

Petra Vopěnky kopernikovský obrat aneb matematika mezi náboženstvím a empirií

věnováno památce profesora Petra Vopěnky (1935-2015)

*Pokud má mít otázka po ospravedlnění nějakého opatření dobrý smysl,
který přesahuje důkaz bezspornosti, pak spočívá jedině v tom,
zda toto opatření vede k odpovídajícímu úspěchu.*

Úspěch je zde nejvyšší instancí, před kterou se musí každý sklonit.

David Hilbert

Matematické nekonečno je převzato ze zkušenosti, i když nevědomky.

*Může tedy být vysvětleno jen ze skutečnosti a ne ze sebe sama,
z matematické abstrakce.*

Friedrich Engels

Věcí všech měrou je člověk...

Prótagorás z Abdér

Evropská tradice praví, že matematika povýšila na vědu díky pythagorejčům, kteří ji vysvobodili ze služebního postavení v obchodě, zeměměřičství, architektuře a řemesle. Přemístili ji do světa nemateriálního, světa viditelného jen našim vnitřním náhledem – teorií. V tomto vyšším světě – „pythagorejském ráji“ – přebývá matematika dodnes. Poté, co se matematika odpoutala od svých kořenů, tj. od světa jevů, přestala důsledně rozlišovat mezi tím, co bylo součástí kvantitativního popisu jevů tohoto světa a tím, co si matematikové vymyslili navíc, aby ony jevy uspořádali do konzistentního systému, matematického obrazu. Matematika se stala hrou v ideálním světě, i když hrou ne zcela samoučelnou. Z pragmatických důvodů si ponechávala vazbu na svět reálných jevů, na fyziku, na aplikovanou geometrii i na svět financí.

V půli dvacátého století zavedl Hans Reichenbach (1891-1953) velmi užitečnou leč dosud nedoceňovanou klasifikaci prvků epistemologického systému.

Rozdělil je na fenomény a interfenomény. Fenomény jsou vnímatelné, nějakým způsobem se nám „samy“ dávají, jeví. Při troše kritičnosti musíme dospět k závěru, že je nevědomě sami tvoříme z našich počitků a zkušeností. (Mohli bychom je považovat i za dílo onoho milostivého Boha, který nám už nadělil jeden veledůležitý jev, totiž celá čísla, čili počty nějakých věcí. Viz slavný výrok Kroneckerův: „Celá čísla stvořil náš milostivý Bůh, ostatní je dílo lidské.“). Naproti tomu interfenomény se nám přímo nejeví, nejsou viditelné ani hmatatelné. Jeví se jen nepřímo tak, že si je zavádíme vědomě sami – a činíme tak často se značným intelektuálním úsilím. Jejich účelem je udělat mezi jevy pořádek, stmelit je v řád, v jednotný teoretický systém, model reality. Tento systém je primárně povahy epistemologické, protože nám umožňuje chápat jevy v souvislosti celku. Umožňuje nám tak vytvořit pochopitelný model patřičné části světa. Když ztotožníme tento model s realitou, můžeme náš systém považovat za „ontologický“, tvrdící „jak věci jsou“. Na rozdíl od fenoménů mají interfenomény zřetelně metafyzický charakter, jsou to v podstatě naše vědomé konstrukty. Přisoudit jim „objektivní“ (a intersubjektivní) existenci je pouze na nás, jejich tvůrcích. Je to záležitost našeho rozhodnutí, opírajícího se o naši vědomou víru i o naše nevědomé předsudky. Konečně jako veškerá ontologie.

Hranice mezi světem fenoménů a interfenoménů není pevná, podobně jako hranice mezi vědomím a nevědomím. Jde spíše o jakýsi epistemologický horizont. Existence každého jevu tedy vychází z nějakých apriorních předpokladů, z rámce nějaké, třeba nevědomované „teorie“. V případě společenských věd si býváme obvykle oné subjektivní vytváření fenoménů a interfenoménů vědomi. UVědomujeme si, že historické či politické události lze vysvětlovat různě, často i protichůdně. V matematice máme ale obvykle zato, že se pohybujeme na jisté půdě. (Konečně Holanďané nazývají matematiku „wiskunde“ – uměním jistoty.) Avšak kdybychom uvažovali kritičtěji, tak bychom museli i matematickým entitám přisoudit různý stupeň „jevovosti“ či reality. Parafrazujeme-li Platóna (jeho podobenství o úsečce, dialog *Ústava*), tak by se v případě matematiky na nejvyšším stupni reality ocitla ona malá celá čísla (počty nějakých věcí), pak snad geometrické útvary. Avšak složité pojmy včetně nekonečných množin by stály na pólu opačném. Nekonečna, jak je uvažují filosofové a matematikové, nejsou jevy. Nikdo je nikdy neviděl, nenapočítal ani jinak nevnímal, maximálně je s jistým mrazením v zádech tušil. Bezprostředně se nám nejeví, jsou našimi konstrukty, interfenomény. Z tohoto důvodu neuznávali nekonečno pythagorejci ani Aristotelés.¹ Změnu přineslo až křesťanství. Byl to svatý Augustin,

¹ Pod nekonečnem mám na mysli nekonečno aktuální. Potenciální nekonečno není nijaký objekt, který by šlo zkoumat, je to jen nemožnost dospět k hranici.

který se obrátil na vševědoucího Boha jako na ručitele existence nekonečna. Tento „Bůh matematiků“ však nebyl tak milostiv, aby aktuální nekonečno vyjevil nám smrtelníkům, aby z něj učinil opravdový jev. Situaci moc nezměnilo, ani když se v rámci teorie množin explicitní zmínka o Bohu vypustila a víra v nekonečno byla vtělena do systému axiomů. Bůh jen sestoupil z vědomí do matematického nevědomí. Matematikům tak nezůstává, než spoléhat na nějaký axiomatický systém, soubor „zjevených pravd“, dogmat, na „matematické náboženství“. Navíc, ať už Bůh existuje nebo ne, těžko by bylo odporovat tomu, že nekonečno ve skutečnosti nezaručuje Bůh, ale jen lidská představa o Bohu.

K zlomovému okamžiku došlo, když si Petr Vopěnka uvědomil, že onen přebujelý interfenomenální charakter nekonečných množin odvádí matematiku od reálného, jevového světa a posiluje v ní prvek samoúčelnosti. UVědomil si, že je to reziduum skrytého náboženského předsudku, od kterého je prospěšné matematiku osvobodit. Vzal Occamovu břitvu a „matematickému světu“ aktuální nekonečna amputoval. Inspirován Husserlovou fenomenologií založil svou Alternativní teorii množin na více fenomenální, více reálné koncepci obzoru a „přirozeného nekonečna“.² Prolomil „zakladatelský mýtus“ teorie klasické a ukázal tak na ontologickou relativnost základů matematiky.³ Tím, že svou teorii nazval „alternativní“, dal najevo, že uznává teorie dvě. (Teorii svou a „klasickou“, která vychází z Cantorových koncepcí.) Tyto teorie se liší především v ontologickém základu, v tom, co definují jako skutečné, existující, jazykem teorie množin „aktualizovatelné“.⁴

Vopěnkův počín představoval skutečný kopernikovský obrat. Kopernik svého času ukázal, že přesun středu vesmíru je nejen možný, ale že představuje z hlediska pochopení „funkce vesmíru“ (tj. z hlediska epistemologie) zásadní zjednodušení. Ukázal však ještě víc, než si byl vědom: Zpochybnil střed jako takový. Vopěnka analogicky ukázal, že matematiku je možné založit i jinak, jednodušeji a srozumitelněji. Avšak stejně jako Kopernik, ani Vopěnka plně nedomyšlil důsledky svého činu, tj. relativitu onoho založení. Připustil sice více teorií množin, avšak „jedna z nich musí být ta pravá, pravdivá“ – jak píše hned na několika místech.

² Navázal tím na starší koncepty intuicionistů a konstruktivistů (L. Brouwer).

³ Skoro souběžně vzniklá nestandardní analýza A. Robinsona dochází k podobným výsledkům, její založení však ještě respektuje přístup klasický.

⁴ Dle mého názoru by byl vhodnější název „teorie alternativních množin“. Ony množiny jsou totiž jiné než u teorií „klasických“. V anglickém překladu (Alternative Set Theory, AST) se ovšem rozdíl stírá.

V roce 2011 učinil Petr Vopěnka další krok: Pro údajnou nekonzistenci vyloučil ze hry klasickou (cantorovskou) teorii množin a svou „alternativní“ teorii přejmenoval na „Novou“.⁵ Provokativně pak deklaroval, že veškerá infinitní matematika vycházející z klasické teorie množin je iluzorní. Nutno se prý vrátit o sto let zpátky. Totiž: „*Existence množiny všech přirozených čísel je tím, na čem stojí a s čím padá téměř veškerá infinitní matematika dvacátého století.*“ Má Vopěnka v tomto bodě pravdu? Může být matematika „špatně“?

Podle mne by matematiku bylo možno založit na jakémkoli metamatemtickém (konzistentním) systému (teorii množin) za podmínky, že její aplikovaná část bude funkční: bude ve shodě s popisovanými (vypočítanými) jevy a bude plodná, tedy schopná nové jevy předpovídat – vypočítat. Ani to, že matematika vychází z chybného základu (jak se pokouší dokázat Vopěnka), ještě neznamená, že je „špatně“. Z logického hlediska i z nepravdy plyne pravda. Navíc ona chyba může být (a nejspíš bude) jen okrajová, tedy bez zásadního přepracování opravitelná, podobně jako byly opravitelné nekonzistence v Cantorově „naivní“ teorii množin. (Oprava spočívala ve vyloučení některých typů množin pomocí systému axiomů, aby se tak zabránilo sporům typu Cantorova nebo Russellova paradoxu.)

Základním kritériem správnosti matematiky (a jakékoli vědy) totiž nejsou její „ontologické základy“, tedy na čem je formálně vybudována. Kritériem správnosti není ani konzistentnost teorie množin, ani otázka „aktualizovatelnosti“ či „neaktualizovatelnosti“ různých nekonečných souborů. Kritériem správnosti je náležité fungování v praxi. Mnohem důležitější než ontologický základ matematiky je její základ epistemologický a pragmatický. Epistemologie je skutečným základem veškeré vědy.⁶ Důležité tedy je, jak matematiku (vědu) ze zkušenosti s fyzickým světem vyvozujeme a zpětně jak se tato matematika (věda) v tomto světě osvědčuje. Ontologické základy (včetně axiomů teorie množin) bývají konstruovány až dodatečně, jak z hlediska historie kolektivní (jak lidstvo k matematice dospělo), tak i z hlediska historie individuální (jak se lidé s matematikou seznamují). Sám Vopěnka tyto ontologické základy (teorii množin se svými nekonečny) s oblibou nazýval „okrasnou novobarošní nadstavbou“. Dával tím najevo, že bez nich se stavba může klidně obejít a dále i to, že ony „okrasné nadstavby“ můžeme měnit podle dobového vkusu.

⁵ Co se týká názvů, sám Vopěnka vnesl do terminologie zmatek („Nová, dříve alternativní teorie“). Navíc název by neměl řešit nejen novost teorie, ani to, zda je teorie jedna, dvě (dvě alternativy), nebo více.

⁶ Mnozí novodobí myslitelé (např. Quine 1968, Bateson 2006) dokonce ontologii s epistemologií ztotožňují.

Bolzano, theologie a matematika

Zajímavou historickou paralelu tvoří myšlenkový vývoj Bernarda Bolzana. Ovlivněn osvěcencstvím a racionalismem pochybuje Bolzano o božském původu biblické zvěsti. Vše může být jen mýtus či blud. Zdálo by se, že pochybuje o samotném základu víry. Svě rozpaky však překonává a stává se z něj dokonce hlasatel oné víry. Pochopil, že údajný „božský původ“ není na víře to nejdůležitější. Podstatné je dobro, které víra lidstvu přináší. To, co se zdá být základem skutečným, je jen základem formálním, pravý základ spočívá jinde. Tedy „ne pravda, ale užitečnost“, ⁷ přesně tak, jak hlásá filosofie pragmatismu. Kdyby se žádné zázraky nestaly, církev by to nesložilo. (Konečně protestanti jsou k existenci zázraků skeptičtí.) Jestliže však náboženství nebude mít lidem co říci, nebude jim poskytovat ono „dobro“, z chrámů se stanou mrtvé památky a mrtvá bude i sama církev. Síla i slabost víry spočívá v životní praxi a praxe, která „lidi povznáší“, která je jim prospěšná, vede je k úspěchu, je i tím pravým základem a argumentem víry a náboženství.

... je celkem docela lhostejné, vznikla-li určitá nauka církve teprve později, ba i nepřispěl-li k jejímu vzniku a rozšíření svým dílem nějaký blud.

Nebyl jsem dokonce ani úplně přesvědčen o pravdivosti a božském původu náboženství, jehož hlasatelem jsem se měl stát...

... v náboženství, zejména v božím zjevení, nejde vůbec o to, jaká je věc sama o sobě, ale naopak jen o to, jaká představa o ní nás nejvíce povznáší.

B. Bolzano⁸

...objektivní pravda, v níž funkce uspokojování lidských přání vůbec nehraje žádnou úlohu, neexistuje. ... nezávislá pravda představuje jen mrtvé srdce prázdného stromu.

W. James, *Pragmatismus*

Podobně i v matematice je podstatné to, co matematika lidstvu přináší. Kdyby matematikové zjistili, že teorie množin je blud, stavba matematiky se nezhroutí. Kdyby ale matematika nebyla úspěšná v praxi, kdyby neposkytovala lidstvu „dobro“, stala by se z ní samoučelná hra pro pár fandů, něco jako je šach, dáma či go. Síla matematiky je v životní praxi a praxe – tedy aplikovaná matematika – je tím nejskutečnějším základem, nejopravdovějším „bohem matematiky“.

⁷ Není jistě bez zajímavosti, že mezi Bolzanovy žáky patřil i Václav Hanka (1791-1861) a Josef Linda (1789?-1834), pravděpodobní autoři *Rukopisu královédvorského* a *Rukopisu zelenohorského*.

⁸ Srov. Bolzano (manuskript, 37-38).

Závěr

Teorie množin, ono formální podbudování matematiky, je monumentální stavbou, na které si matematici pocvičili své umění. Úsilí, které této stavbě věnovali a „ráj“, který si tím otevřeli, tvoří psychologickou překážku, která brání pochopit, že tato teorie je základem pouze formálním. Podstatnější než toto ontologické založení je založení epistemologické, které vychází ze vzájemné reflexe matematiky a veškerého světa. Měli bychom proto být otevření k různým možným pojetím ontologických základů matematiky a tedy i k různým teoriím množin. Na to právě významně upozornila alternativní teorie množin Petra Vopěnky. Avšak neměli bychom ztrácet čas a hledat tu jedinou „pravdivou“ teorii. Pravd může být totiž více. A neměli bychom úspěšné teorie zavrhnout hned, jakmile najdeme drobný rozpor. Může být totiž snadno opravitelný.

Peter Zamarovský

zamarovs@fel.cvut.cz

Literatura

- BATESON, G. (2006): *Mysl a příroda, nezbytná jednota*. Praha: Malvern.
- BERKA, K. (1981): *Bernard Bolzano*. Praha: Horizont.
- BOLZANO, B. (manuskript): *Vlastní životopis*. Dostupné: <http://www.cs.cas.cz/bolzano/node/221>.
- ENGELS, B. (1952): *Pana Evžena Důbringa převrat vědy*. Praha: Svoboda.
- LOUŽIL, J. (1978): *Bernard Bolzano*. Praha: Melantrich.
- QUINE, V. O. (1968): Ontological Relativity. *Journal of Philosophy* 45, No. 7, 185-212.
- REICHENBACH, H. (1973/1951): *The Rise of Scientific Philosophy*. University of California Press.
- VOPĚNKA, P. (2004): *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Praha: Práh.
- VOPĚNKA, P. (2004): *Horizonty nekonečna*. Praha: Moraviapress.
- VOPĚNKA, P. (2011): *Velká iluze matematiky XX. století a nové základy*. Plzeň: Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni, Koniáš.
- VOPĚNKA, P. (2014): *Prolegomena*. Praha: Karolinum.