

Otávio Bueno - Øystein Linnebo (eds.): *New Waves in Philosophy of Mathematics*

Basingstoke, Palgrave Macmillan 2009, 320 s.

New Waves in Philosophy je názov novej edície, ktorej cieľom je ponúknuť záujemcom o filozofiu prehľad aktuálnych tém a problémov v samostatnom vydaní pre každú jednotlivú oblasť filozofie. Profil cieľového čitateľa edície je veľmi široký – od laikov alebo začínajúcich študentov filozofie až po vzdelaných odborníkov, ktorí sa chcú dozvedieť viac o aktuálnej situácii vo filozofických odboroch, v ktorých nie sú takí zahľbení. Rád by som stručne predstavil jeden diel série, ktorý je venovaný oblasti filozofie matematiky.

Medzi ciele kompletnej edície môžeme považovať aj jej motivačný charakter pre budúcnosť a potenciál filozofie: Predstaviť staršie a nedoriešené otázky v novom svetle, možnosti nových formálnych systémov alebo poukázanie na nové prepojenia medzi jednotlivými aktuálne riešenými problémami. Myslím, že tento cieľ sa autorom podarilo plne rešpektovať a naplniť, či už výberom problémov, predstavením rôznych prístupov i návrhov riešení, rovnako otvorenosťou záverov jednotlivých príspevkov. Niektorí autori priamo vyzývajú na zapojenie sa do aktívneho výskumu a stanovujú určité rámce, prípadne len náznaky pre nové možnosti a spôsoby riešenia.

Napriek takémuto motivačnému úvodu a náznakom nenáročného spracovania jednotlivých častí edície, môžem konštatovať, že v prípade recenzovaného dielu z filozofie matematiky to tak úplne neplatí. Mnohé príspevky si vyžadujú prehľad nielen v základných filozofických disciplínach ako epistemológia, metafyzika alebo dejiny filozofie, ale aj oboznámenosť napríklad s niektorými formálnymi systémami a modernými teóriami a prístupmi z oblasti logiky a metalogiky. Niektorí autori zámerne zvolili jednoduchšie a otvorenejšie problémy, avšak ako to už vo filozofii býva – pri precíznom a poctivom rozpracovaní i toho najľahšieho problému sa vášnivý snaživec neľahko stáva odborník s prehľadom takmer celej oblasti daného problému.

V súčasnosti môžeme filozofiu matematiky pokladať za samostatnú a plnohodnotnú oblasť filozofie, práve preto medzi jednotlivými dielmi edície môžeme nájsť jeden kompletne venovaný filozofii matematiky – *New Waves in Philosophy of Mathematics*. V dňoch 24. – 26. apríla 2008 sa na pôde University of Miami uskutočnila konferencia s rovnakým názvom.

Na tejto konferencii boli predstavené príspevky, ktoré po prepracovaní autormi na základe podnetov z konferencie, tvoria uvedený zborník štúdií. Hlavné požiadavky na samotné práce boli: zhodnotiť aktuálnu situáciu vo filozofii matematiky, vyzdvihnúť pravý prínos pre filozofiu i matematiku, ako aj naznačiť smerovanie tejto oblasti filozofie.

Vo filozofii matematiky sme zvyknutí, že štúdie autorov sú viac publikované v časopisoch alebo v zborníkoch ako samostatne. Väčšie práce, ako napríklad *Philosophy of Mathematics Today* (Schirn, M. (ed.) (1998): *The Philosophy of Mathematics Today*. Oxford: Oxford University Press) majú svojim charakterom ako aj autormi podobu antológie. Ide skôr o monumentálne diela dôležitých a hlavne prelomových prác od známych autorov. Ak by sme chceli porovnať recenzované dielo s takýmito prácami nebolo by to veľmi správne. Napriek tomu náš zborník zdieľa s veľkými antológiami niekoľko pozitív. Tým najväčším je to, že sa editorom aj autorom podarilo do krátkych trinástich štúdií vtesnať všetky najvýznamnejšie smery a problémy z oblasti filozofie matematiky. Čitateľ tak môže nájsť prepojenia medzi rôznymi problémami a riešeniami ako i zaujímavé porovnania či už vývoja určitých prístupov alebo odlišných variantov toho istého smeru.

Čo treba vyzdvihnúť, je úvodná štúdia od editorov tohto dielu. Ponúkajú v nej veľmi stručný, ale presný historický prehľad hlavných smerov a prístupov vo filozofii matematiky. Nezainteresovaný čitateľ alebo nováčik určite uvíta takýto úvod. Editori úvod vystavali tak, aby predstavili aspoň rámcovo oblasti, mená a problémy, o ktorých sú samotné štúdie v knihe. Autori sú mladí, ale aktívni v oblasti vedy i v publikačnej činnosti. Mnohí pôsobia aj na školách a často svoje postrehy, úvahy a skúsenosti so študentmi spomínajú vo svojich príspevkoch.

V recenzii sa nebudem venovať každej štúdiu, ale vyberiem len dve, ktoré ma zaujali, prípadne som ich pokladal za reprezentatívne pre niektorú z prezentovaných oblastí.

Tento diel – *New Waves in Philosophy of Mathematics* – tvorí trinásť štúdií tematicky rozdelených do piatich častí. Prvá časť je zameraná na tradičné smery a prístupy vo filozofii matematiky; nesie názov *Prehodnotenie ortodoxie vo filozofii matematiky* a obsahuje dve štúdie. Prvú z nich – R. Cook: *Nové vlny na starej pláži: Neofregeovská filozofia matematiky dnes* – rozoberiem v samostatnej časti podrobnejšie. V druhej (A. Paseau: *Redukcia aritmetiky na teóriu množín*) autor kriticky porovnáva Benacerrafov názor, že jednou z vecí, čo číslo nemôže byť, je množina, s Quinovým prístupom redukcionizmu čísel na množiny.

Druhá časť – *Problém realizmu v matematike* – zahŕňa príspevky k známej problematike realizmu a antirealizmu. Zaujímavým prínosom do tejto diskusie dvoch protisebe stojacich prístupov je prvá štúdia od O. Buena *Matematický fikcionalizmus*. V druhom príspevku s názvom *Prauda v matematike: Problém pluralizmu* P. Koellner kritizuje Carnapovu krajnú verziu pluralizmu a navrhuje obhájiteľnejšiu alternatívu; pomáha si určitými porovnaniami z fyziky a taktiež riešeniami podobných problémov z oblasti teórie množín. Posledný príspevok druhej časti, „*Algebraické*“ *prístupy k matematike*, patrí nežnému pohlaviu; autorka M. Leng naznačuje riešenie známych Benacerrafových problémov pre platonistický prístup vo filozofii matematiky, navrhované riešenie však zakončuje vykreslením nových problémov, ktoré vznikajú pri aplikácii vybraných algebraických prístupov. Zaujímavou spoločnou črtou príspevkov tejto druhej časti je odvolávanie sa alebo poukazovanie na spojitosť matematiky s inými empirickými vedami a využívanie tejto črty matematiky v prospech prezentovaných názorov.

Tretia časť – *Matematická prax a metodológia matematiky* – obsahuje tri veľmi zaujímavé štúdie. Stať A. Bakera *Matematické náhody a koniec explanačie* sa venuje problematike vedeckej explanačie v matematike. Podľa autora ide o oblasť, ktorú väčšina filozofov matematiky bezdôvodne obchádza. Sám Baker predstavuje svoju teóriu, ktorej základným pojmom je trochu nezvyčajne tzv. náhodný matematický fakt. Celá štúdia je veľmi pekne systematicky spracovaná, na ilustráciu a detaily pripája i ukážkové prípadové štúdie. Ďalšou štúdiou z oblasti matematickej metodológie je *Používanie nekonzistentnej matematiky* od M. Colyvana. Tejto práci sa podrobnejšie venujem v samostatnej časti. C. Pinnock nás vo svojom príspevku *K filozofii aplikovanej matematiky* prevedie rozličnými aspektmi praktickej matematiky a ukáže nám niektoré dôležité rozdiely voči teoretickej „čistej“ matematike. Cieľom je zamerať pozornosť filozofov matematiky aj na jej praktický aspekt.

Do štvrtej časti zborníku – *Jazyk a psychológia matematiky* – editori zaradili tri štúdie, v ktorých autori pristupujú k problémom vo filozofii matematiky zo strany jazyka matematiky a jeho interpretácie, ako aj z hľadiska „epistemológie“. V prvej práci s názvom *Formálne nástroje a filozofia matematiky* autor T. Hofweber poukazuje na obmedzené možnosti analýzy jazyka matematiky z filozofického hľadiska. Práve koncepcie mnohých základných filozofických problémov určujú obmedzenia prístupu k skúmaniu formálneho jazyka matematiky. Autor ďalšej štúdie Ø. Linnebo (*Individualizácia prirodzených čísel*) rieši problém identity a jazykovej refe-

rencie na prirodzené čísla. Porovnáva dve koncepcie individualizácie/vyčlenenia prirodzeného čísla: logicistický prístup cez kardinality čísel a prístup štrukturalistov cez ordinál konkrétneho čísla v postupnosti čísel. Linnebo sa prikláňa k systému štrukturalistov, uvádza mnohé námietky a argumentuje proti Fregeho koncepcii. V druhej časti štúdie formuluje vlastnú verziu vyčleňovania prirodzených čísel prostredníctvom rádovej pozície, ktorej výsledkom je číslo ako objekt s určitým ontologickým statusom. A. Rayo v treťom príspevku *K trivialistickému vysvetleniu matematiky* hovorí o epistemologickom statuse matematických tvrdení, ktoré podľa neho sú buď triviálne pravdivé, alebo nepravdivé. Kľúčovým pojmom je charakter scenára, v ktorom dané tvrdenia zohrávajú svoju úlohu. Ak je scenár zrozumiteľný, tak v prípade pravdivých tvrdení poskytuje plnohodnotné matematické poznatky.

Posledná piata časť je venovaná dvom veľmi úzko prepojeným disciplinám – *Od filozofickej logiky k filozofii matematiky*. Dve štúdie, ktoré sú zaradené do tejto sekcie, ponúkajú čitateľovi odvážne intelektuálne dobrodružstvo. Obe štúdie sú technicky i čitateľsky viac náročné, ako to bolo v prípade ostatných prác.

V stati *O formálnej a neformálnej dokázateľnosti* sa autor H. Leitgeb zaoberá dvoma „spôsobmi“ dôkazu a skúma rozličné problémy intuície v epistemológii matematiky. Pod formálnou dokázateľnosťou rozumie štandardnú verziu rozpracovanú vo všetkých ohľadoch teóriou dôkazu. Alternatívny dôkaz chápe, podobne ako neskorý Gödel, v intuitívnom význame a dokázateľnosť touto formou dôkazu nazýva neformálnou. Veľkú časť štúdie venuje aplikácii modálnych logík (S4) práve na rôzne varianty neformálnych dôkazov. Posledná štúdia zborníka – G. Uzquiano: *Kvantifikácia bez univerza* – je technická „lahôdka“ nakoniec. Autor skúma známe paradoxy teórie množín (neurčité extenzie niektorých pojmov) a ich dopad na filozofické koncepcie matematiky. Zároveň vďaka okliešteniu štandardnej teórie množín ponúka určité riešenie pre zachovanie absolútnej všeobecnosti matematických tvrdení.

Teraz podrobnejšie opíšem obsah avizovaných dvoch statí. Prvou z nich je: R. T. Cook, *Nové vlny na starej pláži: Neofregeovská filozofia matematiky dnes*. V tejto štúdii sa autor snaží nájsť možné vysvetlenie a obhájenie platonizmu v matematike. Nejde mu o ontologické aspekty, vôbec nepochybuje o existencii abstraktných objektov, ale zameriava sa na základné epistemologické otázky platonizmu. Riešenie vidí vo Fregeho projekte logicizmu a v jeho modernejšej verzii neologicizmu. Štúdia je spracovaná na veľmi slušnej úrovni, je jednou z tých, ktorej môže rozumieť aj nie veľmi

zainteresovaný čitateľ. V častiach, v ktorých opisuje konštrukcie systému logicizmu alebo neologicizmu, pripája aj veľmi zrozumiteľné vysvetlenie. Autor si dal záležať na detailoch a snaží sa neponechať nič na vágnych vyhláseniach. Táto štúdia je vhodná, ako veľmi stručný úvod do logicizmu a neologicizmu.

Značnú časť štúdie predstavuje viac-menej štandardný opis spolu s vysvetlením Fregeho projektu. Nijako sa nesnaží obhájiť celý projekt, priamo poukazuje na nedostatky a patričné dôsledky použitia Základného zákona V, ktorý – ako je známe – viedol k Russellovmu paradoxu. Poukazuje na svoje skúsenosti so študentami, ktorí javia neochotu zaoberať sa niečím takým zjavne neúspešným, dokonca vôbec nerozumejú neologicizmu, ktorý si dal za cieľ naplniť Fregeho zámer.

Veľký význam a prínos nachádza v ontológii a epistemológii celého projektu logicizmu. Fregeho cieľ – ukázať, že tvrdenia matematiky – základná aritmetika a analýza, sú apriori a analytické, teda majú všeobecnú platnosť, spolu s metódou, ako tento cieľ dosiahnuť, pokladá za úplne správny. Veľkú úlohu neologicizmu vidí v oprave celej technickej časti. Po zjednodušujúcom, ale korektnom predstavení Fregeho teórie analyzuje a vysvetľuje prístup neologicistov. Postupne hľadá spoločné i odlišujúce vlastnosti oboch systémov. Taktiež upozorňuje na tradičný omyl, že logicisti pracujú s kategóriami analytickosť – syntetickosť z hľadiska sémantiky podobne ako Kant alebo Quine. Frege ako aj neologicisti používajú tieto kategórie práve v epistemologickom zmysle. Rozdiely medzi Fregem a novými neologicistickými teóriami nachádza už v základoch a hlavných kritériách pre jednotlivé systémy. Všeobecne sa uvádza, že logicizmus aj neologicizmus sú prístupy vo filozofických základoch matematiky, ktoré prijímajú východiskovú tézu: Aritmetiku ako analytickú disciplínu je možné vybudovať alebo odvodiť čisto z logiky (logických zákonov) a vhodných definícií. Zatiaľ, čo Frege pod logikou chápe svoju priekopnícku verziu PL2 rozpracovanú v *Begriffsschritte*, tak neologicisti pracujú s viacerými variantmi, ako aj so súčasnou štandardnou verziou PL2. Práve Fregeho verzia PL2 v *Grundgesetze* zahŕňala aj osudný Základný zákon V. Pokiaľ ide o vstupné definície pre budovanie logického systému aritmetiky, tak podobne nepanuje zhoda medzi oboma verziami logicizmu. Frege akceptuje len explicitné definície, hoci je preňho kľúčový tzv. Humov princíp, ten však odvodzuje v rámci svojho systému z problematickeho 5. zákona. Neologicisti medzi definície radia aj implicitné definície, teda aj niektoré abstraktné princípy (Humov princíp).

V závere autor konštatuje na základe svojho skúmania, že Fregeho originálny projekt spolu s moderným prepracovaním má potenciál plnohodnotne zodpovedať epistemologické otázky kladené na platonistickú koncepciu matematiky.

Druhou staťou je: M. Colyvan, *Používanie nekonzistentnej matematiky*. V dejinách vedy majú nekonzistentné matematické teórie veľmi špecifickú úlohu. Na jednej strane sú chybné, čo v tejto oblasti by mohlo znamenať úplnú diskvalifikáciu, na strane druhej sa o ne vedci opierali niekoľko desaťročí a umožnili im dopracovať sa k dôležitým a prelomovým výsledkom. Táto štúdia sa venuje dvom hádankám, ktoré vznikajú pri aplikácii teórií s nekonzistentnou matematikou. Je evidentné, že autor sa tejto problematike venuje vo väčšom rozsahu a táto štúdia je len malým výsekom z jeho bádania. Problémy, ktoré načrtáva v tejto práci, nemajú dopad len na oblasť matematiky, ale vďaka aplikácii matematiky v iných vedách, sa tieto problémy dotýkajú filozofie a metodológie vedy. Autor spolu s ďalšími nadšencami pracuje na komplexnejšej teórii, ktorú je možné pozorovať v pozadí celej štúdie. Práve tento aspekt v takej zložitej problematike neumožňuje kompletne a detailne rozpracovať celý systém na niekoľkých stranách. Podľa mňa to samotnej štúdii príliš nepomáha. Jej cieľ je viac-menej naznačiť určité problémy, veľmi zjednodušene ponúknuť potenciálne riešenia a na záver motivovať mladú krv k ďalšiemu podrobnejšiemu štúdiu. Určite môžem vyzdvihnúť výber konkrétnych hádaniek pre túto štúdiu a zvolené príklady spolu s ústretovým vysvetlením. Ďalším veľkým pozitívom je filozofický nádych a hĺbka celej problematiky, pre tých „metafyzicky“ založených je to manna. Samozrejme, v prípade detailnejšieho výskumu si to vyžaduje nemalé technické zručnosti. Autor používa ako východisko modely nekonzistentných teórií interpretované v parakonzistentných logikách. Konkrétne táto štúdia má viac „epický“ ako technický charakter.

Prvá hádanka je o existenčných záväzkoch v prípade nekonzistentných teórií. Ak prijmeme v určitej forme systém nekonzistentnej matematiky, musí nás to zaväzovať k prijatiu existencie nekonzistentných abstraktných objektov? Ako ukážkový príklad analyzuje rané verzie kalkulu v podaní Newtona a Leibniza. V oboch prípadoch šlo o nekonzistentné teórie, dokonca so širokým uplatnením. Colyvan uvádza, že úspech prvotných verzií kalkulu spočíval v značnej podobnosti k pravému, konzistentnému kalkulu, ktorý matematici formulovali až o 150 rokov neskôr. Autor upozorňuje na význam nekonzistentných teórií, ktoré do určitej úrovne správne vysvetľujú realitu. Vyzýva vedcov i filozofov, aby pre-

hodnotili svoje postoje voči podobným teóriám ako aj striktnému prístupu k prijímaným ontologickým záväzkom. Záver hádanky má voľnejší charakter a určite ho nemôžeme nazvať serióznym riešením. Konštatuje podobnú dôležitosť konzistentných i nekonzistentných teórií pre vedu a vyzýva na podrobnejší výskum v tejto oblasti.

Druhá hádanka je akoby vyššou úrovňou tej prvej. Colyvan sa zameriava na filozofické aspekty aplikovanej matematiky pri použití nekonzistentných matematických teórií. Matematika má široké uplatnenie v prírodných vedách. Pri empirickom výskume predpokladáme konzistentnosť reality. Čo v prípade, ak v tejto oblasti aplikujeme – ako už bolo povedané – pre matematiku užitočné nekonzistentné teórie? Zvrátíme tým jasné východisko o konzistentnom fyzickom svete? Ak aplikácia nekonzistentnej matematickej teórie v niektorej empirickej vede vedie k správnym a overiteľným poznatkom, znamená to, že určité štruktúry reality sú v izomorfnjej relácii k objektom, s ktorými operuje daná nekonzistentná teória. Colyvan rozpracováva ďalšie možnosti, ako vysvetliť takéto aplikácie matematiky, a ponúka niekoľko návrhov, ako riešiť tento problém. Autor na konci štúdie vyzýva na podrobnejšiu analýzu problematiky nekonzistentnej matematiky a jej aplikácie vo vede.

Na záver je potrebné podotknúť, že niektoré štúdie sú veľmi originálne, uvádzajú mnohé problémy a riešenia do nových súvislostí, dokonca môžeme povedať, že sú súčasťou aktuálneho smerovania klasických projektov a naozaj sa stávajú novým vlnením na kamenistej pláži filozofie matematiky.

Ďalšie príspevky spĺňajú požiadavky a charakter edície – byť akýmsi aktuálnym úvodom alebo prehľadom do jednotlivých oblastí filozofie. Plnohodnotne poskytnú a vysvetlia najdôležitejšie výsledky práce filozofov z posledných rokov a nenáročným štýlom prevedú čitateľa po riviére filozoficky atraktívnych problémov, miestami ponúknu i polemicky motivačné závery.

Tomáš Oriechík