

Interpretace znalosti v substrukturálních rámcích¹

ONDREJ MAJER

Oddělení logiky. Filosofický ústav Akademie věd České republiky, v.v.i.
Jilská 1. 110 00 Praha 1. Česká republika
majer@flu.cas.cz

MICHAL PELIŠ

Oddělení logiky. Filosofický ústav Akademie věd České republiky, v.v.i.
Jilská 1. 110 00 Praha 1. Česká republika
pelis.michal@gmail.com

ZASLÁN: 07-12-2012 • AKCEPTOVÁN: 27-02-2013

Abstract: The article deals with problems of standard epistemic logics with a special attention to the context of scientific reasoning and to the problem of logical omniscience. The authors discuss various solutions of these problems and propose a new one based on the framework of substructural logics.

Keywords: Epistemic logic – logical omniscience – knowledge – substructural logics.

1. Úvod

Logika, která se snaží modelovat znalosti a usuzování se znalostmi, obvykle stojí před dvěma problémy. Prvním je způsob reprezentace znalostí ve formálním systému, druhým problémem je, jak analyzovat úsudky, které nad těmito znalostmi probíhají. Velmi často se tyto dva problémy řeší odděleně, buď se pracuje se znalostmi (a změnami znalostí), zde jde především o epistemické a dynamické logiky, nebo se logikové zaměřují na relaci dů-

¹ Práce na textu byla podpořena grantem GAČR č. P401/10/1504.

sledku, a pak jde především o různé varianty nemonotónních logik. Určitým pokusem o řešení obou problémů současně jsou epistemické logiky, které se budují nad slabšími systémy, než je klasická logika. Prezentace jednoho takového systému je obsahem tohoto článku. Slabším systémem zde budeme rozumět logiky substrukturální, které právě mění chování důsledkové relace. V literatuře se již můžeme setkat s kombinací modálních a substrukturálních logik, viz např. Wansing (2002), náš přístup je nový v tom, že využívá k definici epistemické modalit existující relace v relační sémantice substrukturálních logik. V Majer – Peliš (2009) jsme poprvé navrhli tento přístup a využili ho pro zavedení reprezentace znalosti nad relevantní logikou. Formální systém epistemické relevantní logiky s úplnou axiomatikou lze najít v Bílková et al. (2010). Ukázalo se, že můžeme o tomto přístupu uvažovat v mnohem obecnějším rámci a lze vytvořit epistemickou logiku pro další substrukturální systémy.

V následujícím textu podrobně rozebíráme, proč považujeme substrukturální rámec za vhodnou reprezentaci znalosti. Prototypickým příkladem je pro nás vědecké usuzování, které pracuje s daty (často rozpornými a neúplnými) a s hypotézami. Nejprve zavedeme standardní reprezentaci znalosti pomocí modální logiky $S5$ a rozebíráme problémy, na které tento přístup naráží (logická vševědoucnost a usuzování s klasickou relací důsledku). Poté zavádíme substrukturální logiky a jejich relační sémantiku. Nad tímto rámcem pak definujeme epistemický operátor. Tento operátor není dán relací epistemické alternativy mezi možnými světy jako ve standardním přístupu, ale relací informačního zdroje mezi informačními stavy. Text je převážně zaměřen na interpretaci navrhovaného systému, a proto jsme omezili použití formálního aparátu na nezbytné minimum. Úplný popis formálního systému lze nalézt v připravovaném textu Bílková et al. (2013).

2. Standardní epistemické logiky

Za počátek využití moderního logického aparátu v epistemologii se obvykle považuje kniha Jaakko Hintikka *Knowledge and Belief* (Hintikka 1962), ve které se poprvé objevuje myšlenka reprezentovat epistemické pojmy jako znalost nebo přesvědčení pomocí aparátu moderní modální logiky. Přestože se formální metody práce se znalostmi vyvíjely různými směry (belief revision, dynamic doxastic logic), zůstává reprezentace znalostí pomocí modálních logik stále populární, a to i v oblasti současných aplikací v umělé inteligenci (např. multiagentní systémy).

Důvodem této popularity je na jedné straně názornost a přehlednost sémantiky, pro kterou se vžil název *kripkovská*, a na druhé straně je to možnost využívat rozvinutého formálního aparátu modálních logik. Základem kripkovské sémantiky je pojem možného světa. Představme si, že popisujeme svět pomocí nějakého formálního (logického) jazyka. Možný svět je entita, která každé formuli dává hodnotu **pravda** (formule je v daném světě pravdivá) nebo **nepravda**. Možné světy jsou propojeny (binární) relací, která se v modálních logikách nazývá relace *dosazitelnosti*; v epistemickém kontextu se používá termín *relace epistemické alternativy*. Aktuální svět w je v relaci se světem v právě, když naše znalosti připouštějí, že by mohl být aktuálním světem i v .

K reprezentaci znalostí se obvykle používá epistemická varianta modální logiky S5. Jedná se vlastně o rozšíření klasické výrokové logiky o modální operátor K (z anglického *knowledge*). Je-li φ formulí jazyka logiky, pak zápisem $K\varphi$ označujeme, že „epistemický subjekt ví φ “, což v kripkovských modelech znamená, že φ je pravdivé ve všech epistemických alternativách (možných světech). Již od počátku byly epistemické reprezentace založené na systému S5 podrobovány kritice. Hlavní námitkou je, že epistemické subjekty reprezentované tímto způsobem vykazují značný stupeň idealizace. Epistemická varianta modální logiky S5 splňuje totiž následující axiomy a pravidla:

(T)	$K\varphi \rightarrow \varphi$	pravdivost znalosti
(4)	$K\varphi \rightarrow KK\varphi$	pozitivní introspekce
(5)	$\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$	negativní introspekce
(K)	$K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K\varphi \rightarrow K\psi)$	
(Nec)	$\varphi / K\varphi$	pravidlo necesitace
(Mon)	$(\varphi \rightarrow \psi) / (K\varphi \rightarrow K\psi)$	pravidlo monotonie
(Con)	$(\varphi \leftrightarrow \psi) / (K\varphi \leftrightarrow K\psi)$	pravidlo kongruence

Axiom (T) říká, že co je známo, je také pravdivé, a je přijímán ve všech logikách reprezentujících znalost. Axiomy (4) a (5) jsou varianty introspekce. Epistemický subjekt tak reflektuje svou znalost i neznalost, je si své znalosti, resp. neznalosti, vědom. Zbývající axiomy resp. pravidla platí ve všech modálních logikách využívajících kripkovskou sémantiku, jak ale uvidíme v následujícím oddíle, jsou problematické z hlediska tzv. *logické vševěd-doucnosti*. Axiom (K) v sobě skrývá modální variantu pravidla Modus Ponens („znám-li implikaci i antecedent implikace, pak znám i její konsekvent“). Pravidlo (Nec) vyjadřuje, že epistemický subjekt zná všechny teoré-

my dané logiky. Pravidla (Mon) a (Con) již jen dodávají, jak se chová znalost v případě, kdy jeden výrok logicky vyplývá z druhého.

3. Problémy standardních epistemických logik

V tomto oddíle rozebereme podrobněji dva významné problémy standardních epistemických logik: problém tzv. logické vševědoucnosti a problém usuzování modelovaný klasickou relací důsledku. U logické vševědoucnosti rovnou zmíníme některá významná řešení. Druhý z problémů nám pak připraví půdu pro zavedení substrukturálních logik.

2.1. Logická vševědoucnost

V literatuře se rozlišuje několik variant logické vševědoucnosti. Standardně se za základní typ logické vševědoucnosti považuje uzavřenost na relaci logického důsledku (pokud zná subjekt nějaká fakta, pak zná i všechny logické důsledky těchto faktů):

(VšD) Pokud platí $K\alpha$ a z α vyplývá β , pak platí i $K\beta$.

Zvláštní variantou (VšD) je znalost všech teoremů (tj. formulí odvoditelných v daném logickém systému):

(VšT) Pokud je α teoremem, pak platí $K\alpha$.

Za speciální případ vševědoucnosti můžeme považovat i uzavřenost na faktické důsledky; pokud subjekt v nějakém stavu ví, že platí α , a ví, že ($\alpha \rightarrow \beta$), pak také ví, že β . Toto pravidlo, které budeme nazývat Modální Modus Ponens (MMP), nevyplývá z předchozích dvou, ale z (MMP) a (VšT) už vyplývá (VšD).

(MMP) Pokud $K\alpha$ a $K(\alpha \rightarrow \beta)$, pak $K\beta$.

Jaký je vztah standardních modálních axiomů k různým formám vševědoucnosti? Pokud platí všechny axiomy uvedené v tabulce výše (a ty platí ve všech standardních epistemických logikách), pak platí i všechny formy vševědoucnosti. Protože se budeme zabývat slabšími systémy, ve kterých některé z těchto axiomů platit nebudou, rozebereme si příslušnou korespondenci podrobněji.

Znalost všech platných formulí (VšT) je přímo obsahem pravidla (Nec), které říká, že cokoli je logicky platné, je známo. (MMP) je vlastně totéž jako axiom (K) formulovaný jako pravidlo. Jak už jsme uvedli, (VšD) vyplývá z pravidla necesitace společně s axiomem (K). Vyplývá také ze samotného pravidla monotonie (Mon). Platnost (Mon) ale nevynucuje ani vševědoucnost vzhledem k teorémům (VšT) ani (MMP). Pravidlo kongruence (Con) vyplývá samozřejmě z (Mon) a v klasické epistemické logice také z pravidla (Nec) a z axiomu (K). (Con) charakterizuje vlastně sémantický přístup ke znalostem. Pokud jsou nějaká dvě tvrzení platná ve stejných možných světech (mají stejné intenze), pak znalost jednoho je ekvivalentní znalosti druhého.²

V oddíle 4 uvidíme, že v substrukturálních systémech se projevívá částečná nezávislost jednotlivých typů vševědoucnosti. V systémech, kde nebudou platit axiomy (K) a (Nec), nebude platit ani (MMP) a (VšT).

Požadavky vševědoucnosti se na jednu stranu zdají být přirozenou součástí požadavku racionality, který na epistemické subjekty klademe (subjekt by měl umět „logicky uvažovat“). Na druhou stranu, dovedeno do důsledku, předpokládají, že každý subjekt disponuje schopnostmi přesahujícími znalosti špičkových odborníků z oblasti logiky. Najít v tomto rozporu mezi vševědoucností a nevědoucností střední cestu je poměrně složité. Z logického hlediska můžeme otázku (míry) vševědoucnosti chápat jako problém uzávěrových vlastností: vzhledem k jakým operacím resp. pravidlům by měla být znalost uzavřena? Pokud použijeme na nějakou (faktickou) znalost mašinérii logického důsledku, dostaneme tím kromě věcí, které jsou intuitivně vzato užitečné, také spoustu „balastu“. Uzávěr vzhledem ke konjunkci je poměrně přirozený – pokud máme $K\varphi$ a $K\psi$, pak je přirozené požadovat znalost jejich konjunkce $K(\varphi \wedge \psi)$. Naproti tomu uzávěr $K\varphi$ vůči disjunkci s libovolnou formulí ψ nám evidentně nic užitečného nepřináší, přestože se jedná o (klasicky) platnou operaci. Respektive z jiného pohledu: uzávěr vůči pravidlu Modus Ponens je druh jednoduchého logického úsudku, který jistě užitečný je, ale úsudek vyžadující sto aplikací Modus Ponens už je evidentně za hranicemi možností běžného epistemického subjektu.

Literatura řeší problém vševědoucnosti různými způsoby. My zde některá řešení pouze zmíníme bez hlubšího rozboru a technických podrobností; podrobněji viz Fagin et al. (2003), Duc (2001). V principu je můžeme roz-

² Sémantický přístup pak vede k epistemickým paradoxům typu *Petr ví, že $1+1=2$ právě, když Petr ví, že platí Velká Fermatova věta*. Tento typ paradoxů lze řešit v hyperintenzionálních systémech (viz. např. Duží et al. 2005).

dělit na systémy pracující s pojmem explicitní znalosti a systémy, které chápou usuzování jako proces a které v nějakém smyslu zohledňují výpočetní složitost příslušného úsudku.

3.2. Řešení logické vševědoucnosti

3.2.1. Explicitní znalost

Systémy reprezentace znalostí zahrnující vševědoucnost jsou někdy nazývány logiky *implicitní znalosti* – reprezentují potenciální znalost, kterou by subjekt mohl dosáhnout, kdyby měl neomezené logické schopnosti a neomezený čas je aplikovat. Jedno z řešení je založeno na myšlence, že pokud je něco znalostí, měl by si toho být subjekt vědom. Zavádí se proto operátor *explicitní znalosti*, který prvek uvědomění zahrnuje – aby něco bylo explicitní znalostí, musí to být potenciálně dosažitelné (tedy být implicitní znalostí) a subjekt si to musí (explicitně) uvědomovat. Formálně se v systémech explicitní znalosti zavádí operátor *uvědomění* (*awarness*), který každému možnému světu w přiřadí množinu formulí $A(w)$, kterých si je v daném světě subjekt vědom. Znalostí je pak to, co je pravdivé ve všech alternativách a čeho si je zároveň subjekt vědom. Explicitní znalost X se pak definuje v možném světě w jako:

$$w \models X\varphi \text{ právě tehdy když } w \models K\varphi \text{ a zároveň } \varphi \in A(w)$$

Blokuje se tím nejen (VšD), ale i ostatní uzávěrové vlastnosti (včetně neproblematické uzavřenosti na konjunkci). Uvědomění je externí, předem daný parametr, pro nějž nejsou vymezena žádná kritéria, podle kterých by se měla potenciálně poznatelná tvrzení rozdělovat na uvědomělá a na ta ostatní.

3.2.2. Scott–Montagueova sémantika

Myšlenka explicitního vyčlenění tvrzení, která vstupují do epistemického procesu, je dovedena do důsledků ve Scott–Montagueově sémantice.³ Hlavní myšlenkou tohoto řešení je explicitní reprezentace znalosti, která není vázána na určitý subjekt, ale na určitý možný svět: každému možnému světu je přiřazena množina propozic (zvaná *okolí* daného světa) reprezentující tvrzení, která jsou v daném možném světě známa. Formule je znalostí pokud je jí příslušná propozice prvkem této množiny. Na okolí nejsou kladeny

³ V anglicky psané literatuře též *neighbourhood semantics*.

žádné podmínky (podobně jako na relaci uvědomění), neplatí pro ně (K) ani (Nec), jediné pravidlo, které platí je (Con). Pokud jsou dvě tvrzení ekvivalentní, mají stejné extenze (oběma odpovídá stejná propozice), takže pokud je v daném okolí možného světa jedna, musí tam být i druhá.

3.2.3. Výpočetní složitost

Do této oblasti spadají řešení, která vševědoucnost připouštějí, ale určitým způsobem ji stupňují. Subjekt se v principu může dostat ke všem logickým důsledkům svých znalostí, ale stojí ho to nějaký čas, resp. výpočetní kapacitu. Různé systémy se pak liší v tom, jak tyto odvozovací jednotky zachycují. Např. v logice zdůvodnění (justification logic) se předpokládá, že každé tvrzení vyjádřené formulí je nějakým způsobem zdůvodněné. Atomické formule jsou zdůvodněné zdůvodňovacími termy (justification terms), které se při použití pravidel kombinují. U každé znalosti pak máme explicitní zápis jejího zdůvodnění, viz Artemov (2008).

Jiné systémy nejdou při zápisu složitosti do takových detailů a zaznamenávají jen počet použití logických pravidel. Například

$$K\varphi \wedge \Delta K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Delta \Delta K\psi$$

říká, že pokud subjekt zná φ a znalost $(\varphi \rightarrow \psi)$ vyžaduje jeden výpočetní krok (kódovaného výskytem symbolu Δ), pak se může dopracovat ke znalosti ψ po dvou výpočetních krocích. Obdobným řešením je spojení klasické epistemické logiky a logiky temporální (Duc 2001).

3.2.4. Nestandardní možné světy

Stranou uvedeného dělení na přístupy používající explicitní znalost a přístupy výpočetní stojí řešení založené na tzv. nestandardních možných světech. Tyto světy můžeme chápat jako zvláštní možné světy kripkovského modelu; mohou být neúplné (může se stát, že v nich nějaký fakt není ani platný ani neplatný) či sporné (nějaký fakt je v nich platný a zároveň neplatný). Má smysl uvažovat o světech, kde něco platí a zároveň neplatí? Pokud pojímáme nestandardní možné světy epistemologicky, je takováto situace snadno představitelná. Například, když o nějakém jevu máme rozporné nebo neúplné informace. Znalost se v těchto modelech definuje stejně jako v klasickém modelu: jako pravdivost ve všech epistemických alternativách epistemického subjektu, což znamená, že znalostí je to, co subjekt „vidí“ ve všech dosažitelných světech (standardních i nestandardních). Naproti tomu

o logických zákonech hovoříme jen vůči standardním možným světům, tedy tautologie systému nemusí patřit mezi znalosti epistemického subjektu (Fagin et al. 2003, Duc 2001).

Diskusi o výhodách a nevýhodách jednotlivých řešení se zabývá řada autorů a není účelem tohoto textu je zde rozebírat. S určitou mírou zjednodušení by se dalo říci, že řešení typu explicitní znalost řeší problém vševedoucnosti pomocí vnějšího parametru, který „vykrajuje“ z implicitní (potenciální) znalosti to, co se znalostí skutečně stane. Nebere přitom v úvahu to, jak komplikovaná může tato znalost být. Omezení implicitní znalosti tedy není dáno logickými, ale mimologickými prostředky, které bychom v určitých kontextech mohli chápat jako pragmatické – jako předpis na co se má subjekt v dané situaci zaměřit, resp. co ze širokého spektra potenciální znalosti se má prověřit. Řešení typu výpočetní složitost naopak s každou znalostí uchovávají informaci, jak složité bylo její dosažení. Její určitou nevýhodou tedy je často nepřehledná notace, kdy informace o složitosti může narůst do značného objemu.

Poznamenejme na závěr, že uvedené typy řešení jsou v principu aplikovatelné i v jiných logických systémech. Pokud bychom nepoužili jako základ epistemického systému klasickou modální logiku, ale jiný systém, jehož sémantika využívá entity podobné možným světům, můžeme na nich samozřejmě definovat jak operátor uvědomění, tak i modality zachycující složitost.

3.3. Usuzování v epistemických modelech

Když používáme standardní epistemickou logiku S5 jako model znalosti, musíme si současně uvědomit, jakým způsobem tato logika formalizuje usuzování. I když se budeme pohybovat mezi exaktními vědci, jejich úsudky, které při práci provádí, nebudou často korespondovat s vlastnostmi, jež na úsudky klade klasická logika.

Představme si vědce ve fyzikální laboratoři při experimentu, ve kterém ostřeluje stříbrnou desku alfa částicemi. Provádí pozorování, při kterých shromáždí empirická data: *(V právě prováděném experimentu) ostřelují stříbrnou desku alfa částicemi. (V právě prováděném experimentu) se z desky emituje foton.* Fakta obvykle hrají roli hodnot nějakých nezávislých a závislých proměnných. Úsudky, které vědci provádí, jsou tak složeny z velkého množství těchto faktů získaných četbou, studiem a měřením. Navíc musí neustále zohledňovat nově přicházející data (fakta). Empirické metody s sebou nesou možnost chyb při měření. K našemu vědci se tak dostávají i protichůdné výsledky. Jak jsme ale právě řekli, nové údaje mohou nést novou informaci a mohou i být s těmi předchozími v rozporu. Logika modelující vědecké

usuzování by tedy měla zacházet opatrně s přidáváním informací. To souvisí i s tzv. *paradoxy implikace*. Např. formule $\varphi \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)$ říká, že φ „odvodím“ z φ , i když si přidám nerelevantní formuli β . Formule β tak „oslabuje“ předpoklady. Podobně je problém s rozpornými daty. V klasické logice platí, že „ze sporu plyne cokoli“, v implikační podobě bychom mohli napsat $(\beta \wedge \neg\beta) \rightarrow \varphi$, i když získaná sporná data nijak nesouvisí s tím, co odvozujeme. Přestože neztotožňujeme implikaci a relaci důsledku, mají oba symboly pro modelování vědeckého usuzování význam. Relaci důsledku modelujeme usuzování a implikaci můžeme modelovat určitý typ kauzální závislosti mezi fakty. Náš vědec tak může na základě získaných empirických faktů formulovat tzv. *asociační pravidla*⁴ jako pozorovanou souvislost dvou jevů (*Jestliže ostřelují stříbrnou desku alfa částicemi, pak se z desky emituje foton*). Asociační pravidla se blíží svou podobou hypotézám v implikační podobě. Hypotézy mají obvykle podobu obecného tvrzení, ve kterém je explicitně specifikován parametr místa a času, v našem příkladě by se měly navíc vymezit standardní podmínky experimentu.

Na počátku sběru dat nemůže vědec explicitně žádné z potenciálně platných asociačních pravidel vyloučit, má tedy velké množství nepotvrzených „hypotéz“, které postupně, jak se mu hromadí empirická data, potvrzuje nebo vyvrací. Tím se dostáváme k důležitému rozlišení. Jedna věc je sbírání dat (faktů) a práce s nimi (např. v podobě asociačních pravidel) a druhá věc je, že jen některé výsledky měření jsou přijaty jako potvrzené a mohou být zařazeny do databáze znalostí, kterými vědec disponuje. Empirické metody jsou často plny různých zkreslení a chyb. V klasické logice nezáleží na tom, kolikrát jsem získaná data a informace použil ani v jakém pořadí. Když si však představíme, že data získáváme z nějakých zdrojů, mohou být jejich pořadí i počet významné. Takové situace se dají dobře modelovat v substrukturálních rámcích.

4. Substrukturální logiky

Pod pojem substrukturální logiky řadíme systémy, které oslabují některé podmínky kladené na klasickou relaci důsledku. Název substrukturální se vztahuje k pravidlově orientovaným prezentacím logických systémů, tedy dů-

⁴ Tento termín se standardně používá v databázových systémech v souvislosti s tzv. dobýváním z dat (data mining).

kazovým systémům. Ty jsou zadány pomocí pravidel pro logické konstanty (např. pravidla pro zavedení a eliminaci spojek v systémech přirozené dedukce) a strukturální pravidla, která určují vlastnosti relace odvozování v daném systému. Logiky vzniklé vynecháním některého (resp. některých) strukturálních pravidel se pak nazývají substrukturální. Odstraňování strukturálních pravidel není jen formální hra, jak by se na první pohled mohlo zdát, zastánci substrukturálních logik pro to mají více či méně ospravedlnitelné zdůvodnění (Restall 2000, Paoli 2002). Některá z nich tu stručně nastíníme.

Nebudeme zde zavádět pojem důkazového systému, pro stručné nastínění významu strukturálních pravidel použijeme standardní definici relace důsledku. Předpokládejme, že Γ je množina premis (formulí) a φ , ψ jsou výroky (formule); zápis $\Gamma \models \varphi$ pak budeme číst jako „výrok φ je důsledkem množiny premis Γ “.

Pravidlo oslabení (*weakening*) odpovídá monotonii relace důsledku:

$$\Gamma \models \varphi / \Gamma, \psi \models \varphi$$

Podle něj se důsledek nemění, pokud ke stávajícím premisám přidáme libovolné další. V literatuře je celá řada příkladů, proč by toto pravidlo nemělo platit. Hlavním důvodem jsou tzv. paradoxy implikace zmiňované výše. Důsledek tak zůstává platný i po přidání premis, které nejsou *relevantní* pro daný závěr. To neodpovídá intuici, že v procesu usuzování by měla nějaká souvislost mezi premisami a závěrem existovat. Vynechání pravidla oslabení vede k relevantním logikám (*relevance* resp. *relevant logics*).

Pravidlo kontrakce je důsledkem předpokladu, že pracujeme s množinami premis a nezáleží tedy na tom, kolikrát daný předpoklad při odvození závěru použijeme:

$$\Gamma, \psi, \psi \models \varphi / \Gamma, \psi \models \varphi$$

Tento předpoklad je neproblematický v kontextu matematického usuzování, můžeme si dovolit použít nějaký předpoklad, kolikrát chceme. Budeme-li se však dívat na odvozování jako na výpočetní proces, kdy každá operace zabere nějaký čas, může být vícenásobné použití dané premisy chápáno jako „dražší“ a na počtu těchto použití bude záležet. Příkladem logik, které odmítají pravidlo kontrakce, jsou logiky pracující právě s pojmem zdroje (lineární logika) a logiky pracující se stupni pravdivosti (fuzzy logiky).

Pravidlo záměny je stejně jako kontrakce důsledkem předpokladu, že pracujeme s množinami, tedy že nezáleží na pořadí premis:

$$\Gamma, \psi, \chi \models \varphi / \Gamma, \chi, \psi \models \varphi$$

Typickým příkladem, kdy je tento předpoklad problematický, jsou logiky popisující akce – postup, v jakém skládáme data, totiž může podstatně změnit výsledek (*upadl a vstal*).

Zásadní otázkou však je, jaký je význam strukturálních pravidel v epistemickém kontextu. V předchozí sekci jsme již diskutovali, co lze považovat za zásadní při vědeckém usuzování. V této otázce se skrývá ještě další: chceme vytvořit jeden systém použitelný pro všechny epistemické situace nebo spíše řadu systémů, které budou sdílet určité základní vlastnosti? Jinými slovy budeme v epistemické oblasti singularisty nebo pluralisty?⁵ Řešení, které se snažíme přiblížit v tomto článku, se ubírá druhou cestou. Mohli bychom zde odkázat na analogii s modálními logikami. Podobně jako pojem „nutnost“ může v různých kontextech vykazovat různé vlastnosti zachycené různými systémy, mohou se lišit v závislosti na oblasti použití i vlastnosti pojmu „znalost“. S tím souvisí i problém strukturálních pravidel – nebudeme zde obhajovat jednoznačné důvody pro přijetí resp. odmítnutí jednotlivých strukturálních pravidel, ale vybudujeme systém, který bude jistým způsobem modulární. Základní epistemická modalita bude definována nad rámcem neobsahujícím žádná strukturální pravidla. Tento systém pak bude možno o jednotlivá pravidla rozšiřovat, aniž by se vlastnosti epistemické modalit (až na výjimky) zásadně měnily.

4.1. Relační sémantika pro substrukturální logiky

V tomto oddíle vyložíme základní principy relační sémantiky substrukturálních logik. Budeme přitom vycházet z kripkovské sémantiky pro modální logiky a hledat analogie k našemu motivačnímu příkladu z vědeckého prostředí.

Podobně jako jsou kripkovské rámce založené na pojmu možného světa, bude pro nás výchozím pojmem *informační stav*. Určitý výrok může být v daném informačním stavu pravdivý nebo nepravdivý. Může zde nastat situace, se kterou jsme se setkali u nestandardních možných světů. Informační stav může být neúplný nebo nekonzistentní. To umožňuje realistické modelování našeho motivačního příkladu – vědecká (stejně jako jiná) data jsou často neúplná a mohou být i nekonzistentní (výpadky experimentální aparatury, chyby ve výpočtech). Informační stav můžeme chápat jako soubor

⁵ Obecně o logickém pluralismu též Beal – Restall (2006).

dat, která má epistemický subjekt (vědec) v daném momentě (času a prostoru) bezprostředně k dispozici.

Epistemický subjekt může přecházet od jednoho stavu k jinému. Předpokládáme při tom, že se jeho informační stavy nemohou měnit libovolně, ale jen od stavů informačně chudších ke stavům informačně bohatším. Modelujeme tedy proces hromadění informací – veškerá informace z dřívějších stavů se zachovává ve stavech budoucích. Více informace neznamená nutně vyšší epistemickou kvalitu. Pokud bychom chtěli modelovat složitější epistemické procesy typu učení, museli bychom do modelu zahrnout i revizi dřívějších informací ve světle nových faktů. Pro zachycení dynamických epistemických procesů bychom však potřebovali mnohem silnější formální prostředky

Pokud bychom se zaměřili na sledování jednoho konkrétního procesu vývoje jednoho epistemického subjektu, museli bychom jej reprezentovat lineárním uspořádáním (daný epistemický subjekt se může nacházet v daném čase pouze v jediném informačním stavu). Náš model ale nebude zachycovat jeden konkrétní subjekt, ale různé možné směry, jakými se daný informační stav může rozvíjet. Proces tedy budeme modelovat relací, která je pouze částečným uspořádáním a toto uspořádání budeme nazývat *perzistence*.⁶

Nyní se zaměříme na operace, které budeme s fakty v informačních stavech (přesněji, s jim odpovídajícími tvrzeními) provádět. Podobně jako v kripkovské sémantice budou tyto operace lokální, závislé pouze na stavu, ve kterém tato operace probíhá (standardní konjunkce a disjunkce) a modální, závislé na určitém modálním okolí (v modálních logikách je to např. striktní implikace). Konjunkce a disjunkce⁷ budou fungovat stejně jako v modálních logikách (konjunkce je pravdivá, pokud jsou v daném informačním stavu pravdivé oba její konjunkty, a disjunkce je pravdivá, pokud je pravdivý alespoň jeden disjunkt).

První „nelokální“ spojkou bude implikace. Substrukturální implikace není redukovatelná na materiální. Můžeme se na ni dívat jako na silnou implikaci v modálních logikách. Striktní (modální) implikace $\Box(\alpha \rightarrow \beta)$ je v daném možném světě w pravdivá, pokud je příslušná materiální (lokální)

⁶ Tento termín se používá např. v kripkovských modelech pro intuicionistickou logiku.

⁷ Substruktuální logiky mají typicky dvě sady spojek odpovídající konjunkci a disjunkci, těm klasickým se říká ‚slabé‘ nebo ‚svazové‘. V tomto textu se druhým typem (silné, grupové) těchto spojek nebudeme zabývat, proto budeme příslušné adjektivum vynechávat.

implikace ($\alpha \rightarrow \beta$) pravdivá v každém modálním okolí w , tedy ve všech možných světech dosažitelných z w . V substrukturálních logikách je definice prakticky stejná – jenom nahradíme pojem modálního okolí daného binární relací dosažitelnosti pojmem okolí daného ternární relací *relevance*. Smysluplná neformální interpretace této relace bývá považována za základní problém použitelnosti relační sémantiky pro substrukturální logiky.⁸ My se zde tímto problémem nebudeme zabývat, nabídneme vlastní interpretaci navazující na náš motivační příklad. Každou dvojici informačních stavů y, z , která je v relaci *relevance* s aktuálním stavem x , můžeme chápat jako stavy odpovídající nějakému fyzikálnímu experimentu: y („antecedentní stav“) obsahuje počáteční data experimentu (*Ostřelujeme stříbrnou desku alfa částicemi*), zatímco z („konsekventní stav“) obsahuje jeho výsledná data (*Emituje se foton*).

Relevantní implikace pak odpovídá odvození určitého asociačního pravidla: pokud v aktuálním stavu pozoruji, že při *každém* provedení experimentu (tedy pro každou dvojici antecedentní–konsekventní stav spojenou relací *relevance* s aktuálním stavem x) je každé pozorování α (*Ostřelujeme stříbrnou desku alfa částicemi*) v antecedentním stavu následováno pozorováním β (*Emituje se foton*) v konsekventním stavu, pak v aktuálním stavu x platí pravidlo (hypotéza) *Jestliže ostřelujeme stříbrnou desku alfa částicemi, pak se emituje foton* reprezentované substrukturální implikací ($\alpha \rightarrow \beta$).

Naše pojetí implikace jako (asociačního) pravidla, by samozřejmě mohlo být problematizováno tzv. paradoxy implikace. Neradi bychom například z pravidla *Jestliže ostřelujeme stříbrnou desku alfa částicemi, pak se emituje foton* dostali pravidlo *Jestliže ostřelujeme stříbrnou desku alfa částicemi a laboratorní myši sežraly zkažený sýr, pak se emituje foton*. Jak jsme zmínili, paradoxy implikace řeší systémy neobsahující strukturální pravidlo oslabení.⁹

Další modální spojkou bude negace. Striktní negaci $\Box(\neg\alpha)$, můžeme chápat jako negaci, která platí v celém modálním okolí aktuálního světa w . Mohli bychom ji formulovat jako *není možné* α ($\neg\Diamond\alpha$); v okolí w není svět, ve kterém by platilo α . Tuto definici můžeme téměř beze změny použít, nahradíme jen okolí dané relací dosažitelnosti okolím odpovídajícím binární relací *kompatibility*. V daném stavu w tedy platí $\neg\alpha$, pokud neexistuje stav v kompatibilní s w , ve kterém platí α . Poznamenejme, že na rozdíl od modálních rámců to nemusí znamenat, že v každém kompatibilním stavu platí

⁸ Viz např. *channel theory*, Restall (2005). Jsou i pokusy nahradit ternární relace binárními, viz Sedlár (2012).

⁹ Podrobněji v češtině např. Childers – Majer (2010).

$\neg\alpha$. Stačí, když je kompatibilní stav vůči α neúplný („bez názoru“), neplatí v něm ani α , ani $\neg\alpha$. Z hlediska naší motivace můžeme chápat kompatibilní stavy jako informační stavy, s jejichž daty nechce být vědec v rozporu. Tedy dříve, než přijme nějaké negativní tvrzení, musí si nejprve zkontrolovat, zda to neodporuje informacím v nějakých kompatibilních stavech.

Kromě vymezení platnosti formule v daném informačním stavu je součástí sémantiky také definice platnosti v modelu. V kripkovské sémantice se tato otázka řeší jednoduše – platnost v modelu je platnost ve všech možných světech. Pokud bychom ale zvolili stejné řešení pro substrukturální logiky, dostali bychom velice slabý systém, ve kterém by např. neplatil ani axiom reflexivity ($\alpha \rightarrow \alpha$). Takto slabý systém ale není naším cílem, proto se platnost definuje nikoli jako platnost ve všech informačních stavech, ale jen v těch, které se (z logického hlediska) „dobře chovají“ v tom smyslu, že tam základní logická pravidla platí. Takovýmto stavům budeme říkat *logické*.

Pro zájemce o formální stránku našeho přístupu dodejme, že substrukturálním modelem budeme nazývat strukturu (F, \models) , kde $F = (W, L, \leq, R, C)$ je *rámec* sestávající z množiny informačních stavů W , ze kterých je vyčleněna neprázdná podmnožina logických stavů L a nad kterou je definováno částečné uspořádání \leq odpovídající perzistenci, ternární relace relevance R a binární relace kompatibility C . Relace jsou přitom spojeny podmínkami:

- Jestliže $Rxyz$, $x_I \leq x$, $y_I \leq y$ a $z \leq z_I$, pak $Rx_Iy_Iz_I$.
- $x \leq y$ právě tehdy, když existují logické stavy z a z_I takové, že $Rzxy$ a Rxz_Iy .
- Jestliže xCy , $x_I \leq x$ a $y_I \leq y$, pak $x_I Cy_I$.
- Jestliže $Rxyz$, pak ke každému z_I ($z_I Cz$) existuje y_I ($y_I Cy$) tak, že Rxz_Iy_I .

Funkce \models je pravdivostní ohodnocení formulí v informačních stavech. Podrobněji viz Bílková et al. (2013) a Restall (2000).

5. Substrukturální epistemické logiky

Jaké požadavky budeme klást na epistemický operátor? Pokud se budeme držet klasické definice znalosti jako pravdivého zdůvodněného přesvědčení, pak základními vlastnostmi by měly být pravdivost a zdůvodněnost. V klasických modálních logikách je pravdivost postulována axiomem (T)

a vyplývá z něj i konzistence znalosti. V substrukturálních logikách připouštíme možnost nekonzistentních dat, po znalosti budeme ale konzistenci vyžadovat. Ta nevyplývá z pravdivosti a budeme ji postulovat zvlášť.

Požadavek zdůvodněnosti je ve standardních epistemických logikách implicitně dán epistemickými alternativami; pravdivé přesvědčení je znalostí, pokud je epistemicky nutné. V našem přístupu bude zdůvodněnost chápána jako *potvrzení* (nezávislým) zdrojem. Informace se v daném informačním stavu stane znalostí, pokud je pravdivá v nějakém (obecně jiném) informačním stavu, který je zdrojem pro stav aktuální. Náš epistemický operátor *potvrzení* budeme značit \odot ¹⁰ a relaci „být zdrojem“ označme S . Formálně:

$$v \models \odot\varphi \text{ právě tehdy, když existuje } w \text{ takový, že } w \models \varphi \text{ a } w S v$$

Zdůrazněme hned na začátku, že operátor \odot je existenčního typu na rozdíl od klasického operátoru K , který je univerzálního typu. Jak uvidíme později, \odot se v některých ohledech nechová jako operátor epistemické možnosti M . Otázkou je, jaké vlastnosti by měla splňovat relace S . Opět zde zřejmě budou hrát roli požadavky pravdivosti a konzistence. Zdrojový informační stav by měl potvrzovat něco, co je v aktuálním stavu pravda a neměl by nějakou informaci zároveň potvrzovat i vyvracet (resp. potvrzovat ji i její negaci).

Dalším přirozeným požadavkem je, aby zdrojový stav potvrzoval informaci *před* tím, než je v aktuálním stavu přijata jako znalost. S tím také souvisí požadavek nezávislosti. Chtěli bychom, aby byl zdroj vzhledem k aktuálnímu stavu nějakým způsobem nezávislý, minimální požadavek zřejmě je, aby byl různý od aktuálního stavu.

Uvedené podmínky svazují relaci zdroje s relacemi perzistence a kompatibility. Vyplývá z nich, že pokud je něco zdrojem, musí to předcházet daný stav v relaci perzistence a musí s ním být kompatibilní. Tyto podmínky chápeme jako minimální, tedy nutné, ale nikoli postačující. Pokud je nějaký stav předchůdcem aktuálního stavu a je s ním kompatibilní, nemusí být nutné zdrojem.

$$(S) \quad w S v, \text{ potom } w \leq v \text{ a } w C v$$

¹⁰ Původně jsme epistemický operátor standardně označovali jako K , jelikož se ale toto označení používá pro operátory typu *nutnost* docházelo k řadě nedorozumění. Nepřišlo nám ani vhodné zvolit označení M odpovídající příslušnému operátoru typu *možnost*, viz dále. Zvolili jsme nestandardní symbol \odot , asociující anglické *confirmation* (C je v substrukturálních logikách zadáno pro relaci kompatibility).

Složitější situace nastává se zajištěním nezávislosti. Obojí bychom mohli zajistit záměnou perzistence jako neostrého uspořádání za striktní perzistenci. Tento sémanticky snadno formulovatelný požadavek však nedokážeme vyjádřit axiomatically. Jinými slovy nedokážeme axiomatically oddělit třídu rámců, kde relace zdroje odpovídá ostré relaci perzistence od třídy rámců, kterou jsme definovali. Z motivačního hlediska bychom rádi naši definici zdroje zesílili o podmínku nezávislosti, ale z technických důvodů to není možné. Výše uvedenou podmínku tedy budeme brát jako definici relace zdroje v tom smyslu, že vyjadřuje minimální požadavky, které musí zdroj splňovat.

Formálně tedy definujeme epistemický substrukturální rámec jako původní substrukturální rámec F doplněný o relaci zdroje S , splňující podmínku (S).

5.1. Charakteristické vlastnosti

V tomto oddíle se budeme zabývat vlastnostmi epistemického operátoru, který jsme právě definovali.¹¹

(Tc) $\odot\varphi \rightarrow \varphi$	<i>pravdivost</i> (pokud je φ potvrzené, pak φ je pravda)
(Dc) $\neg\varphi \wedge \odot\varphi \rightarrow \perp$	<i>konzistence</i> (co není pravda, nemůže být potvrzené)
(Mon) $(\alpha \rightarrow \beta) / (\odot\alpha \rightarrow \odot\beta)$	pravidlo monotonie
(Dis) $\odot(\alpha \vee \beta) / (\odot\alpha \vee \odot\beta)$	pravidlo disjunkce

Uvedené formule a pravidla nejen ilustrují vlastnosti operátoru potvrzení, ale navíc lze ukázat, že logika epistemických substrukturálních rámců je jimi axiomatizována. Pokud přidáme tyto epistemické axiomy k základním axiomům nějakého substrukturálního logického systému, je výsledný systém úplný vzhledem k sémantice substrukturálních rámců (viz Bílková et al. 2013).

Pravdivost a *konzistence* jsou minimální vlastnosti, které jsme od epistemického operátoru požadovali. Pravdivost (Tc) přesně odpovídá axiomu pravdivosti v klasických epistemických logikách (T) a vlastnost konzistence (Dc) odpovídá axiomu konzistence v logikách přesvědčení. Na rozdíl od klasických epistemických logik jsou obě podmínky nezávislé (tj. pravdivost obecně nevyplývá z konzistence) lze dokonce ukázat, že každá z těchto vlastností je příslušnou podmínkou na zdroj charakterizována.

¹¹ Formální detaily se všemi definicemi a důkazy obsahuje připravovaný článek (Bílková et al. 2013).

Pravdivost plyne z toho, že každý zdroj musí být předchůdcem aktuálního stavu v relaci perzistence, a konzistence vyplývá z kompatibility zdroje s aktuálním stavem. Konzistence zároveň zaručuje, že všechny zdroje daného informačního stavu jsou navzájem kompatibilní. Vylučuje tedy například situaci, kdy daný aktuální stav má dva zdroje, z nichž jeden potvrzuje φ a druhý $\neg\varphi$.

Potvrzení disjunkce, viz (Dis), znamená v našem systému potvrzení některého z disjunktů. Tato vlastnost je dána technickým aparátem, který používáme, a tím, že potvrzení je existenční modalita. Pokud je $(\alpha \vee \beta)$ potvrzené, pak existuje zdroj, kde platí $(\alpha \vee \beta)$. To ale může nastat jen tehdy, pokud ve zdroji platí α nebo pokud tam platí β . V aktuálním stavu je tedy potvrzené α nebo je tam potvrzené β .

Mezi klasickou epistemickou modalitou K a naší modalitou potvrzení \odot existují rozdíly již na úrovni motivací. Naše modalita nezachycuje zcela obecný pojem znalosti, ale zaměřuje se na vztah potvrzení. Z technického hlediska se jedná o „zpětnou“ (v relaci *být zdrojem* se díváme „dozadu“) modalitu existenčního typu, klasická epistemická modalita je obecného typu a „dopředná“. Operátor \odot se v některých ohledech nechová jako operátor epistemické možnosti M . Pokud platí v klasických rámcích pro nějakou formuli $M\varphi$ a neplatí $K\varphi$ (φ je možností, ale ne znalostí), pak musí nutně platit i $M\neg\varphi$. To pro náš operátor potvrzení neplatí; pokud je potvrzeno φ , pak nemůže být potvrzeno $\neg\varphi$.

Jak už jsme uvedli, i v našem systému platí axiomy pravdivosti a konzistence, které patří mezi základní požadavky na znalost. Uvidíme, že většina ostatních axiomů logiky S5 nebude platit, ale podobně jako v kripkovských rámcích je umíme charakterizovat pomocí vlastností relace *být zdrojem*.

Introspekce

V našem systému by se pozitivní introspekce dala chápat jako potvrzení vyššího řádu: pokud máme potvrzeno φ , pak máme potvrzeno i *potvrzení* φ . Takovýto požadavek by evidentně byl příliš silný (nemluvě o negativní introspekci) a v našem systému žádná z forem introspekce neplatí.

Modální Modus Ponens

Jak jsme uvedli v úvodní části, platnost (MMP) zaručuje axiom (K). Pravidlo říká: pokud v nějakém stavu vím α a vím, že $(\alpha \rightarrow \beta)$, pak vím i β . (Zdůrazněme, že $(\alpha \rightarrow \beta)$ nemusí v tomto případě odpovídat logické-

mu vyplývání, z pohledu naší „vědecké“ motivace, ho můžeme chápat jako vyzorované pravidlo.) V našem systému axiom (K) znamená, že pokud mám zdroj pro α a zdroj pro $(\alpha \rightarrow \beta)$, musím mít zdroj i pro β . Ani tento požadavek se nezdá být intuitivně nezbytným požadavkem pro relaci zdroje a v našem systému neplatí.

Logické pravdy

Znalost všech logických pravd (VŠT) je v S5 zaručena pravidlem necesitace. To by v našem pojetí znamenalo, že epistemický subjekt má (v každém logickém informačním stavu) zdroj pro všechny logické pravdy. Logické pravdy platí pouze v logických stavech, necesitace by tedy vyžadovala, aby každý logický stav měl nějaký logický zdroj. Tato podmínka charakterizuje pravidlo necesitace, ale obecně v epistemických substrukturálních rámcích neplatí.

Logický důsledek

Uzavřenost na logický důsledek (VŠD) byla v S5 dána pravidlem monotonie, které vyplývalo z axiomu (K) a z pravidla (Nec). V substrukturálních rámcích (K) ani (Nec) neplatí, ale monotonie ano. Zbavili jsme se tedy vševedoucnosti ve smyslu znalosti teorémů a (MMP), vševedoucnost jako znalost logických důsledků nám však zůstala.

Z formálního hlediska se monotonie považuje za konstitutivní vlastnost modalit (nejen těch chápaných epistemicky), viz např. Restall (2000), pokud tedy chceme zachovat přístup, ve kterém je znalost v nějakém smyslu modalitou, nemůžeme se monotonie principiálně zbavit. Máme samozřejmě možnost důsledky monotonie obejít tím, že dáme na znalost další „nemodální“ požadavky. Můžeme si snadno představit modifikaci našeho systému, která pracuje s operátorem uvědomění a s explicitní znalostí. V principu ale nemůžeme zahodit monotonii a zároveň si ponechat znalost jako modalitu.

Připomeňme si také, že se pohybujeme nad logikami mnohem slabšími, než je klasická logika, proto i logických důsledků, které epistemický subjekt zařazuje mezi svou znalost v rámci logického uzávěru je v jistém smyslu méně, než je tomu u standardních epistemických logik.

Disjunkce

Tato vlastnost ve standardních epistemických logikách neplatí, resp. neplatí pro univerzální operátor znalosti K , ale platí pro příslušný duální operátor epistemické možnosti M ze stejného důvodu, z kterého platí

v substrukturálních rámcích; pokud existuje stav, dosvědčující ($\alpha \vee \beta$), pak v něm musí platit α nebo v něm musí platit β .

Z hlediska naší intuice o pojmu *potvrzení* je tato vlastnost vysoce problematická. Můžeme si snadno představit situaci, kdy máme potvrzenou disjunkci, aniž bychom měli potvrzený jeden z jejích disjunktů. Pokud bychom se chtěli tohoto pravidla zbavit, museli bychom přejít k logikám, které nejsou distributivní (neplatí v nich distributivní zákon). Pro tyto logiky ale neexistuje relační sémantika, což byl jeden z našich výchozích požadavků.

6. Závěr

V předchozím textu jsme se zabývali významnými problémy standardních epistemických logik a jako alternativu k nim jsme představili epistemickou logiku založenou na substrukturálních systémech.

Náš přístup vychází z klasické definice znalosti jako pravdivého zdůvodněného přesvědčení (*true justified belief*). Na rozdíl od klasických přístupů jsme se zaměřili na explicitní vyjádření požadavku zdůvodnění, který jsme interpretovali jako potvrzení nezávislým informačním zdrojem (podobně jako v logikách zdůvodnění). Pojem *potvrzení* má v epistemologii svůj zavedený význam, zejména v teorii indukce (stupeň potvrzení evidence hypotézou), my jsme ho interpretovali v jiném významu – jako pravdivost v nějakém informačním stavu, který je pro aktuální stav nezávislým informačním zdrojem.

Naším primárním zájmem byla filosofická interpretace relační sémantiky pro substrukturální logiky, kdy se na informační stavy substrukturálního rámce díváme jako na (uspořádané) zdroje dat, s nimiž epistemický subjekt pracuje.

Cílem bylo vybudovat flexibilní systém epistemických logik, ve kterém epistemická modalita sdílí základní vlastnosti, ale kde lze v jistém smyslu nastavovat vlastnosti relace důsledku (přidáváním strukturálních pravidel) v závislosti na typu konkrétního epistemického kontextu, ve kterém se systémem používá.

Při porovnání vlastností našeho epistemického systému se standardním se ukázalo, že se některým nežádoucím vlastnostem podařilo vyhnout, (introspekce, některé typy vševědoucnosti), ale jiné zůstaly: vlastnost disjunkce a uzavřenost na logický důsledek (způsobená pravidlem monotonie). První z nich je dána naší volbou výchozích logik (distributivní logiky), resp. naším záměrem pracovat s relační sémantikou. Druhou jsme zdůvodnili tím, že se

jedná o konstitutivní vlastnost modalit, kterou nelze obejít, pokud chceme, aby náš epistemický operátor byl v nějakém základním smyslu modální. Snažili jsme se současně ukázat, že existující řešení problém logického uzávěru buď obcházejí, nebo jej řeší za cenu nárůstu syntaktické složitosti. Řešení typu explicitní znalost jsou v principu aplikovatelná i na jinou relační sémantiku než na klasickou kripkovskou a mohou být použita i pro náš systém substrukturálních epistemických logik.

Literatura

- ARTEMOV, S. (2008): The logic of justification. *The Review of Symbolic Logic* 1, No. 4, 477-513.
- BEAL, J. C. – RESTALL, G. (2006): *Logical Pluralism*. Oxford University Press.
- BÍLKOVÁ, M. – MAJER, O. – PELIŠ, M. – RESTALL, G. (2010): Relevant Agents. In: Beklemishev, L. – Goranko, V. – Shehtman, V. (eds.): *Advances in Modal Logic*. Vol. 8. London: College Publications, 22-38.
- BÍLKOVÁ, M. – MAJER, O. – PELIŠ, M. – RESTALL, G. (2013): Substructural Agents. Přípravováno.
- DUC, H. N. (2001): *Resource-Bounded Reasoning about Knowledge*. Ph.D. thesis. Faculty of Mathematics and Informatics, University of Leipzig.
- DUŽÍ, M. – JESPERSEN, B. – MÜLLER, J. (2005): Epistemic Closure and Inferable Knowledge. In: Běhouněk, L. – Bílková, M. (eds.): *The Logica Yearbook 2004*. Praha: Filosofía.
- FAGIN, R. – HALPERN, J. – MOSES, Y. – VARDI, M. (2003): *Reasoning about Knowledge*. The MIT Press.
- CHILDERS, T. – MAJER, O. (2010): Kondicionály. In: Svoboda, V. a kol.: *Logika a přirozený jazyk*. Praha: Filosofía.
- HINTIKKA, J. (1962): *Knowledge and Belief: An Introduction to the Logic of the Two Notions*. Cornell: Cornell University Press.
- MAJER, O. – PELIŠ, M. (2009): Epistemic Logic with Relevant Agents. In: Peliš, M. (ed.): *The Logica Yearbook 2008*. London: College Publications, 123-135.
- PAOLI, F. (2002): *Substructural Logics: A Primer*. Kluwer.
- RESTALL, G. (2000): *An Introduction to Substructural Logics*. Routledge.
- RESTALL, G. (2005): Logics, Situations and Channels. *Journal of Cognitive Science* 6, 125-150.
- SEDLÁR, I. (2012): Inter-Model Connectives and Substructural Logics. Rukopis.
- WANSING, H. (2002): Diamonds Are a Philosopher's Best Friends. *Journal of Philosophical Logic* 31, 591-612.