$.

Je zřejmé, že W je řádně definován a v přirozeném přepisu znamená cosi jako: být rozsahem pojmu a nespadat pod něj.[9] Nyní lze k pojmu W utvořit příslušný průběh hodnot a ptát se, která z negací $W\{x; Wx\}$, $\neg W\{x; Wx\}$ platí. Podle zákona vyloučeného třetího by to měla být alespoň jedna, podle zákona sporu by to neměly být obě.

Předpokládejme, že platí $\neg W\{x; Wx\}$, tj.

(1) $(\forall F)(\{x; Wx\} = \{x; Fx\} \rightarrow F\{x; Wx\})$.

Specifikací proměnné F:=W dostaneme z (1) implikaci

(2) $\{x; Wx\} = \{x; Wx\} \rightarrow W\{x; Wx\}$.

Antecedent formule (2) je ovšem tautologie, aplikací pravidla *modus ponens* tedy získáme formuli $W\{x; Wx\}$, čili negaci našeho předpokladu.

Potud víme, že předpoklad neplatí. Předpokládejme tedy opak, čili

(1') $(\exists F)(\{x; Wx\} = \{x; Fx\} \wedge \neg F\{x; Wx\})$,

a uvažujme libovolný pojem F, jehož existence je v (1') tvrzena. F má stejný průběh hodnot jako W, podle GV tedy platí

(2') $(\forall x)(Fx \leftrightarrow Wx)$,

kontrapozicí

(3') $\forall x(\neg Fx \leftrightarrow \neg Wx)$.

Podle (1') ovšem platí $\neg F\{x; Wx\}$, z (1') a (3') proto vyplývá opět negace předpokladu. Úhrnem dostáváme ekvivalenci

(WW) $\neg W\{x; Wx\} \leftrightarrow W\{x; Wx\}$.

Při jejím odvození byly použity pouze logické zákony a GV. Ten je proto možné činit za následné odvození sporu zodpovědný. V čem ale byla chyba?

[9] Fregův systém nemá být teorií množin, ale logikou, nedisponuje tedy relací náležení jakožto základní relací, ale definuje ji jako

$x \in y \leftrightarrow \exists F(y = \{z; Fz\} \wedge Fx)$.

Ztotožněním proměnných lze pak získat jednomístný predikát $\xi \in \xi$ resp. $\xi \notin \xi$, vytvořit průběh hodnot $\{x; x \notin x\}$ a postupovat více méně výše popsaným způsobem (predikát $W\xi$ samozřejmě není totožný s predikátem $\xi \notin \xi$, je mu ale podřazený, tj. jejich rozsahy jsou ve vztahu inkluze).

Russell upozornil na to, že máme-li chápat GV jako prostředek zavedení nových předmětů $\{x; Fx\}$ do univerza, dopouštíme se tím, že tyto *nové* předměty připouštíme jako hodnoty předmětné proměnné z pravé strany ekvivalence – tedy části *definiens* – *bludného kruhu*: abychom věděli, zda platí $\{x; Fx\} = \{x; Gx\}$, musíme totiž již vědět i to, zda $F\{x; Fx\} \leftrightarrow G\{x; Fx\}$. Russellovými slovy: objekt je definován pomocí totality, která jej již obsahuje.

Russellova poznámka se samozřejmě týká všech definic abstrakcí příslušného tvaru, tj. tzv. *pojmové abstrakce*

$$\#F = \#G \leftrightarrow F \sim G,$$

kde „F" a „G" reprezentují pojmy prvního řádu a „#F", „#G" předměty, které pod ně spadají resp. mohou spadat. Prohlédneme-li si ale znovu odvození ekvivalence (WW), obecně tedy formule

$$\neg W(\#W) \leftrightarrow W(\#W)$$

pro W patřičně modifikované, vidíme, že implikace $\leftarrow$ závisí na konkrétní podobě DA. Nahradíme-li např. GV skrze HP, tj. definujeme-li namísto průběhů hodnot čísla, dostaneme se k formuli

$$(\exists F) \quad (NxWx = NxFx \rightarrow \neg F(NxWx)).$$

Kritické místo nyní spočívalo v nahrazení rovnosti $NxWx = NxFx$ definující ekvivalencí a úsudkem na $\neg W(NxWx)$. Onou ekvivalencí ale v tomto případě není totožnost hodnot pojmů, ale jejich rovnopočetnost. Z toho, že pod dva pojmy spadá stejný počet předmětů, ale v žádném případě neplyne, že pod ně spadají předměty stejné. Odvození negace, a tedy ani odvození sporu nelze – alespoň tímto způsobem – opakovat.

Poukazem na tento specifický rys odvození Russellova paradoxu z principu pojmové abstrakce můžeme první část této statě ukončit. Právě v něm se totiž ukázal být onen pevný výchozí bod, z něhož šlo Russellovu diagnózu „bludného kruhu" vykázat jako (v jistém ohledu) neadekvátní, přemrštěnou a domněle ztraceného pacienta resuscitovat do stavu, v němž se může těšit širší filosofické pozornosti.

Katedra logiky
Filosofická fakulta Karlovy Univerzity
Celetná 20
116 42 Praha 1

LITERATURA

BOOLOS, G. (1998): *Logic, Logic, and Logic.* Harvard University Press, Cambridge, Mass.

COFFA, A. (1991): *The Semantic Tradition from Kant to Carnap.* Cambridge University Press, Cambridge.

DEDEKIND, R. (1888): *Was sind und was sollen die Zahlen.* Vieweg, Braunschweig.

DUMMETT, M. (1991): *Frege – Philosophy of Mathematics.* Duckworth, London.

FREGE, G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Nebert, Halle.

FREGE, G. (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau.

FREGE, G. (1893): *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band.* Pohle, Jena.

HALE, B. – WRIGHT, C. (2001): *The Reason's Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics.* Oxford University Press, Oxford.

KOLMAN, V. (2002): *Logika Gottloba Frega.* Filosofia, Praha.

KOLMAN, V. (2004): Logicismus a moderní logika. In: *Organon F* 3, 15 – 31.

LORENZEN, P. (1962): Gleichheit und Abstraktion. In: *Ratio* 4.

LORENZEN, P. (1962): *Metamathematik.* Bibliographisches Institut, Mannheim.

POTTER, M. (2000): *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap.* Oxford University Press, Oxford.

STEKELER-WEITHOFER, P. (1986): *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft.* De Gruyter, Berlin.

WRIGHT, C. (1983): *Frege's Conception of Numbers as Objects.* Aberdeen University Press, Aberdeen.