

Je číslo předmět nebo vlastnost?

Prokop Sousedík, David Svoboda

Akademie věd České republiky

Abstract: The paper deals with the problem whether the number is a property or an object. The authors are convinced that from the logical point of view the number is an object, but from the ontological point of view the number is a special kind of property (briefly spoken the property of a system or a structure).

Keywords: object, accident, Frege, structure.

V dějinách filosofie se setkáváme se dvěma podstatně odlišnými ontologickými koncepcemi. První z nich má svůj základ v Platónově dialektice. Otázky typu co je moudrost, zbožnost či statečnost **o sobě** vedly Platóna ke smělému závěru, že samostatně a nezávisle existující entitou (*ens in se*) může být jedině obecná idea.¹ Se zcela protichůdnou koncepcí přichází Platónův žák Aristotelés.² Rezolutně odmítá Platónův důraz na obecné a obrací svoji pozornost ke konkrétním předmětům. Jsoucím o sobě tak již nejsou obecné ideje, ale konkrétní jednotliviny. Konkrétní jednotlivina je pak nositelem příslušných určení (moudrosti, zbožnosti či statečnosti), jimž se tradičně říká *akcidenty*. Akcidenty samozřejmě neexistují samostatně, ale v závislosti na jiném (*ens alio*).

Tak jako lze rozlišit dvě podstatně odlišné ontologické koncepce, lze podobně rozlišit i dvě vzájemně si konkurující koncepce čísla. Podle první z nich je číslo samostatně existující a nezávislou entitou (*ens in se*) a má podobný ontologický status jako platónská idea. S takovýmto přístupem se lze setkat u pythagorejců, samotného Platóna a má velký vliv i v současné filosofii matematiky. Platónské motivy pak zaznívají i v myšlenkách iniciátora obratu k jazyku G. Frege. Podle druhé koncep-

¹ Srov. např. Platón (1905): 6d.

² Srov. např. Aristoteles (1949).

ce je číslo ontologicky nesamostatnou entitou, která existuje v závislosti na konkrétních jednotlivinách (*ens in alio*); číslo je tedy akcident. Toto pojetí zastává např. Aristotelés, Tomáš Akvinský a do jisté míry i J.S. Mill. V současné filosofii matematiky má sice tato koncepce své zastánce, ale rozhodně nepatří do jejího hlavního proudu.

Naše sympatie má Aristotelovo ontologické schéma, platonismus se nám naproti tomu jeví jako intuitivně nepřijatelný. Jsme přesvědčeni, že existuje pouze jeden svět, který lze dostatečně úspěšně vysvětlovat, aniž by bylo třeba roztrhnout realitu do dvou zcela nesourodých celků. S tím souvisí, že nejsme ochotni přijmout takové koncepce, které čísla pojmají jako entity existující samostatně mimo čas a prostor. Samostatně existujícím jsouncem je tak pro nás jediné individuální substance.

Po tomto příkrém odmítnutí platónismu se zdá, že se musíme zcela bezvýhradně přiklonit k Aristotelově koncepci čísla, podle níž je číslo akcident. Tak jako moudrost není samostatně existujícím jsouncem, ale existuje v závislosti na Sókratovi, není ani číslo samostatně existující entitou, ale existuje v závislosti na jednotlivých věcech. Nejedná se však o akcident závislý na jedné konkrétní substanci, ale o akcident, jehož nositelem je skupina či agregát jednotlivých věcí. Tak např. číslo čtyři je akcident náležející Jupiterovým měsícům či sboru evangelistů. Číselný predikát, který vypovídáme o příslušných agregátech, pak považuje Aristotelés, a v závislosti na něm i významná část peripatetické tradice, za druh kvantity.³

Základní myšlenka Aristotelovy koncepce našla své novodobé stoupeny především mezi empiricky orientovanými filosofy. V současných dějinách filosofie matematiky je tato koncepce, jak jsme naznačili výše, spojována především s dílem J.S. Milla⁴ a je obecně známo, že tuto koncepci později podrobil velké kritice G. Frege.⁵ Frege v *Základech aritmetiky* předkládá celou řadu argumentů, které vážným způsobem zpochybňují myšlenku, že číslo je akcidentem, nebo - jak se začalo říkat později - že číslo je vlastností vnějších věcí.⁶

³ Srov. např. Tomáš Akvinský (1965): „... *duas species quantitatis, quae sunt discreta quantitas et continua.*“; tentýž, (1888-1906): I, 30, 3 - „... *numerus qui est species quantitatis.*“

⁴ J. S. Mill (1919).

⁵ Srov. např. S. Shapiro (2000).

⁶ G. Frege (1986) (dále odkazujeme G. Frege (2001)).

Domníváme se, že Fregova kritika je oprávněná. Jestliže ji však přijmeme, ocitáme se rázem před velmi vážným problémem. Na jedné straně se hlásíme k peripatetickému matematickému „naturalismu“, na straně druhé však přijímáme i zásadní kritiku této koncepce. Tento problém nás však již přivádí k vlastnímu námětu našeho příspěvku. V první části chceme čtenáře přesvědčit o oprávněnosti Fregovy kritiky. V dalších částech pak chceme ukázat, že uznání této kritiky a následné odmítnutí koncepce, podle níž je číslo vlastností vnějších věcí, nemusí nutně vést k úplnému odmítnutí aristotelského pojetí. Pokusíme se totiž ukázat, že aristotelskou pojmovou dvojici *substance* a *akcident* lze užít i v případě čísla, byť oběma pojmy musíme dát poněkud pozměněný význam.

1 Problém s kategoriální kvantitou

Podívejme se nyní na obtíže, které jsou spojeny s aristotelovsko-millovskou koncepcí. Argumenty proti této koncepci představují na první pohled poněkud heterogenní celek; přesto je však lze poměrně přehledně uspořádat. Je-li číslo vlastností vnějších věcí (je-li tedy druhem kvantity), pak příslušné výroky, kterým budeme říkat po vzoru G. Fregeho *číselné údaje*, musí mít běžnou subjekt-predikátovou strukturu. Na místě subjektu stojí singulární termín, který referuje ke konkrétnímu agregátu; na místě predikátu pak obecný termín, kterým je v našem případě číslo. V závislosti na tom rozdělíme argumenty proti podřazení čísla pod akcident kvantity do dvou skupin: v první skupině uvedeme argumenty, které souvisí s tím, že by logickým subjektem číselných údajů byl agregát; ve druhé skupině uvedeme argumenty, které souvisí s tím, že by predikátem těchto výroků bylo číslo.

Z historických důvodů se nejprve zaměříme na druhé hledisko. Velmi nepříjemného důsledku podřazení čísla pod kategorii kvantity, tj. ztotožnění čísla s běžným predikátem, si povšimnuli již někteří scholastici.⁷ Tím, že vypovídáme o nějakém agregátu individuí určité číslo, vypovídám o něm přirozeně celý obsah tohoto pojmu. K obsahu tohoto pojmu samozřejmě patří všechny pojmy, které jsou číslu nadřazené. Pojmu *číslo* je nejbližším nadřazeným pojmem *diskrétní kvantita*. Vypovídám-li proto o nějakém subjektu číslo, vypovídám tím o něm i diskrétní kvantitu. Diskrétní kvantitu však peripatetici chápali jako

⁷ Srov. Tomáš Akvinský (1888-1906): I, 30, 3.

soubor materiálně oddělených jednotek. Tvrdíme-li např., že *Evangelisté jsou čtyři*, pak tím samozřejmě říkáme, že Matouš, Marek, Lukáš a Jan jsou materiálně oddělená individua, tj. říkáme, že hranice těla jednoho evangelisty není totožná s hranicí těla toho druhého. Čísla se však nevypovídají pouze o agregátech, jejichž prvky jsou materiálně oddělené, ale i o entitách, u nichž o materiální oddělenosti nemá vůbec smysl hovořit. Běžně totiž mluvíme o počtu prvočísel, o počtu Aristotelových kategorií, o počtu myšlenek atd. Kategorie či myšlenky však samozřejmě nejsou materiálně oddělené. Tohoto problému si později povšimnul i Frege, když kritizoval dosavadní koncepcí čísla. Podle jeho názoru by bylo skutečně podivuhodné, kdybychom vlastnost, již jsme vyabstrahovali z vnějších věcí, mohli beze změny smyslu přenést na události, představy, pojmy. Výsledek by byl stejný, jako kdybychom chtěli hovořit o tavitelné události, modré představě, slaném pojmu či o tuhém soudu.⁸

Jeden z nejvýznamnějších středověkých peripatetiků Tomáš Akvinský by s touto kritikou souhlasil. Vlastnost, již jsme vyabstrahovali z vnějších věcí, nelze podle Tomáše beze změny smyslu vypovídat o nemateriálních entitách. Podle Tomáše mají číselné údaje týkající se nemateriálně oddělených entit skutečně jiný smysl než číselné údaje o materiálně oddělených entitách; číselné údaje o nemateriálně oddělených entitách mají analogickou či metaforickou povahu.⁹ Z výše uvedeného citátu je patrné, že Frege by takové řešení odmítl, neboť považuje uvedený posun smyslu za *reductio ad absurdum* celé kategoriální koncepce čísla.¹⁰

Další obtíž, která souvisí s tím, že číslo je běžným predikátem je spojena se způsobem vzniku čísla, totiž s abstrakcí. Přijmeme-li totiž definici, podle níž je číslo agregátem jednotek, pak musíme přijmout i to, že je číslo pojem, který vzniká abstrakcí z konkrétních agregátů (n-tic). V této abstrakci necháváme stranou všechny odlišnosti, kterými se konkrétní jednotky liší. Výsledkem je tedy soubor vzájemně nerozlišených jednotek. Nepříjemným důsledkem však je, že se takto abstrahovaný soubor jednotek slévá v nerozlišenou jednotu. Zatímco je totiž mezi konkrétními jednotkami celá řada různých odlišností, mezi abs-

⁸ Srov. G. Frege (2001): §24, s.31.

⁹ Srov. Tomáš Akvinský (1888-1906): I, 30, 3.

¹⁰ Srov. G. Frege (2001) §24, s.31.

traktními jednotkami žádné rozdíly být nemohou, a proto nelze mluvit o jejich agregaci.¹¹

Přejdeme nyní ke druhé skupině argumentů. Tyto argumenty se týkají, jak jsme výše uvedli, subjektu číselných údajů. Co je tedy např. subjektem výroku *Evangelisté jsou čtyři*? Na první pohled je zřejmé, že subjekt *evangelisté* nemůže referovat distributivně. (Nemůže tedy referovat, jako ve výroku *Evangelisté jsou světci*, v němž se svatost vypovídá o každém evangelistovi zvlášť.) Evangelisté jistě nejsou čtyři každý zvlášť, ale všichni dohromady. Subjektem číselného údaje tak musí být podle Tomáše skupina osob, která se podílela na vzniku Nového zákona a která tedy vytváří svého druhu jednotu. Tuto jednotu, k níž referujeme singulárním termínem na místě subjektu, jsme již výše nazvali *agregátem*. Právě tento agregát je pak charakterizován pomocí čísla čtyři. Subjekt našeho výroku je tedy týž, jako v případě výroku *Evangelisté jsou autory první části Nového zákona*. Připustíme-li však, že v číselných údajích je na místě subjektu singulární termín, který referuje k příslušnému agregátu, jsou s tím spojeny vážné obtíže.

První obtíž tohoto řešení lze spatřovat v tom, že subjektem takového výroku není konkrétní substance, ale agregát individuí. Číselný predikát tak nevypovídáme o konkrétní substanci, ale o skupině substancí. Přijetím tohoto závěru však do jisté míry opustíme peripatetické ontologické schéma, podle nějž akcident existuje pouze a jen v závislosti na jedné konkrétní substanci. Tohoto problému si byli scholastici dobře vědomi a jeho řešení vyvolávalo četné diskuse.¹² V našich úvahách však ponecháme tyto diskuse stranou a budeme předpokládat, že se podařilo sjednotit aristotelskou nauku o akcidentech se skutečností, že se tyto akcidenty nemusejí nutně vypovídat o jedné konkrétní substanci, ale i o agregátu.

I za tohoto předpokladu, (který má ontologickou povahu) je však s kategoriálním pojetím čísla spojena ještě jedna, tentokrát již podle našeho soudu nepřekonatelná obtíž. Vypovídáme-li číselný predikát o nějakém agregátu, pak tento agregát musí představovat určitou jednotu. (Tato jednotu může představovat buď fúzi individuí, nebo jejich soubor). Jestliže je agregát skutečně svého druhu jednotou, pak na místě subjektu musí stát singulární termín a na místě predikátu termín obecný. Predikát, kterým je určité číslo, musí vymezovat tuto jednotu jako celek a nikoli distributivně prvky tohoto celku. Evangelisté jsou

¹¹ Srov. G. Frege (2001): §34, s. 40-41.

¹² Srov. např. F. Suárez (1866).

totiž čtyři dohromady a ne každý zvlášť. Z logického hlediska by se tedy mělo jednat o běžný singulární výrok. Z ontologického hlediska by pak měla být jednotlivina, k níž referuje subjekt, instancí obecniny, k níž referuje predikát. Podobně jako mnohdy vymezujeme skupinu pomocí nedistributivních predikátů (o určité školní třídě řekneme, že je ukázněná), vymezujeme danou skupinu i pomocí predikátů číselných.

Je-li však výrok s číselným predikátem z logického hlediska singulárním výrokem, musí pro něj platit běžná logická pravidla. K těm patří i pravidlo, díky němuž můžeme v extenzionálních kontextech zaměňovat *salvo veritate* výrazy se stejnou referencí. Aplikujme nyní toto pravidlo na singulární termín, který stojí na místě subjektu a který označuje určitou skupinu. Pro účely naší argumentace bude užitečné nejprve se zaměřit na výroky, které mají na místě predikátu běžnou akcidentální (nekvantitativní vlastnost). Učitel např. řekne: *Žáci třídy, v níž jsem dnes učil matematiku, nebyli ukáznění*. Subjekt, tj. v našem případě deskripce, referuje k určité jednotě (agregátu) a predikát k vlastnosti, jíž tato jednota má. Neukázněnost je přirozeně vlastností jednoty a nikoli částí, jimiž je tato jednota konstituována. Svým výrokem jistě učitel nechce říci, že neukáznění byli všichni, že tedy zlobili i jeho oblíbení žáci. Ve výrocích tohoto druhu lze bez problémů nahradit termín, který stojí na místě subjektu jiným termínem, který má stejnou referenci. V našem případě tak může na místo termínu *žáci třídy, v níž jsem dnes učil matematiku*, použít vlastního jména dané třídy. Můžeme tedy říci *VIII.C byla neukázněná*. K obdobnému závěru bychom měli dospět i v případě výroků, jejichž predikátem je přirozené číslo, tj. v případě číselných údajů. Neproblematické je (podobně jako v předchozím případě), když učitel řekne *Žáků třídy, v níž jsem dnes učil matematiku, bylo třicet*. Substituce termínu *VIII.C* za termín *žáci třídy, v níž jsem dnes učil matematiku* ale vyzní velmi problematičtě: Substitucí vzniklý výrok *VIII.C je třicet* je na první pohled nesmyslný. Logika naší řeči tedy není ve shodě s řešením, podle něž by číslo bylo běžným predikátem, který se vypovídá o singulárním subjektu.

Dosavadní úvahy však zůstávaly pouze na jazykově-logické úrovni. Ontolog či metafyzik by mohl společně s L. Wittgensteinem namítnout, že jazyk naše myšlenky pouze přestruje a že tedy neadekvátnost metafyzické koncepce nelze na půdě čistě jazykové prokázat. I když je náš postoj k metafyzice deskriptivistický a tudíž by předložený argument mohl být dostatečný, lze tentýž argument vést i na úrovni ontologické.

Jinými slovy: tak jako lze ukázat nepřijatelnost ztotožnění pojmu *číslo* s predikátem, lze i ukázat nepřijatelnost ztotožnění čísla s obecninou.¹³

V tomto ohledu je vhodné připomenout, že presupozicí užití singulárního termínu na místě subjektu je existence určité jednoty, k níž pomocí tohoto termínu referujeme. Určitou jednotou tak představuje konkrétní substance (svatý Jan, konkrétní žák), ale i skupina či agregát (evangelisté, třída žáků). Ať tak či onak je jednota vždy instancí různých obecnin. Jan je dejme tomu instancí *svatosti*, konkrétní žák instancí *zlobivosti*, evangelisté jsou instancí *tvůrce proní části Nového zákona*, třída žáků instancí *neukázněnosti*. Vztah mezi jednotlivinou a obecninou by měl přirozeně platit i v případě čísla. Konkrétní agregát by měl být jednotlivinou, která je instancí obecného čísla. Evangelisté by tak měli být instancí obecné čtyřky. To se nám však jeví jako rozporuplné. Prohlásíme-li, že je nějaká jednotlivina instancí obecného čísla, pak jí přirozeně náleží vše, co v sobě číslo zahrnuje. Již víme, že číslo je druhem diskrétní kvantity, a tak s ním musíme spojovat i určité množství, tj. popření jednoty. Jinými slovy: skrývají-li čísla ve svém obsahu i mnohost, nemohou být jejich instance jedním. V podobném duchu se vyjadřuje i Frege, když říká, že ... *číslo je jen jiné jméno pro odlišnost. Přesná identita je jednota a s odlišností vzniká mnohost.*¹⁴

Argument podobného ražení lze nalézt v *Základech aritmetiky*. Kritizuje se zde koncepce, podle níž je číslo vlastností vnějších věcí. Frege tu vlastně odmítá, že na místě subjektu číselných údajů stojí singulární termín, který referuje k příslušnému agregátu. Argument lze rekonstruovat jako *reductio ad absurdum*. Předpokládejme tedy, že číslo je vlastností vnějších věcí a že tuto skutečnost vyjadřujeme v běžných singulárních výrocích, ve kterých referujeme singulárním termínem k příslušnému agregátu. Z logického hlediska se tedy číselný údaj neliší např. od výroku *Tento kámen váží 2kg.*¹⁵ Avšak právě ztotožnění číselných údajů s běžnými singulárními výroky má podle Frege rozporuplné důsledky. Frege argumentuje takto: *Jestliže dám někomu do ruky kámen se slovy: řekni, kolik to váží, pak jsem mu tím zadal celý předmět jeho*

¹³ Tuto koncepci hájí např. J.E. Lowe (1998): 210-227.

¹⁴ Srov. G. Frege (2001): § 36, s. 42 (citát z W.S. Jevonse).

¹⁵ Určitý rozdíl je pouze na ontologické úrovni. Zatímco ve výroku *Tento kámen váží 2kg* referuje subjektivní termín ke konkrétnímu individuu, referuje singulární termín v číselných údajích ke skupině či agregátu individuí.

*zkoumání. Jestliže mu dám do ruky hromádku hracích karet se slovy: určí počet tohoto zde, pak dotyčný neví, jestli chce znát počet karet, anebo kompletních balíčků karet, anebo trumfů při skatu.*¹⁶

Hromádce tak lze přisoudit různá čísla. Jedna a tatáž věc však zřejmě nemůže být ve stejném smyslu nositelem kontrárních predikátů (v našem případě různých čísel). Předpoklad, podle něž v číselném údaji charakterizujeme vnější věc (agregát), vede tedy k absurdnímu či rozporuplnému výsledku. Takovýto předpoklad je tedy třeba odmítnout.

Naše dva argumenty proti ztotožnění čísel s akcidentem kvantity mají cosi společného. Oba poukazují na to, že přímá reference k agregátu, jehož prvky počítáme, vede k absurdním či sporným důsledkům. Poukazují jinými slovy na to, že v případě číselných údajů selhává tradiční členění výroku na subjekt (agregát) a predikát (číslo).

2 Od věci k pojmům - od bytí k jazyku

V předcházejícím paragrafu jsme ukázali, že ztotožnění číselných údajů se singularními subjekty - predikátovými výroky má absurdní či dokonce sporné důsledky. Je-li tomu však skutečně tak, je nepřijatelná celá peripatetická koncepce, podle níž se číslo podřazuje pod kategorii kvantity. Tento negativní závěr nás tak vrací na samý počátek našich úvah.

Inspiraci k novému začátku lze podle našeho soudu nalézt ve Fregeově příkladu s balíčkem karet. Připomeňme, že hlavní obtíž spojená s tímto příkladem spočívá v tom, že jednomu a témuž balíčku karet se připisují kontrární predikáty (různá čísla). K tomuto rozporuplného důsledku dospíváme podle Fregea proto, že číslo nesprávně spojujeme s předmětem (agregátem). S čím jiným než s agregátem však máme číslo spojovat? Při hledání odpovědi na tuto otázku si nejprve povšimněme, že k jednomu a témuž balíčku karet lze referovat celou řadou různých způsobů, např. *karty v mé ruce; hromádky karet v mé ruce; barvy v mé ruce* atd. Referujeme-li těmito různými způsoby, nemění se předmět reference, ale pojem, který určuje způsob danosti příslušného předmětu (agregátu). Tím však již máme připravenou odpověď na naše obtíže. Číslo zřejmě nelze spojovat s neměnným předmětem, ale právě s pojmem, pomocí něž k danému předmětu referujeme. K jednomu a té-

¹⁶ G. Frege (2001): §22, s. 29.

muž předmětu totiž můžeme referovat vzájemně odlišnými pojmy a s těmito pojmy pak můžeme spojovat vzájemně odlišná čísla.

O jaký pojem se však jedná? Jistě musí v prvé řadě poskytovat identifikační kritérium, jehož pomocí jsme s to příslušný agregát identifikovat. Musí se tedy jinými slovy jednat o deskriptci. To však je pouze nutná, nikoli dostatečná podmínka. Kromě toho musí identifikační pojem v sobě skrývat i tzv. *sjednocující sílu*. Ta působí, že vzájemně oddělené entity (tj. nějaké množství) vytvářejí určitou jednotu, k níž následně referujeme. Tak např. pojem *karta v mé ruce* může dát určitou jednotu mnoha kartám, které držím ve své ruce. Sjednocení je pak zřejmě možné jedině tehdy, když pojem vyjadřuje vlastnost, kterou prvky nějakého množství sdílí a díky níž jsme s to vymezit sjednocované předměty v kontrastu s předměty jinými. Takovéto pojmy začala pozdější tradice nazývat *sortální*.¹⁷ Do sjednoceného množství tak patří přirozeně pouze ta individua, o nichž lze vlastnost, jíž vyjadřuje sortální pojem, pravdivě vypovídat.

Z našeho hlediska je důležité, že sortální pojem může hrát i poněkud jinou než sjednocující roli. Počítáme-li totiž individua, která díky tomuto pojmu vytváří jednotu, musíme mít předem k dispozici jednotku počítaného množství. Právě její pomocí můžeme identifikovat počítané prvky. Něco tedy беру jako součást počítaného množství, něco nikoli. Jediným rozumným kandidátem v tomto ohledu je právě sortální pojem. Jednotkou počítání může být např. *karta v mé ruce* nebo *barva karet*.

Číslo, které spojíme s určitým množstvím, tak přirozeně závisí na počítaném množství a dále na zvolené jednotce. Hromádce karet, kterou svírám v ruce, mohu přiřadit číslo 32 (je-li jednotkou *karta v mé ruce*), ale číslo 4 (je-li jednotkou *barva karet*).

Jestliže dáme v tomto ohledu Fregovi zapravdu, pak jsme společně s ním učinili obrat od předmětů k pojmům, tedy jinými slovy obrat od bytí k jazyku. V perspektivě tohoto obratu pak lze bez velkých obtíží vyřešit i další problémy, na něž jsme poukázali v předcházejícím paragrafu. Pro ilustraci se nyní zaměříme na argument, podle něž záměna singulárního termínu (na místě subjektu číselného údaje), jiným singulárním termínem se stejnou referencí může vést ke vzniku nesmyslné věty. V našem příkladě jsme uvažovali o záměně deskripce *žáci třídy*,

¹⁷ Srov. např.: G. Frege (2001): § 54, 55; P.F. Strawson (1964): 168; z česky psané literatury srov. D. Heider (2005): 167–194.

v níž jsem dnes učil, matematiku za vlastní jméno VIII. C. Přijmeme-li nyní Fregovo pojetí, podle něž se číslo spojuje se sortálním pojmem, pak vznik nesmyslu dokážeme bez problémů objasnit. Záměna deskripce za vlastní jméno vede k nesmyslu již z toho důvodu, že s vlastním jménem VIII. C. není spojen žádný pojem.¹⁸ K nesmyslným tvrzením se však dostaneme i tehdy, když uvedenou deskripci nahradíme deskripcí jinou. K tomu dochází v případech, v nichž nelze pojem považovat za jednotku daného množství, respektive v případěj pojmů, které nevytvářejí ze vzájemně rozdělených entit jednotu a jež nelze následně ani využít pro případné počítání daného množství. Příkladem pojmu tohoto druhu by mohl být např. pojem *třída, v níž jsem dnes učil matematiku*. I v tomto případě by totiž bylo jistě neadekvátní zaměnit v číselném údaji *žáci třídy, v níž jsem dnes učil, matematiku za třídu, v níž jsem dnes učil matematiku*.

Kromě problémů spojených s referencí k agregátu, z nichž obrat k pojmům jistě vzešel, se však řeší i problém spojený s aplikací čísla na nemateriální množství (tj. na entity, které nejsou materiálně oddělené). Sortální pojem totiž vytváří jednotu jak z materiálně oddělených entit, tak z entit materiálně neoddělených. Pojmy, pod něž spadají materiálně neoddělené entity, se ontologicky neliší od pojmů, které sjednocují materiálně oddělené entity. S těmito pojmy můžeme spojit číslo vždy a ve stejném smyslu, a proto lze odmítnout absurdní myšlenku, podle níž vypovídáme číslo o materiálních předmětech v jiném smyslu než o předmětech nemateriálních. Není totiž žádný ontologický rozdíl mezi pojmy *prsty mých rukou* a *Aristotelovy kategorie*, ale mezi mými materiálními prsty a nemateriálními kategoriemi.

Fregův přístup se liší od přístupu Aristotela či Tomáše tedy v prvé řadě v tom, že se číslo nespojuje s předmětem, ale s pojmem. Je však zajímavé upozornit na to, že podstatný rozdíl nelze hledat v samotných definicích. Frege by zřejmě nic nenamítal proti vymezení, podle něž je číslo *množství změřené jedním*.¹⁹ Jistě by však doplnil, že oním jedním

¹⁸ To, že záměna deskripce za vlastní jméno vede v případě číselných údajů ke vzniku nesmyslných tvrzení, lze chápat jako další argument ve prospěch tzv. millovsko – kripkovské teorie vlastních jmen.

¹⁹ Tomáš v návaznosti na Aristotela vymezil číslo jako *množství změřené jedním*. Srov. Tomáš Akvinský (1929-1947): 24, 2 obic. 4 – „... numerus est multitudo mensurata per unum ...“.

je právě arbitrárně zvolená jednotka, tj. sortální pojem. Nic by ani nemítal proti definici, podle níž je číslo agregátem jednotek.²⁰ I zde by však doplnil, že onu agregaci či sjednocení působí opět sortální pojem. Z hlediska našich úvah jsou však právě tyto doplňky velmi důležité. Naznačují totiž, že je číslo třeba spojovat s pojmem a ne s agregátem.

Tyto myšlenky by nás mohly svést k nesprávnému závěru: na místě subjektu číselného údaje nestojí agregát, ale pojem a na místě predikátu příslušné číslo. Z logického hlediska se tedy jedná opět o subjekt – predikátový výrok. Číslo se však podle Frege tímto způsobem s pojmem nespojuje! Číslo nepřisuzujeme pojmem stejným způsobem, jako se individuím přisuzují vlastnosti, jako se tedy *objevitelství Ameriky* spojuje s Kolumbem. Je tomu prý právě naopak. Číslo se spojuje s pojmem stejným způsobem, jako se konkrétní předmět spojuje s deskripcí. Tak jako se s deskriptivním pojmem *objevitel Ameriky* spojuje konkrétní předmět Kolumbus, spojuje se s pojmem *Jupiterovy měsíce* abstraktní předmět číslo čtyři.²¹ Výrazy *objevitel Ameriky* a *Jupiterovy měsíce* tedy hrají stejnou logickou roli – referují k příslušnému předmětu, o němž říkáme, že je s příslušným pojmem spojen. Tuto logickou funkci výrazu vyjadřujeme mnohdy i na úrovni přirozeného jazyka: před deskripcí klademe v některých jazycích určitý člen; před pojem, který referuje k abstraktnímu číslu, klademe často výraz *počet*.

Výraz (*počet*) *Jupiterových měsíců* tedy nereferuje k nějakému agregátu vesmírných těles, ale k abstraktnímu předmětu - číslu čtyři. Právě toto zjištění však podstatným způsobem mění naši dosavadní perspektivu. Číselný údaj (*Počet*) *Jupiterových měsíců je čtyři* je z logického hlediska stejného druhu jako věta *Objevitel Ameriky je Kolumbus*. Obě věty vyjadřují identitu, tj. výrazy na obou stranách kopuly jsou singulární termíny, které referují k témuž předmětu. Proto Frege říká: *Máme tedy rovnost, která tvrdí, že výraz „počet měsíců Jupitera“ označuje tentýž předmět jako výraz „čtyři“*.²² Tento předmět však není, jako v případě objevitele Ameriky konkrétní, ale abstraktní.

²⁰ Tomáš příležitostně vymezuje číslo jako *agregát jednotek*. Srov. Tomáš Akvinský (1884): lect. 8 – „... numerus ...est ... aggregatio unitatum ...“

²¹ G. Frege (2001): §56, 57.

²² Tamtéž.

3 Zpět k platónismu?

Přijmeme-li nyní Fregovu tezi, že číselný údaj vyjadřuje identitu, opustili jsme tím s definitivní platností Aristotelovo či Tomášovo podřazování čísla pod kategorii kvantity. Jinými slovy: není-li číselný údaj singulární subjekt-predikátový výrok, pak číslo nemůže být vlastností agregátu materiálně rozdělených entit.

Jaká koncepce však za těchto okolností připadá v úvahu? Domníváme se, že bychom měli vyjít z toho, že výroky *Počet Jupiterových měsíců je čtyři* i *Objevitel Ameriky je Kolumbus* vyjadřují identitu, tj. z toho, že číslo (čtyři) se má k pojmu stejným způsobem jako se má k pojmu empirický předmět (Kolumbus). Toto východisko však má velmi znepokojivý důsledek. Kolumbus je podle Aristotela první substance, která má samostatnou existenci (*ens in se*); podobný ontologický status by mělo mít i číslo čtyři. Výraz *Kolumbus* by tedy měl označovat entitu stejné ontologické kategorie jako číslovka *čtyři*. V obou případech by se proto mělo jednat o samostatně existující jsoucno, tj. o *ens in se*. Určitý rozdíl však mezi oběma entitami existuje. Kolumbus je, jak jsme již uvedli, první substance, tj. jedná se o samostatně existující empirický předmět. Čtyřka naproti tomu empirická není, a proto ji s první substancí ztotožnit nelze. Není-li však čtyřka empirická, musí existovat mimo náš empirický svět, tj. mimo čas a prostor. Samostatné předměty mimo čas a prostor však existují podobným způsobem jako Platónovy ideje. Společně s Platóniky i s Fregem musíme zřejmě připustit existenci tzv. *třetí říše*, která má též ontologický status jako Platónovy ideje.

Tím však, jak známo, Fregův platónismus nekončí. Celý projekt má i svou velmi důležitou technickou stránku. Frege je přesvědčen, že konstitutivním rysem každého abstraktního předmětu musí být podmínky jeho identity. Jestliže se tedy čísla spojují s pojmy, pak musíme předložit kritérium, kdy jsou dva pojmy co do čísla identické. Dva pojmy jsou pak identické právě tehdy, když mezi prvky, které pod tyto pojmy spadají, existuje vztah jednojednoznačného přiřazení. Číslo se tak stává třídou takových pojmů, mezi nimiž právě tento vztah nastává. Tímto krokem se čísla redukuje na množinově teoretické předměty (třídy ekvivalentních tříd). Tato redukce je však spojena s vážnými obtížemi.

První obtíž má logicko-matematickou povahu. Jde o známý paradox, který na počátku 20. stol. formuloval B. Russell, jenž ukazuje, že

třídy či extenze nelze bez dalšího považovat za předměty.²³ Definice čísla však s extenzí jakožto předmětem pracuje. Definice, podle níž je číslo extenze extenzí (třída ekvivalentních tříd), je tudíž nepřijatelná. To však Russella, jak známo, nevedlo k úplnému odmítnutí Fregovy koncepce, ale k její modifikaci.

Z našeho hlediska je však zajímavější kritika, s níž přišel P. Benacerraf.²⁴ Abychom pochopili její význam, je třeba nejprve připomenout, že Frege v souladu s duchem 19. stol. hledal neotřesitelné základy pro vědu. V rámci aritmetiky se tedy pokusil uskutečnit „descartovsko-redukcionistický“ program a došel k závěru, že hledaným základem, který poznáváme jasně a zřetelně, je pak třída či množina. P. Benacerraf si však povšimnul, že v rámci teorie množin existují alternativní možnosti definic jednotlivých čísel. Tak např. číslo dvě lze ztotožnit podle von Neumanna s množinově teoretickým předmětem $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, podle Zermela $\{\{\emptyset\}\}$.²⁵ Je-li tomu však skutečně tak, pak lze množiny jen stěží považovat za základ, na němž by bylo možné postavit celou aritmetiku.²⁶

Ani Russellovy ani Benacerrafovy argumenty však nejsou z našeho hlediska rozhodující. Problematické se nám především jeví, že Fregovy úvahy znovu otevírají možnost ztotožnit čísla se samostatně existujícími věcmi a tím znovu otevírají diskusi o oprávněnosti platónismu. Doktrínu platónismu jsme však hned na počátku našich úvah odmítli.

4 Číslo jakožto *ens in alio*

Situace, v níž jsme se ocitli, není jistě záviděníhodná. Ontologicky střízlivější řešení, podle něž je číslo akcidentem (je jej třeba řadit pod kategorii kvantity) vede k nepřijatelným a někdy i sporným důsledkům. Odmítneme-li však společně s Fregem toto řešení, otvírá se před námi jediná cesta: připustit, že číslo je předmět. Toto řešení nás však žene do náručí pro nás nepřijatelného platónismu. Otázkou je, zda

²³ Českou verzi Russellova dopisu lze nalézt v: V. Kolman (2002).

²⁴ P. Benacerraf (1965): 47-73.

²⁵ E. Zermelo (1908): 261-281; J. von Neumann (1925): 219-240.

²⁶ Jaký je však vztah uvedených množinově teoretických předmětů k číslu? Zdá se, že se spíše než o definice čísla jedná o jeho různé modely.

by se nám nepodařilo najít cestu mezi těmito nepřijatelnými řešeními. Tato cesta podle našeho soudu existuje. Je třeba jen vhodným způsobem spojit pozitiva obou řešení a zbavit se tak všech nepřijatelných důsledků. Vraťme se nyní k Fregovu řešení a akceptujme závěr, podle něž je číslo předmět, který se spojuje s pojmem. Číslo čtyři se tedy spojuje s pojmem *Jupiterovy měsíce* stejně, jako se Kolumbus spojuje s pojmem *objevitel Ameriky*. Kolumbus i čtyřka se tak jistě shodují v tom, že se v obou případech jedná o předmět. Kolumbus je však empirický předmět, který jsme s to v principu vnímat smysly; čtyřka je naopak předmětem abstraktním. Rozlišení mezi konkrétním a abstraktním předmětem je na první pohled v dobré shodě s platónismem: empirické předměty nazírám smysly, abstraktní předměty pak rozumem.

Výraz *abstraktní* však v sobě skrývá důležité vodítko, díky němuž můžeme takovýto závěr smysluplně modifikovat. *Abstrahovat* doslova znamená *odtahovat*. Abstraktní pojem dejme tomu *moudrosti* získáme tak, že akcident *moudrosti* „odtáhneme“ z určitého základu, tj. z konkrétního člověka. V případě moudrosti je abstrakce neproblematická a nebudí rozpaky. Obtíže však pociťujeme v případě vzniku čísel. V našich předcházejících úvahách jsme ukázali, že základem abstrakce nemůže být konkrétní agregát; číslo čtyři tedy nezískáme z Jupiterových měsíců; čtyřka tedy nemůže být na Jupiterových měsících stejným způsobem jako je moudrost na Sokratovi. K čemu však jinému však než ke konkrétním věcem bychom měli obrátit pozornost? Odpověď na tuto otázku již máme pohotově. Víme totiž, že číslo je třeba podle Frega spojovat s pojmy. Zkusme se tedy zaměřit místo na předměty právě na oblasti pojmů! Na první pohled se však zdá, že se tím příliš daleko nedostaneme. Pojem můžeme maximálně rozložit na jeho konstitutivní prvky: např. v pojmu *měsíc Jupitera* nalézáme *astronomické těleso*, *satelit* atd., ať však analyzujeme sebe pečlivěji, nenalezneme zde však pojmu náležející číslo. Pojem sám o sobě tedy s žádným číslem rozhodně spojen není a z pojmu, pokud stojí sám o sobě, žádným druhem abstrakce číslo získat nelze!

Cestu z těchto obtíží nalezneme tím, že naše zkoumání samostatně stojícího pojmu přirovnáme ke zkoumání nějakého konkrétního člověka.²⁷ Pokud nás bude zajímat pouze a jen tento konkrétní člověk, můžeme zjistit jeho fyzické vlastnosti, jeho zdravotní stav atd., nemůžeme přirozeně hovořit o jeho vztazích k okolnímu světu. Nelze např.

²⁷ V následujících úvahách jsme čerpali mnohé poučení v: S. Shapiro (1997).

zjistit nic ohledně jeho pracovního postavení. To totiž není určeno jím samotným, ale jeho vztahem (dejme tomu nadřízenosti a podřízenosti) k ostatním lidem. Někdo je tak, dejme tomu, děkan Katolické teologické fakulty v Praze, což neznamená nic jiného, než že mezi ním a ostatními zaměstnanci university existují přesně vymezené vztahy. Děkanem tedy nikdo není sám o sobě, ale až ve vztahu k jiným lidem. Funkce děkana je tedy určena rozličnými pracovními vztahy. Jinými slovy: nemůžeme chápat, kdo je děkan, aniž bychom nechápali roli ostatních představitelů fakulty. Děkan tak nemůže být určen ničím jiným než vzájemnými vztahy, s nimiž se na fakultě či univerzitě setkáváme. Řekneme-li tedy o někom, že je děkan, spojíme s ním *de facto* místo v určitém vztahovém systému. Děkan tedy není nic jiného, než předmět, který je generován pracovními vztahy příslušné univerzity. Z logického hlediska můžeme o tomto předmětu hovořit stejně, jako hovoříme o běžných empirických předmětech. Tak jako říkáme *Sókratés je moudrý*, můžeme i říkat *Děkan je zaměstnanec univerzity*. Výraz *Sókratés* i *děkan* referují k předmětu, který následně vymezujeme predikátem. Z logického hlediska proto není mezi uvedenými větami jistě žádný rozdíl. V ontologickém slova smyslu však musíme být obezřetní. Zatímco výraz *Sókratés* referuje k předmětu, který má samostatnou a nezávislou existenci, referuje výraz *děkan*, jak patrně z našich úvah, k předmětu zcela jiného druhu. Děkan neexistuje samostatně, ale pouze v závislosti na pracovních vztazích, tedy v závislosti na univerzitní struktuře. Děkan je tedy předmět, který nemá samostatnou a nezávislou existenci. Zatímco *Sókratés* je tedy *ens in se*, je děkan v jistém slova smyslu *ens in alio*. Oproti peripatetickému použití této pojmové dvojice je zde však důležitý posun. Pro peripatetiky byl pojem *ens in se* spojen výhradně s první substancí, *ens in alio* s akcidentem. Z našich úvah je však patrné, že za samostatně existující jsoucno, tj. *ens in se*, nemusíme považovat výhradně první substancí, ale i systém. Dále je patrné, že závislým jsoucnem, tj. *ens in alio* nemusí být pouze akcident, ale předmět, který je generován výhradně vztahy prvků v příslušném systému. Takový předmět totiž existuje nikoli o sobě, ale v závislosti na příslušném systému.

Existuje jistě řada vzájemně odlišných vztahových systémů a v závislosti na nich i různé abstraktní předměty. Jednotlivé systémy se mezi sebou liší v prvcích, které jsou uspořádávané (jde vždy o systém něčeho: zaměstnanců, dopravních prostředků atd.) a dále ve vztazích, které uspořádání určují. Na první pohled je patrné, že o systému můžeme

uvažovat nezávisle na příslušných prvcích. Můžeme např. uvažovat o vztahu mezi děkanem a rektorem, aniž bychom tušili, kdo tyto funkce ve skutečnosti zastává. To znamená, že můžeme abstrahovat od prvků, které jsou uspořádávány. Takovouto abstrakcí získáme obecnou strukturu, již mohou odpovídat různé systémy. Fakulty jedné univerzity jsou tak různé systémy, které sdílejí jednu a tutéž strukturu.

Z našeho hlediska je jisté důležité, že jedním ze systémů, s nimiž se běžně setkáváme, je i uspořádání pojmů či tříd pomocí vztahu *více* či *méně*. Jinými slovy: počítáme věci kolem nás a díky tomu přiřazujeme pojmům či třídám určité místo ve vztahovém systému, tj. přiřazujeme jim určité číslo. S tímto systémem se to pak má v celé řadě ohledů podobně jako se systémy jinými. Tak jako pracovní právní vztahy fakulty uspořádávají konkrétní lidi, uspořádávají vztahy *více* či *méně* pojmy či třídy. Tak jako se s konkrétním člověkem spojuje abstraktní předmět určený pracovními právními vztahy, přiřazuje se i pojmu či třídě příslušný předmět, kterým však není pracovní zařazení, ale jednotlivé číslo. Podobně jako lze v běžných systémech abstrahovat od uspořádávaných prvků a získat tím abstraktní strukturu dejme tomu fakulty, lze i v případě systémů pojmů, které jsou uspořádány vztahy *více* či *méně* získat abstraktní strukturu. Této abstraktní struktuře pak říkáme *aritmetika*. O aritmetice lze přirozeně uvažovat podobně, jako uvažujeme o abstraktní struktuře fakulty. To činíme tehdy, když necháme stranou pojmy, které počítáním uspořádáváme, tedy když nepočítáme něco, ale pouze počítáme. Dodejme zde, že matematikové se mnohdy se samotným počítáním nespokojí. Jejich cílem je obecné vyjádření vlastností této struktury. Hovoří o tom, že předmětem aritmetiky je struktura, v níž platí vztah následnosti s počátečním předmětem a v níž platí druhořadový princip indukce.

Naším cílem však není podrobné zkoumání této struktury. Ta nepatří do filosofie, ale do matematiky. Pro nás je důležité, že obrat k systému či struktuře uspokojivě řeší problémy s číslem. Na tomto základě totiž můžeme dát poměrně jasnou odpověď na otázku, zda je číslo předmět nebo vlastnost. Z logického hlediska nás vedou Fregovy argumenty k závěru, že číslo nemůže být ničím jiným než předmětem. Tento závěr by nás však neměl svést k podobnému závěru v ontologické oblasti. Z ontologického hlediska je totiž patrné, že číslo neexistuje samostatně, ale je závislé na příslušném systému. Číslo tak nejsou jako aristotelské první substance samostatně existujícími jsoucnými (*ens in se*), ale existují podobně jako akcidenty (*ens in alio*) v závislosti na jiném,

totiž na systému. Z tohoto důvodu bychom v určitém modifikovaném smyslu mohli říci, že číslo je vlastností příslušného systému. Otázku, zda je číslo předmět, nebo vlastnost, tak nemůžeme zodpovědět, aniž bychom rozlišili příslušné hledisko.

Filosofický ústav AV ČR, v. v. i.
Jilská 1
110 00 Praha 1
Česká republika
Prokop.Sousedik@seznam.cz

LITERATURA

- ARISTOTELES (1949): *Categoriae*, L. Minio-Paluello (ed.), Oxford.
- BENACERRAF, P. (1965): What Numbers Could Not Be, In: *Philosophical Review* 74, 47-73.
- MILL, J. S. (1919): *A System of Logic*, London 1919.
- FREGE, G. (1986): *Grundlagen der Arithmetik*, Hamburg; (Frege, G. (2001): *Základy aritmetiky – Logicko-matematické skúmanie pojmu čísla, do slovenštiny preložil P. Balka*, In: *Organon F – príloha*, Bratislava, Veda).
- HEIDER, D. (2005): Sortální termíny a problém identity. Neoaristotelismus v současné analytické metafyzice, in: *Filosofický časopis* 2005/2.
- KOLMAN, V. (2002): *Logika G. Frega*, Praha, Filosofia.
- LOWE, J. E. (1998): *The Possibility of Metaphysics – Substance, Identity, and Time*, Oxford: Clarendon Press.
- PLATÓN (1905): *Euthyfrón*, Platonis opera sv. I, J. Burnet (ed.) Oxford.
- SHAPIRO, S. (2000): *Thinking about Mathematics – The Philosophy of Mathematics*, Oxford: OUP.
- SHAPIRO, S. (1997): *Philosophy of Mathematics – Structure and Ontology*, Oxford, OUP.
- STRAWSON, P. F. (1964): *Individuals, An Essay in Descriptive Metaphysics*, London: Routledge.
- SUÁREZ, F. (1866): *Disputationes Metaphysicae*, Paris.
- TOMÁŠ AKVINSKÝ (1929-1947): *In Sent.: Scriptum super libros Sententiarum*, P. Mandonnet/M.F. Moos (eds.), Paris.
- TOMÁŠ AKVINSKÝ (1888-1906): *S.Th.: Summa theologiae, Opera Omnia IV-XII* (ed. Leon.), Romae
- TOMÁŠ AKVINSKÝ (1965): *QDP: De potentia*, P.M. Pession (ed.), *Quaestiones disputatae II*, Turin .

TOMÁŠ AKVINSKÝ (1884): *In Phys.: Sententia super Physicam, Opera Omnia II* (ed. Leon.), Romae.

VON NEUMANN, J. (1925): Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal fuer die reine und angewandte Mathematik* 154, s. 219-240.

ZERMELO, E. (1908): Untersuchen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen* 65, 261-281.