

ÚVOD DO PROBLEMATIKY METODOLÓGIE VIED (IV)

Pavel CMOREJ

DÔKAZY A ARGUMENTY

DÔKAZY

Dôvod a dôsledok. Jedným z najvýznamnejších druhov uvažovania je dokazovanie. Pod **dokazovaním** sa zvyčajne rozumie myšlienková činnosť, často spojená s písaním (niekedy aj s kreslením, rysovaním a inými aktivitami), ktorou sa usilujeme zdôvodniť nejaké tvrdenie pomocou iných tvrdení a tým sa presvedčiť o jeho pravdivosti, prípadne o nej presvedčiť niekoho iného. **Zdôvodniť** tu znamená uviesť *pravdivé dôvody*, z ktorých dokazované tvrdenie *vyplýva*, a odvodiť ho z nich. V niektorých vedách, najmä v logike a matematike, sa zdôvodňujú nielen výroky, ale aj ich formy. Cieľom dokazovania výrokovej formy je ukázať, že je vždypravdivá, t.j. že pri každom ohodnotení premenných nadobúda hodnotu pravda. **Dôvod** výrokového výrazu V je množina výrokových výrazov, t.j. výrokov alebo ich foriem, z ktorých vyplýva V.¹ Vyplývajúci výraz V sa nazýva **dôsledkom** tejto množiny.

Niekedy sa mlčky predpokladá, že táto množina obsahuje len také výrokové výrazy, od ktorých závisí vyplývanie výrazu V z tejto množiny, teda že sa v nej nevyskytujú redundantné prvky. Ak množina, z ktorej vyplýva V, neobsahuje redundantné výrokové výrazy, za dôvod výrazu V sa zvyčajne pokladá nielen *množina* výrazov, z ktorej vyplýva V, ale aj jednotlivé *prvky* tejto množiny. To znamená, že za dôvod výroku či formy V sa v takom prípade nepokladá len množina $\{W_1, \dots, W_n\}$, z ktorej vyplýva V, ale aj každý z jej prvkov W_1, \dots, W_n , hoci ani jeden z týchto prvkov nemusí byť dôvodom výrazu V v tom zmysle, že by z neho samého vyplýval výraz V. Inak povedané, výraz W_1 sám osebe nemusí – ale môže – byť dostatočným dôvodom výrokového výrazu V. Toto chápanie dôvodu sa od prvého chápania líši, pretože za dôvody sa tu pokladajú aj výrokové výrazy, z ktorých V nevyplýva, a to len preto, že sú prvkami množiny, ktorá je jeho dôvodom v prvom zmysle. Napríklad množina výrokov $\{Ak W_1, tak W_2, W_1\}$ je dôvodom výroku W_2 v prvom zmysle, lebo tento výrok z nej vyplýva, ale ani výrok “Ak W_1 , tak W_2 ”, ani výrok W_1 sám osebe nemusí byť takým dôvodom výroku W_2 , pretože tento výrok nemusí vyplývať ani z jedného z

¹ Predpokladom adekvátneho pochopenia tohto pokračovania je oboznámenosť s obsahom článku [1]. K pojmu vyplývania pozri [1], 330–337.

nich. Napriek tomu sa niekedy nazývajú dôvodmi tohto výroku, lebo sú prvkami množiny, ktorá je jeho dôvodom, pričom sa implicitne predpokladá, že táto množina neobsahuje redundantné prvky, irelevantné pre uvažovaný vzťah vyplývania výroku V z množiny $\{W_1, \dots, W_n\}$. Výraz "dôvod" budeme používať v oboch významoch a z kontextu bude jasné, či v pôvodnom, prvom alebo v odvodenom, druhom zmysle.

Okrem sémantického chápania dôvodu a dôsledku jestvuje aj voľnejšie pragmatické chápanie, podľa ktorého dôvodom je ľubovoľná množina výrokov, ktorými chceme podpísať nejaký iný výrok, ktorý z tejto množiny môže, ale nemusí vyplývať. Väzba medzi dôvodmi a výrok, ktorý nimi zdôvodňujeme, môže byť v tomto prípade slabšia než medzi dôvodom a z neho *vyplývajúcim* dôsledkom. Týmto chápaním dôvodu sa tu nebudeme ďalej zaoberať.

Logiku a metodológiu vied nezaujímajú samo dokazovanie, teda mentálna činnosť vykonávaná pri dokazovaní, ale iba jej výsledok, dôkaz formulovaný v nejakom jazyku. Výsledkom dokazovania je zvyčajne istá postupnosť výrokových výrazov, medzi ktorými sú určité vzťahy. V logike sa používajú a skúmajú aj dôkazy, ktoré nemajú tvar postupnosti, ale stromu (tzv. stromové dôkazy). V našom výklade našu pozornosť zúžime na *lineárne dôkazy*, predovšetkým na dôkazy zložené z *výrokov*. Dôkazy, v ktorých sa vyskytujú aj alebo len výrokové formy, sa používajú najmä v logike a matematike a zvyčajne sa dajú nahradit' dôkazmi zloženými zo samých výrokov.

Odvodenie. Stavba dôkazu závisí od logickej stavby dokazovaného výroku a výrazov, ktoré sa v ňom vyskytujú, nie je však nimi určená celkom jednoznačne, lebo ten istý výrok možno zvyčajne dokázať viacerými spôsobmi. Z hľadiska logiky dôkaz výroku V je istý abstraktný útvar, a to rad, resp. postupnosť výrokov, ktorá spĺňa určité podmienky dané jednak dokazovaným výrokom V , jednak spôsobom, ktorým sa výrok V dokazuje. Našu pozornosť sústredíme na štyri najpoužívanejšie spôsoby dokazovania, ktorým zodpovedajú štyri druhy dôkazov. Pri budovaní dôkazov sa používajú pravidlá, pomocou ktorých sa v dôkaze z daných členov postupnosti odvodzujú jej ďalšie prvky. Za dôkaz sa v logike pokladá iba taká postupnosť, v ktorej sa pri odvodzovaní uplatňujú výlučne deduktívne odvodzovacie pravidlá, čiže pravidlá, v ktorých záver vyplýva z ich premís, pričom sa implicitne predpokladá, že z nich vyplýva logicky. Domnievame sa, že tento predpoklad nie je nevyhnutný a pod **deduktívnym odvodzovacím pravidlom** budeme ďalej rozumieť ľubovoľné deduktívne odvodzovacie pravidlo, ktorého záver vyplýva z premís logicky alebo mimologicky.² Pripomíname, že odvodzovacie pravidlo je úsudková schéma zložená z foriem premís F_1, \dots, F_n a formy záveru F , pomocou ktorej možno z množiny výrokov formy F_1 , formy F_2, \dots a formy F_n odvodiť výrok formy F .³ V logických pravidlách sa okrem premenných (zátvoriek a interpunkčných znamienok) vyskytujú iba logické

² Pojem vyplývania a logického vyplývania vymedzujeme v [1], 330–331, 333–335.

³ Pozri [1], 327–328.

konštanty, v mimologických aj mimologické konštanty. Ako sme už uviedli, vyplývanie záveru z premís závisí od významu týchto konštant.⁴

Existuje nekonečne veľa odvodzovacích pravidiel, z ktorých sa pri odvodzovaní používa a pri rozvíjaní teórie uplatňuje iba malý konečný počet **základných pravidiel**, ktoré sa dajú vybrať tak, aby sa pomocou nich dalo zdôvodniť nekonečne veľa ďalších, **odvodených pravidiel**. Používanie týchto pravidiel môže odvodzovanie a dokazovanie výrazne skrátiť, ale z čisto teoretického hľadiska nie je nevyhnutné, lebo každé odvodenie, v ktorom sú použité nejaké odvodené odvodzovacie pravidlá, možno nahradiť odvodením, v ktorom sa uplatňujú iba základné pravidlá. Množina základných odvodzovacích pravidiel nie je vo všetkých teóriách a úvahách tá istá. V rôznych úvahách či teóriách sa môžu používať rôzne množiny týchto pravidiel. Ich výber závisí predovšetkým od logických a mimologických konštant, ktoré obsahuje jazyk teórie či úvahy.

Nech V je výrok formy F , V_1 výrok formy F_1 , ... a V_n výrok formy F_n . Výrok V , ktorý možno odvodiť z výrokov V_1, \dots, V_n pomocou nejakého *základného* odvodzovacieho pravidla $F_1, F_2, \dots, F_n \mid F$ sa nazýva **priamo odvoditeľný** z výrokov V_1, \dots, V_n . Predpokladajme, že $R_1, R_2 \dots$ sú základné *deduktívne* odvodzovacie pravidlá. Týmito pravidlami sú dané isté vzťahy medzi prvkami (výrokmi) dôkazu, ktoré spočívajú v priamej odvoditeľnosti nejakého výroku z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou niektorého z pravidiel $R_1, R_2 \dots$. Presnejšie, ak V, V_1, \dots, V_n sú výroky, ktoré sa vyskytujú v dôkaze, tak medzi výrokom V a výrokmi V_1, \dots, V_n existuje vzťah daný pravidlom R_i práve vtedy, keď V je priamo odvoditeľný z V_1, \dots, V_n pomocou pravidla R_i .

Pomocou pojmu priamej odvoditeľnosti teraz vymedzíme pojem (deduktívneho) odvodenia výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j . Ako sme už uviedli, na rozdiel od *odvodzovania*, ktoré je istou činnosťou vykonávanou ľuďmi alebo počítačmi, **odvodenie** je abstraktná postupnosť výrokových výrazov spĺňajúca určité podmienky, ktoré uvedieme v definícii odvodenia.⁵ Túto postupnosť môžeme pokladať za jazykovú formuláciu uskutočneného alebo možného odvodzovania v abstraktnej, idealizovanej podobe. Pri odvodzovaní, a teda aj v odvodení, sa uplatňujú isté odvodzovacie pravidlá, ktoré môžu byť deduktívne alebo nededuktívne. Ak *všetky* pravidlá uplatnené v odvodení sú deduktívne, budeme ho nazývať **deduktívnym odvodením**. Pretože v tejto časti sa budeme zaoberať iba postupmi, v ktorých sa používajú len deduktívne pravidlá, prívlastok "deduktívne" budeme často vynechávať.

Postupnosť výrokov D_1, \dots, D_j je **deduktívnym odvodením výroku V z výrokov množiny $\{A_1, \dots, A_j\}$** ($j \geq 1$) práve vtedy, keď 1. pre každý člen D_i uvedenej postupnosti platí, že a) D_i je niektorý z výrokov A_1, \dots, A_j alebo b) D_i je priamo odvoditeľný z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou nejakého deduktívneho

⁴ Pozri [1], 331–332.

⁵ Pozri [1], 329.

odvodzovacieho pravidla R_i a 2. $D_z = V$. Namiesto výrazu “z výrokov množiny $\{A_1, \dots, A_j\}$ ” budeme používať aj skratku “z výrokov A_1, \dots, A_j ”.

Odvodenie výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j skonštruujeme tak, že ako prvý člen odvodenia vyberieme jeden z výrokov množiny $\{A_1, \dots, A_j\}$ a potom pridávame buď ďalšie prvky tejto množiny, alebo výroky, ktoré sú priamo odvoditeľné pomocou nejakého odvodzovacieho pravidla z predchádzajúcich členov postupnosti, a to dovtedy, kým tak nedospejeme k výroku V .

Medzi deduktívnym odvođením výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j a implikáciou

(AV) Ak $(A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j)$, tak V

existuje veľmi významný vzťah, ktorý zachytáva toto tvrdenie:

(TO) Ak existuje (deduktívne) odvodenie výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j , tak implikácia (AV) je pravdivý výrok.

Zdôvodnenie je veľmi prosté. Ak antecedent implikácie (AV) je pravdivý, všetky prvky (deduktívneho) odvodenia výroku V z tohto antecedenta vrátane výroku V sú tiež pravdivé, lebo sú odvođené pomocou deduktívnych pravidiel, ktoré vedú od pravdivých premís vždy k pravdivému záveru. Preto nemôže nastať situácia, v ktorej by antecedent implikácie (AV) bol pravdivý a jej konzekvent V nepravdivý, z čoho vyplýva, že (AV) je pravdivý výrok. Nielen to, (AV) je dokonca logicky alebo analyticky pravdivý výrok, lebo jeho konzekvent vyplýva – či už logicky alebo mimologicky – z jeho antecedenta “ $A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j$ ”. Všetky výroky odvodenia výroku V z $\{A_1, \dots, A_j\}$ s výnimkou A_1, \dots, A_j sú totiž dôsledky získané z jeho predchádzajúcich členov pomocou nejakého deduktívneho pravidla, t.j. pravidla, ktorého záver vyplýva z jeho premís. Považa tohto vyplývania závisí od toho, či sa v odvođení uplatňujú iba logické alebo aj mimologické pravidlá.

Hoci v prípade pravdivosti antecedenta výroku (AV) sú všetky prvky odvodenia výroku V z “ $A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j$ ” pravdivé, existujú odvodenia, v ktorých sa vyskytujú aj nepravdivé alebo len nepravdivé výroky. Táto situácia môže však nastať iba vtedy, keď aspoň jeden z výrokov A_i , a teda i celý antecedent, je nepravdivý. Táto okolnosť však neohrozuje pravdivosť implikácie (AV), lebo implikácia s nepravdivým antecedentom je pravdivá. Intuitívny zmysel tvrdenia (TO) ozrejmuje nasledujúci príklad. Z výroku tvaru “ $A \text{ a } B$ ” vyplývajú obidve jeho zložky A, B , čo znamená, že odvodzovacie pravidlá “ $A \text{ a } B \mid A$ ”, “ $A \text{ a } B \mid B$ ” sú deduktívne. Všimnime si jednoduché dvojprvkové odvodenie výroku A z konjunkcie “ $A \text{ a } B$ ”, zložené z výroku “ $A \text{ a } B$ ” a výroku A , odvoditeľného z prvého výroku pomocou prvého pravidla. Ak konjunkcia “ $A \text{ a } B$ ” je pravdivá, obidva výroky tohto odvodenia sú pravdivé, a teda aj implikácia “Ak $A \text{ a } B$, tak A ”. Ak výrok A je nepravdivý, tak nepravdivá je aj konjunkcia “ $A \text{ a } B$ ”, takže implikácia “Ak $A \text{ a } B$, tak A ” je pravdivá. Ak výrok A je pravdivý a výrok B nepravdivý, konjunkcia “ $A \text{ a } B$ ” je nepravdivá a implikácia “Ak $A \text{ a } B$, tak A ” pravdivá. Prípad s pravdivým antecedentom “ $A \text{ a } B$ ” a nepravdivým konzekventom A je vylúčený, lebo A vyplýva z “ $A \text{ a } B$ ”.

Priamy dôkaz. Nie každé odvodenie výroku V z nejakých iných výrokov je jeho dôkazom. Zostrojením odvodenia výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j dokážeme nanajvýš to, že výrok V vyplýva z množiny $\{A_1, \dots, A_j\}$, nie však pravdivosť výroku V . Ak sa v tejto množine vyskytujú nepravdivé výroky, aj z nej vyplývajúci výrok V môže byť nepravdivý.⁶ Aby odvodenie výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j bolo aj jeho *dôkazom*, resp. dôkazom jeho pravdivosti, aj výroky A_1, \dots, A_j musia byť pravdivé. V axiomatických teóriách (ktoré rozvíjame najmä dokazovaním ich teorém) sa táto požiadavka zvyčajne nahrádza požiadavkou, aby prvky množiny $\{A_1, \dots, A_j\}$ boli axiómy, prípadne už dokázané teoremy (ktoré však možno v dôkaze nahradiť axiómami a z nich odvodenými dôsledkami). Prečo? Nie sú azda axiómy pravdivé tvrdenia? Odpoveď závisí od charakteru axiomatického systému. Axiómy niektorých systémov sú evidentne pravdivé výroky, ale neraz sa pravdivosť axióm iba predpokladá alebo sa o nej ani neuvažuje, napríklad pri rozvíjaní niektorých formálnych teórií. Úlohou dôkazu nejakého výroku V v takej teórii je ukázať, že V je teoréma daného systému, teda výrok odvoditeľný z jeho axióm. To znamená, že odvodenie výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j možno pokladať za dôkaz v tomto systéme iba vtedy, keď výroky A_1, \dots, A_j sú axiómy, čo nevylučuje – a v mnohých prípadoch aj zaručuje – ich pravdivosť. V nasledujúcich vymedzeniach dôkazov budeme osobitne upozorňovať na zvláštnosti dôkazov v axiomatických teóriách podmienené povahou axióm v niektorých systémoch. Najprv vymedzíme tzv. priamy dôkaz.

Nech A_1, \dots, A_j sú výroky. Postupnosť výrokov D_1, \dots, D_z je **priamy dôkaz výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j** ($j \geq 1$) vtedy a len vtedy, keď 1. každý z výrokov A_1, \dots, A_j je *pravdivý* (alebo *axióma* daného systému), 2. pre každý člen D_i uvedenej postupnosti platí, že a) D_i je jeden z výrokov A_1, \dots, A_j alebo b) D_i je priamo odvoditeľný pomocou niektorého z pravidiel R_1, R_2, \dots z predchádzajúcich členov postupnosti, a 3. $D_z = V$.

Menej formálne môžeme priamy dôkaz výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j charakterizovať ako rad výrokov, v ktorom sa okrem týchto výrokov – nie nevyhnutne všetkých – vyskytujú iba ich dôsledky získané pomocou deduktívnych pravidiel R_1, R_2, \dots , pričom výroky A_1, \dots, A_j sú pravdivé (alebo sú to axiómy) a na konci tohto radu stojí výrok V . Pretože pravidlá $R_1, R_2 \dots$ sú deduktívne, pravdivé sú aj ostatné výroky tohto radu vrátane výroku V . V prípade axióm, ktorých pravdivosť sa iba predpokladá, možno o pravdivosti V hovoriť iba podmienene: ak axiómy A_1, \dots, A_j sú pravdivé, pravdivý je aj dokázaný výrok V . Výroky A_1, \dots, A_j predstavujú východisko, o ktoré sa opiera dôkaz výroku V .

Priamy dôkaz výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j je vlastne jeho odvodenie z *pravdivých* výrokov alebo z *axióm* nejakého systému. Treba dodať, že podľa uvedeného vymedzenia aj axiómy sú dokázateľné tvrdenia, hoci z intuitívneho

⁶ Pozri [1], 331.

hľadiska sú to výroky, ktoré sa prijímajú bez dôkazu. Dôkazom axiómy A_i je jednoprvková postupnosť obsahujúca ako svoj jediný člen A_i ; táto postupnosť spĺňa všetky tri podmienky kladené na výroky, ktoré utvárajú dôkaz. Pravda, ide o formálny trik, ktorým sa medzi teorémy axiomatického systému zaraďujú aj axiómy, čo ešte nedokazuje ich pravdivosť. Ak sa máme vyhnúť nekonečnému regresu vyžadujúcemu dôkaz každého výroku, niektoré tvrdenia musíme prijať bez dôkazu ich pravdivosti, čo nevyklučuje iný spôsob ich zdôvodnenia.

Nepriamy dôkaz. Tvrdenia nedokazujeme len ich dedukciou z iných pravdivých výrokov, ale aj nepriamo, a to tak, že z predpokladu o ich nepravdivosti odvodíme spor, t.j. dvojicu výrokov, z ktorých jeden je negáciou druhého. Predpoklad o nepravdivosti výroku V , ktorý sa nazýva **nepriamy predpoklad**, vyjadrujeme jeho negáciou "Nie je pravda, že V ". Pri odvodzovaní dôsledkov z tohto predpokladu môžeme k dôkazu ako jeho ďalšie zložky pripojiť vhodné pravdivé výroky a z týchto členov postupnosti potom odvodzovať dovtedy, kým nezískame spor. Fakt, že sme z nepriameho predpokladu "Nie je pravda, že V " a nejakých pravdivých výrokov A_1, \dots, A_j pomocou deduktívnych pravidiel odvodili spor, nás oprávňuje pokladať za dokázaný, a teda aj pravdivý výrok V (niektorí logici a matematici nepriamy dôkaz z istých dôvodov spochybňujú, ale touto otázkou sa tu nemusíme zaoberať). Naznačený druh dôkazu sa nazýva nepriamy dôkaz. Tento dôkaz najprv bližšie vymedzíme a potom ukážeme, prečo môžeme takto dokázaný výrok V pokladať za pravdivý.

Postupnosť výrokov D_1, \dots, D_2 je **nepriamy dôkaz výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j** ($j \geq 0$) vtedy a len vtedy, keď 1. každý z výrokov A_1, \dots, A_j je pravdivý (alebo axióma daného systému), 2. pre každé D_i platí, že a) D_i je výrok "Nie je pravda, že V " (nepriamy predpoklad) alebo b) D_i je niektorý z výrokov A_1, \dots, A_j , alebo c) D_i je priamo odvoditeľný výrok z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou niektorého z pravidiel R_1, R_2, \dots , a 3. v postupnosti D_1, \dots, D_2 sa vyskytuje spor, t.j. dvojica výrokov, z ktorých jeden je negáciou druhého.

V nepriamom dôkaze výroku V sa teda okrem i) nepriameho predpokladu "Nie je pravda, že V " nachádzajú nanajvyš ii) pravdivé výroky A_1, \dots, A_j (ak $j = 0$, tak dôkaz sa opiera iba o nepriamy predpoklad) a iii) dôsledky získané z týchto výrokov a nepriameho predpokladu pomocou deduktívnych pravidiel R_1, R_2, \dots . Keby nepriamy predpoklad bol pravdivý, v dôkaze by sa so zreteľom na pravdivosť výrokov A_1, \dots, A_j a deduktívnosť pravidiel R_1, R_2, \dots vyskytovali samé pravdivé výroky. No keďže sa v ňom vyskytuje spor, teda dvojica výrokov, z ktorých jeden je pravdivý a druhý nepravdivý, medzi výrokmí, o ktoré sa dôkaz opiera, sa musia nachádzať nepravdivé výroky. Pretože A_1, \dots, A_j sú pravdivé, nepravdivý musí byť nepriamy predpoklad "Nie je pravda, že V ", z čoho vyplýva, že výrok V je pravdivý.

Aké dôvody nás nútia prijať a akceptovať ako pravdivý výrok V ? Nepriamy dôkaz výroku V je vlastne ododenie nejakého sporu " C a nie je pravda, že C " z výrokov A_1, \dots, A_j , "Nie je pravda, že V " (namiesto výrazu "nie je pravda, že" budeme ďalej používať aj skratku "non"). Podľa tvrdenia (TO) z toho vyplýva, že implikácia

(1) Ak $(A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j \text{ a non } V)$, tak $(C \text{ a non } C)$

je pravdivá. Z tejto implikácie vyplýva pravdivá implikácia

(2) Ak $\text{non } (C \text{ a non } C)$, tak nie je pravda, že $(A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j \text{ a non } V)$.

Keď na túto implikáciu a jej logicky pravdivý antecedent aplikujeme pravidlo modus ponens (odlúčenia), dostaneme pravdivý výrok

(3) Nie je pravda, že $((A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j) \text{ a non } V)$,

z ktorého vyplýva pravdivá disjunkcia

(4) (Nie je pravda, že $(A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j)$) alebo (Nie je pravda, že $\text{non } V$).

Keďže A_1, \dots, A_j sú pravdivé výroky, pravdivá je aj ich konjunkcia, a teda aj jej dvojité negácia

(5) Nie je pravda, že $\text{non } (A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j)$.

To znamená, že prvá zložka disjunkcie (4) je nepravdivá, takže so zreteľom na jej pravdivosť musí byť pravdivá jej druhá zložka totožná výrokom (5), a teda aj V.

Dôkaz výroku V sa niekedy charakterizuje ako určitá postupnosť, ktorá sa končí dokazovaným výrokom V. Nepriamy dôkaz výroku V z výrokov A_1, \dots, A_j sme však vymedzili ako postupnosť, ktorej posledný člen môže byť iný výrok ako V. Tento dôkaz možno uzavrieť, len čo sa v dôkaze objaví spor (môže to byť spor medzi niektorým z výrokov A_1, \dots, A_j a nejakým odvodeným dôsledkom alebo medzi odvodenými dôsledkami). Každý nepriamy dôkaz v zmysle uvedenej definície možno však po uplatnení tvrdenia (TO) na skonštruované odvodzenie sporu z $(A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j \text{ a non } V)$ rozšíriť tak, že na jeho konci sa ocitne dokazovaný výrok V. Postupnosť výrokov (1) – (5) naznačuje, ako by mohlo také rozšírenie vyzeráť.

Priamy predpokladový dôkaz. Priamy dôkaz vychádza z *pravdivých* výrokov A_1, \dots, A_j (alebo axióm) a nepriamy z *pravdivých* výrokov A_1, \dots, A_j (alebo axióm) a nepriameho predpokladu – o ne sa dôkaz opiera, z nich sa v ňom odvodzujú dôsledky dovtedy, kým nedostaneme dokazovaný výrok alebo spor. Nie vždy sa pri dokazovaní výrokov opierame výlučne o pravdivé výroky (alebo axiómy) či nepriamy predpoklad. Ak z výroku P je odvoditeľný výrok K, tak výrok tvaru implikácie “Ak P, tak K” možno dokázať tak, že zostrojíme odvodenie výroku K z výroku P, pričom P môže byť ľubovoľný výrok (práve tak pravdivý, ako aj nepravdivý). Taký dôkaz sa niekedy nazýva priamy predpokladový dôkaz. Antecedent P môže mať ľubovoľnú logickú štruktúru, ale v praxi to veľmi často býva konjunkcia “ $P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s$ ” zložená z dvoch alebo viacerých výrokov P_i . Teda ak výrok V má formu implikácie

(PK) Ak $P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s$, tak K (kde $s \geq 1$)

a z výrokov P_1, P_2, \dots, P_s je odvoditeľný výrok K , tak V dokážeme tak, že zostrojíme postupnosť, ktorá je odvodením jeho konzekventa K z antecedenta " P_1 a P_2 a ... a P_s ". Pri konštrukcii tejto postupnosti môžeme okrem tohto antecedenta použiť ľubovoľný pravdivý výrok A_1 (v axiomatickom systéme ľubovoľnú axiómu alebo už dokázanú teorému). Podrobnejšie a presnejšie môžeme priamy predpokladový dôkaz vymedziť takto:

Postupnosť výrokov D_1, \dots, D_z je **priamy predpokladový dôkaz** výroku tvaru **PK z výrokov** A_1, \dots, A_j ($j \geq 0$) vtedy a len vtedy, keď 1. výroky A_1, \dots, A_j sú pravdivé (alebo axiómy), 2. pre každé D_i tejto postupnosti platí, že a) D_i je konjunkcia " P_1 a P_2 a ... a P_s " ($s \geq 1$) alebo b) D_i je jeden z výrokov A_1, \dots, A_j alebo c) D_i je priamo odvoditeľné z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou nejakého deduktívneho pravidla R_n , a 3. $D_z = K$.

Ľahko sa možno presvedčiť o tom, že ak existuje priamy predpokladový dôkaz výroku tvaru (PK) z výrokov A_1, \dots, A_j , tak výrok (PK) je pravdivý. Tento dôkaz je vlastne odvodenie výroku K (nie však dôkaz výroku K !) z výrokov (P_1 a P_2 a ... a P_s), A_1, \dots, A_j , z čoho podľa tvrdenia (TO) vyplýva, že implikácia

(IP) $A_k ((P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s) \text{ a } (A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j))$, tak K

je pravdivá. Pretože výroky A_1, \dots, A_j sú pravdivé, pokiaľ ide o pravdivosť výrokov P_1 a K , so zreteľom na pravdivosť (IP) existujú tieto možnosti: 1. každé P_i je pravdivé a potom je pravdivé aj K alebo 2. niektoré P_i je nepravdivé a i) K je pravdivé alebo ii) K je nepravdivé. V prvom prípade je výrok (PK) pravdivý, lebo taký je aj jeho konzekvent K . V druhom prípade je antecedent implikácie (PK) nepravdivý a celá implikácia (PK) je preto pravdivá. Pravdivosť implikácie (PK) by sme mohli zdôvodniť aj nasledujúcim spôsobom. Keby bol výrok (PK) dokázateľný priamym predpokladovým dôkazom nepravdivý, jeho antecedent by bol pravdivý a jeho konzekvent nepravdivý. Potom by bola nepravdivá aj implikácia (IP), lebo výroky A_1, \dots, A_j sú pravdivé. Lenže implikácia (IP) je vzhľadom na odvoditeľnosť konzekventa K z antecedenta (IP) pravdivá, a preto musí byť pravdivý aj výrok (PK).

Podľa uvedenej definície ani priamy *predpokladový* dôkaz nemusí byť postupnosťou, v ktorej sa ako jej posledný člen vyskytuje dokazovaný výrok (PK). Tento výrok získame z pravdivej implikácie (IP) a ekvivalencie

(E) $(P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s)$ vtedy a len vtedy, keď $((P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s) \text{ a } (A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j))$

pomocou deduktívneho pravidla

C vtedy a len vtedy, keď D , $A_k D$, tak $F \mid A_k C$, tak F .

Ekvivalencia (E) je pravdivá, lebo aj časť $(A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j)$ jej pravej strany je pravdivá.

Nepriamy predpokladový dôkaz. Výroky, ktoré majú formu implikácie, sa dokazujú aj nepriamo. Keďže implikácia " $A_k A$, tak B " je nepravdivá práve vtedy,

keď A je pravdivé a B nepravdivé (čiže platí non B), v úlohe nepriameho predpokladu v dôkaze zvyčajne nevystupuje negácia dokazovanej implikácie, ale jeden z dôsledkov tejto negácie, a to non B . Okrem nepriameho predpokladu non B a predpokladu A v dôkaze implikácie môžu vystupovať ľubovoľné pravdivé výroky A_1, \dots, A_j a výroky priamo odvoditeľné z predchádzajúcich prvkov dôkazu. Len čo sa v postupnosti objaví spor, dôkaz sa môže uzavrieť. Keď našu pozornosť zúžime – ako pri priamom predpokladovom dôkaze – na dôkazy výrokov tvaru (PK), nepriamy predpokladový dôkaz môžeme definovať takto:

Postupnosť výrokov D_1, \dots, D_n je **nepriamy predpokladový dôkaz** výroku tvaru PK z výrokov A_1, \dots, A_j ($j \geq 0$) vtedy a len vtedy, keď 1. výroky A_1, \dots, A_j sú pravdivé (alebo axiómy) 2. pre každé D_i tejto postupnosti platí, že a) D_i je konjunkcia " P_1 a P_2 a ... a P_s " ($s \geq 1$) alebo b) D_i je výrok "Nie je pravda, že K " (nepriamy predpoklad), alebo c) D_i je jeden z výrokov A_1, \dots, A_j , alebo d) D_i je priamo odvoditeľné z predchádzajúcich členov postupnosti pomocou nejakého deduktívneho pravidla R_i , a 3. v postupnosti D_1, \dots, D_n sa vyskytuje spor.

Čo nás oprávňuje pokladať výrok (PK) dokázaný nepriamym predpokladovým dôkazom za pravdivý? Je to predovšetkým skutočnosť, že tento dôkaz predstavuje odvodenie sporu z antecedenta " P_1 a P_2 a ... a P_s " a pravdivých výrokov A_1, \dots, A_j . To svedčí o tom, že platí implikácia

(IN) Ak $((A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j) \text{ a } (P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s) \text{ a non } K)$, tak $(C \text{ a nie je pravda, že } C)$, a keďže jej konzekvent je nepravdivý, taký musí byť aj jej antecedent, čiže platí

Nie je pravda, že $((A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j) \text{ a } (P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s) \text{ a non } K)$,

a teda aj

Nie je pravda, že $(A_1 \text{ a } \dots \text{ a } A_j)$ alebo nie je pravda, že $((P_1 \text{ a } P_2 \text{ a } \dots \text{ a } P_s) \text{ a non } K)$.

Pretože prvá zložka tejto pravdivej disjunkcie je nepravdivá, platí jej druhá zložka, ktorá je logicky ekvivalentná implikácii (PK). Uvedeným postupom sme naznačili, ako možno zostrojiť dôkaz (PK), v ktorom (PK) vystupuje ako jeho posledný člen.

ARGUMENTY

Výraz "argument" má aspoň štyri rôzne významy, ktoré treba odlišovať. Môže znamenať 1. výrok, ktorý sa uvádza na podporu zdôvodňovaného tvrdenia, 2. dôkaz (v tomto význame sa často používa nielen v každodennom živote, ale aj v logickej literatúre), 3. ľubovoľnú postupnosť výrokov (alebo ich foriem, ale od tejto možnosti budeme ďalej abstrahovať), v ktorej sú odlišené výroky, o ktoré sa argument opiera, resp. z ktorých argument vychádza, od výroku, ktorý sa argumentom zdôvodňuje, 4. činnosť, ktorú vykonávame, keď argument zostrojujeme.

V prvom význame budeme namiesto slova "argument" používať výraz "východisková premisa (predpoklad) argumentu" alebo len "premissa (predpoklad)". Predpoklady argumentu sa niekedy nazývajú dôvodmi jeho tézy, ale v tomto význame nebudeme termín "dôvod" používať okrem iného aj preto, že téza argumentu nemusí vyplývať z jeho predpokladov, čiže predpoklady argumentu nemusia tvoriť dôvod jeho tézy v zmysle uvedenom v úvodnej časti tohto článku. Ďalej budeme termín "argument" používať iba v 3. význame. Pod **argumentom, ktorým sa zdôvodňuje výrok V na základe výrokov** (predpokladov) P_1, \dots, P_n , budeme rozumieť ľubovoľnú postupnosť výrokov s osobitne vyčlenenými predpokladmi P_1, \dots, P_n a zdôvodňovaným výrokom V, ktorý sa nazýva **téza argumentu**. V tejto postupnosti sa okrem predpokladov P_1, \dots, P_n vyskytujú nanajvýš výroky odvodené pomocou nejakých odvodzovacích pravidiel z predchádzajúcich členov postupnosti, pričom V je spravidla posledný člen argumentu. Odvodzovacie pravidlá môžu byť deduktívne alebo nededuktívne. Argument v uvedenom zmysle možno pokladať za jazykovo formulovaný výsledok činnosti, ktorá sa niekedy označuje slovom "argument" použitým vo 4. význame. Upúšťame aj od tohto významu slova "argument" a činnosť, ktorou sa argument zostrojuje, budeme nazývať **argumentácia** alebo **argumentovanie**. Logika a metodológia vied sa totiž nezaujímajú o samu argumentáciu, ale iba o hotové, v nejakom jazyku formulované alebo možné výsledky tejto činnosti – o argumenty v 3. zmysle.

Od používania termínu "argument" v 2. význame sa nedištancujeme náhodou. Dôkaz pokladáme za postupnosť výrokov, ktorá spĺňa určité podmienky uvedené v prvej časti. Postupnosti, ktoré tieto podmienky nespĺňajú, jednoducho nie sú dôkazy. Nesprávne, chybné dôkazy v tomto zmysle nejestvujú, existujú však chybné argumenty – postupnosti, ktoré sú síce argumentmi, ale nespĺňajú všetky nároky kladené na dobré, korektné argumenty.⁷

Argument, ktorým sa zdôvodňuje výrok V na základe výrokov P_1, \dots, P_n , budeme nazývať (**deduktívne**) **platným** práve vtedy, keď je deduktívnym odvodením výroku V z množiny $\{P_1, \dots, P_n\}$. V tomto argumente sa popri výrokoch P_1, \dots, P_n , o ktoré sa argument opiera, vyskytujú iba výroky, ktoré sú priamo odvoditeľné pomocou *deduktívnych* pravidiel z predchádzajúcich prvkov postupnosti a posledným členom tejto postupnosti je výrok V. Na predpoklady deduktívne platného argumentu sa nijaké obmedzujúce podmienky nekladú. To znamená, že niektoré z výrokov P_1, \dots, P_n (vrátane všetkých) môžu byť nepravdivé a v takom prípade nepravdivý môže byť aj zdôvodňovaný výrok V. Platný argument je z formálnologického hľadiska korektný, ale to na zdôvodnenie pravdivosti výroku V nestačí. Aby platný argument bol zdôvodnením *pravdivosti* tézy V, jeho predpoklady musia byť pravdivé.

Platný argument, ktorého premisy P_1, \dots, P_n sú pravdivé, budeme nazývať **spolahlivý argument**. Je to argument, pri ktorom sa možno spoľahnúť na to, že zdôvodňovaná téza je pravdivá, lebo jeho predpoklady sú pravdivé a uplatnené odvodzovacie pravidlá deduktívne.

⁷ O chybách v argumentácii a argumentoch pozri [2], 367-371.

Ani definícia platného, ani definícia spoľahlivého argumentu nevylučuje situáciu, v ktorej sa medzi predpokladmi takého argumentu vyskytuje jeho téza. Je to chyba, ktorá sa nazýva *kruh v argumente*. Argumenty kruhom nie sú presvedčivé, a preto sa im snažíme vyhnúť. Spoľahlivý argument, v ktorom sa nevyskytuje kruh, budeme nazývať **dokonalý argument**.⁸ Jednoprvkové dôkazy axióm v axiomatických systémoch nie sú a ani nemôžu byť dokonalé argumenty. Sú však deduktívne platné a v niektorých systémoch aj spoľahlivé. V tejto súvislosti si treba uvedomiť, že ak sa chceme vyhnúť nekonečnému regresu, dokazovanie aj argumentácia sa musia pri niečom zastaviť, v axiomatických systémoch sú to axiómy. Niet sa preto čo čudovať, že v týchto systémoch neexistujú dokonalé argumenty zdôvodňujúce pravdivosť axióm. Argumenty, v ktorých sa téza zdôvodňuje ňou samou, sa niekedy nazývajú **triviálne argumenty**.

Pravda, ani dokonalý argument nemusí byť presvedčivý, pretože aj keď v ňom nie je kruh a jeho téza vyplýva z predpokladov, argumentujúcemu človeku ani jeho poslucháčom nemusí byť známe, že predpoklady sú pravdivé. Ak je známe, že predpoklady dokonalého argumentu sú pravdivé, argument sa nazýva rigorózný. Inými slovami, **rigorózný argument** je platný argument, ktorého 1. predpoklady sú pravdivé, 2. vieme, že sú pravdivé, 3. nevyskytuje sa v ňom kruh a 4. téza argumentu vyplýva z jeho predpokladov (alebo: v argumente sa uplatňujú iba deduktívne odvodzovacie pravidlá). Pojem rigorózneho argumentu zaviedol anglický filozof G. E. Moore.

Pravdivosť predpokladov, na základe ktorých zdôvodňujeme nejakú tézu, nemusí byť vždy známa alebo môže byť z nejakých dôvodov diskutabilná (o také predpoklady sa opierame dosť často nielen vo filozofii, ale aj vo vede a v každodennom živote). Neraz argumentujeme v prospech tézy, ktorú nie sme schopní zdôvodniť pomocou známych pravdivých výrokov. V podobných prípadoch sa od predpokladov vyžaduje, aby sa medzi nimi nevyskytovali výroky, ktoré si protirečia. Ide o požiadavku konzistentnosti množiny predpokladov, ktorá je slabšia ako požiadavka, aby boli pravdivé. Treba však dodať, že táto požiadavka nie je triviálna, pretože kontradiktornosť množiny predpokladov nemusí byť zjavná (nemusí mať podobu dvojice výrokov, z ktorých jeden je negáciou druhého). Nekonzistentnosť množiny predpokladov sa môže ukázať až na dôsledkoch, ktoré z nich vyplývajú, čo zistíme až po ich odvodení (alebo nikdy). Platný argument, v ktorom sa nevyskytuje kruh ani protirečenie medzi jeho predpokladmi, sa nazýva **dobry argument**. Taký argument nie je rigorózný a môže, ale nemusí byť spoľahlivý.

Čím sa líšia argumenty od dôkazov? Deduktívne platný argument ešte nemusí byť dôkaz. Keď niektorý z jeho predpokladov je nepravdivý, argument nie je dôkaz. Je to logicky korektný, ale meritórne nepodložený argument, ktorým možno zdôvodniť

⁸ Pri voľbe termínov označujúcich jednotlivé druhy argumentov sme vychádzali z terminológie, ktorú zaviedol P. Kolář vo svojej monografii Kolář, P. (1999), ale namiesto jeho termínu "dokonalý argument" navrhujeme označenie "spoľahlivý argument". Za dokonalý pokladáme platný argument s pravdivými predpokladmi a bez kruhu. Domnievame sa, že by bolo zavádzajúce označiť za dokonalý argument, v ktorom sa môže vyskytovať kruh.

nanajvyš implikáciu “Ak P_1 a P_2 a ... a P_n , tak T ”, nie však jeho tézu T , ktorá so zreteľom na nepravdivosť niektorých predpokladov môže byť práve tak pravdivá ako nepravdivá. Také argumenty predkladáme najmä vtedy, keď za pravdivé mylne pokladáme predpoklady, ktoré také nie sú, alebo keď z nejakých dôvodov – neraz pochybných – za pravdivé vydávame predpoklady, o ktorých vieme, že nie sú pravdivé. Priamy dôkaz je deduktívne platný a spoľahlivý argument na zdôvodnenie výroku V na základe pravdivých výrokov A_1, A_2, \dots, A_n . Významnou zložkou nepriameho dôkazu a priameho i nepriameho predpokladového dôkazu je odvodenie, ktorým sa na základe tvrdenia (TO) zdôvodní implikácia (I), (IP) alebo (IN). Na základe týchto implikácií a pravdivých výrokov A_1, A_2, \dots, A_n možno potom zdôvodniť pravdivosť výroku V v prvom a pravdivosť výroku (PK) v druhom a treťom prípade. Stavbu príslušných argumentov sme naznačili pri analýze jednotlivých druhov dôkazov.

Okrem argumentov, v ktorých sa uplatňujú iba deduktívne odvodzovacie pravidlá, v živote i vo vede sa často uchýľujeme k argumentom, ktoré nemajú rýdzo deduktívny charakter. V týchto argumentoch sa používajú aj pravidlá, ktoré nie sú deduktívne spoľahlivé. Je otázne, či napriek Popperovým útokom proti indukcii týmto pravidlám nemožno pripísať istý druh nededuktívnej či induktívnej platnosti. V našom náčrte sme sa zaoberali iba argumentmi, v ktorých sa uplatňujú deduktívne odvodzovacie pravidlá. Nededuktívnymi odvodzovacími pravidlami, ich vlastnosťami a problémami, s ktorými sú späté, sa budeme zaoberať v ďalších pokračovaniach nášho výkladu.

(pokračovanie)

LITERATÚRA

- [1] CMOREJ, P. (2000). Úvod do problematiky metodológie vied (III) Deduktívne uvažovanie **Organon F 7** (2000), č 3, 326–337.
- [2] GAHÉR, F (1998): **Logika pre každého**. Iris, Bratislava.
- [3] KOLÁŘ. P. (1999): Argumenty filosofické logiky. **Filosofia**, Praha.