

ROZHĚADY

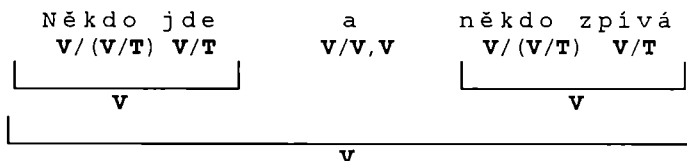
POZORUHODNÉ LOGICKÉ SYSTÉMY (IV): LAMBEKOVY KALKULY A 'LOGIKY KATEGORIÍ'

Jaroslav PEREGRIN*

Fregovým geniálním nápadem, ze kterého vyšel při svém pokusu o vytvoření rigorózní, ne-psychologické teorie významu, bylo rekonstruovat význam složeného výrazu principiálně jako výsledek funkční aplikace významu jedné z jeho částí na význam části nebo částí zbývajících. Tak význam výroku skládajícího se z podmětu a predikátu nahlédl jako výsledek aplikace významu přísudku na význam podmětu; zatímco například význam složeného výroku vytvořeného spojením dvou výroků pomocí logické spojky jako výsledek aplikace významu této spojky na významy oněch dvou výroků. Významy některých výrazů tedy stotožnil s funkcemi v matematickém slova smyslu.

Tato myšlenka došla zobecnění v rámci toho, čemu se dnes v lingvistice říká *kategoriální gramatika* (viz např. Oeherle et al., 1988), a co *de facto* stojí také v základě jazyka Churchovy (1940) 'jednoduché teorie typů' a potažmo například i jazyka TIL¹. V rámci kategoriální gramatiky jsou výrazy rozděleny do kategorií, které jsou označeny tak, že každé gramatické pravidlo kombinuje výraz kategorie $A/A_1, \dots, A_n$ s výrazy kategorií A_1, \dots, A_n ve výraz kategorie A . Jazyky tohoto typu se pak zcela přirozeně pojí s fregovskou, funkcionální sémantikou: významem výrazu kategorie $A/A_1, \dots, A_n$ je funkce, která významům výrazů kategorií A_1, \dots, A_n přiřadí význam příslušného výrazu kategorie A . Označíme-li kategorii termů T a kategorií výroků V , můžeme tímto způsobem kategorií unárních predikátů označit V/T (a obecněji n -árních predikátů $V/T, \dots, T$) – neboť predikát je výraz, který spolu s výrazem kategorie T dává výraz kategorie V . Významem predikátu je pak funkce, která významu výrazu kategorie T přiřadí význam výrazu kategorie V ². (Budeme-li tedy například považovat za významy výrazů kategorie V pravdivostní hodnoty a za významy výrazů kategorie T individua, bude významem výrazu kategorie V/T funkce přiřazující pravdivostní hodnoty individuí.) Podobně kategorií větných spojek, jejichž výrazy se spojují s dvojicemi výroků ve výrok, můžeme označit $V/V, V$ ³.

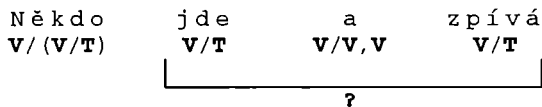
Vezměme větu *Někdo jde a někdo zpívá*. V rámci kategoriální gramatiky bývá obvykle analyzována následujícím způsobem:



*Práce na tomto textu byla podpořena grantem GA AV ČR číslo 401/99/0619.

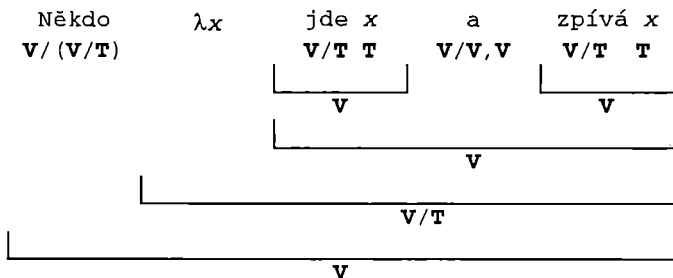
To znamená, že tato věta je nahlížena jako výsledek spojení spojky *a* (kategorie $V/V, V$) s dvojicí výroků (kategorie V), z nichž každý je výsledkem spojení 'kvantifikátoru' (výrazu kategorie $V/(V/T)$) s predikátem (výrazem kategorie (V/T)).

Vezměme ale nyní větu *Někdo jde a zpívá* (která, jak je zřejmé, není s tou předchozí synonymní) – jak bychom analyzovali ji? Zjevně bychom potřebovali, aby její přísudek vyšel jako výraz kategorie V/T – avšak tuto kategorii očividně nemůžeme kombinací dvou výrazů kategorie V/T (*jde* a *zpívá*) a jednoho výrazu kategorie $V/V, V$ (*a*) dostat. Co víc, tyto tři výrazy nelze v rámci kategoriální gramatiky skombinovat vůbec nijak.



Zdá se, že jediný způsob, jak dospět k rozumné analýze, je připustit možnost konjunktivního spojování nikoli jen vět, ale i predikátů. Na to už je ale kategoriální gramatika, zdá se, krátká: jsou-li predikáty, jako *jde* či *zpívá*, kategorie V/T a je-li *a* kategorie $V/V, V$, pak v rámci kategoriální gramatiky prostě není způsob, jak je skombinovat.

Jak tento problém řeší Churchova 'teorie typů' a potažmo TIL i jiné systémy, je známo: ke kategoriální gramatice se přidávají proměnné a mechanismus lambda-abstrakce. Predikáty P_1 a P_2 kategorie V/T se pak mohou formálně aplikovat na proměnnou x , čímž vzniknou výroky-nevýroky $P_1(x)$ a $P_2(x)$ – po věcné stránce to sice žádné výroky nejsou, protože nemají skutečný podmět, ale po stránce formální to jsou výrazy kategorie V , a tudíž jsou skombinovatelné se spojkou *a* (či jejím standardním logickým protipólem \wedge). Tak vznikne 'výrok' $P_1(x) \wedge P_2(x)$, který pak ovšem může být zbaven svého podmětu-nepodmětu x za vzniku predikátu (tj. výrazu kategorie V/T) $\lambda x.P_1(x) \wedge P_2(x)$. Větu *Někdo jde a zpívá* bychom pak mohli analyzovat následujícím způsobem⁴:



Může nás ovšem napadnout, proč celou věc vyřizovat tak komplikovaně, když by to šlo jednodušeji. Proč prostě kategoriální gramatiku nerozšířit o nové typy pravidel, kterým by na úrovni sémantiky odpovídala ne aplikace funkce na argument, ale skládání funkcí? Proč přímo nepovolit kombinování výrazu kategorie A/B s výrazem kategorie B/C ve výraz kategorie A/C – když sémanticky je toto pravidlo zcela přirozené, jakožto vyjádření složení funkcí vyjadřovaných skládanými výrazy? Tak

například vyjadřuje-li negace (výraz kategorie V/V) známou funkci N (přisuzující pravdivostním hodnotám pravdivostní hodnoty) a vyjadřuje-li nějaký predikát (výraz kategorie V/T) funkci F z individuí do pravdivostních hodnot, proč by je nemělo být možné přímo skombinovat v negativní predikát, vyjadřující funkci G takovou, že pro každý přípustný argument a platí $G(a) = N(F(a))$? (Bude-li tedy F například funkcí přisuzující *pravdu* právě všem vousatým logikům, bude G funkce, která přiřadí individuu *pravdu* právě tehdy, není-li to vousatý logik.) Je-li V_1 výraz kategorie A/B a V_2 výraz kategorie B/C , mohli bychom tento jejich nový druh spojení ve výraz kategorie A/C zapisovat třeba jako $\{V_1 V_2\}$. (Z toho, co jsme právě konstatovali, vyplývá, že do lambda-kalkulu by pak $\{V_1 V_2\}$ bylo ‘přeložitelné’ jako $\lambda x.V_1(V_2(x))$, kde x je proměnnou kategorie C .)

Tím se dostáváme k zajímavým úvahám o tom, jaké typy pravidel by bylo možné ke kategoriální gramatice smysluplně přidat. Než v nich však budeme pokračovat, všimněme si, že stejného účinku jako přijetím právě uvedeného nového pravidla můžeme dosáhnout i tím, že stanovíme, že na každý výraz V kategorie A/B se současně lze dívat i jako na určitý výraz kategorie $(A/C)/(B/C)$, totiž jako na ten výraz, který bychom v rámci lambda-kalkulu zapsali jako $\lambda y.\lambda x.V(y(x))$ (kde x je proměnná kategorie C a y proměnná kategorie B/C). Tak například chceme-li dosáhnout skombinovatelnosti negace s predikátem v predikát, můžeme namísto ustanovení nového pravidla umožňujícího skombinovat výraz kategorie V/V s výrazem kategorie V/T ve výraz kategorie V/T , ustanovit, že negace se kromě jako výraz kategorie V/V může chovat i jako výraz kategorie $(V/T)/(V/T)$. Takže formální alternativou přidání nových pravidel toho typu, jaké jsme zavedli výše, je přidání možnosti určitého druhu fluktuace výrazů mezi kategoriemi – například ztotožnění V kategorie A/B s určitým výrazem kategorie $(A/C)/(B/C)$.

Jak ale můžeme nechat výraz fluktuovat mezi kategoriemi? Kategorie výrazu přece určuje typ objektu, který je tímto výrazem denotován, a přesuneme-li ho do jiné kategorie, musíme mu přidělit i jiný denotát a tedy z něj *de facto* udělat zcela jiný výraz. Odpověď je v tom, že mezi objekty různých sémantických domén existují určité ‘přirozené projekce’: někdy se stává, že objekty jedné domény mají jisté přirozené ‘protipóly’ v jiné doméně, a že je pro některé účely můžeme s těmito protipóly ztotožňovat a tak dosáhnout toho, že jedna doména může být jakoby ‘vnořena’ do jiné. Příkladem může být ‘vnoření’ kategorie T do kategorie V/T založené na ztotožňování individua s jednoprvkovou množinou tvořenou právě tímto individuem. Jiným příkladem je výše popsané vnoření domény A/B do $(A/C)/(B/C)$, založené na ztotožnění funkce V s funkcí $\lambda y.\lambda x.V(y(x))$ – tedy například negace \neg s operací doplňku, $\lambda y.\lambda x.\neg(y(x))$.

Vraťme se nyní k obecnému problému rozšiřování kategoriální gramatiky. Samozřejmě, že nechceme-li prostě zlikvidovat fregovský ‘funkcionální’ model sémantiky, nemůžeme připustit skombinovatelnost *jakéhokoli* výrazu s *jakýmkoli* jiným výrazem; či vnořování *jakékoli* domény do *jakékoli* jiné. Můžeme připustit jenom takové kombinace či taková vnořování, které jsou v rámci tohoto modelu rozumně sémanticky ošetřitelné. Které to ale obecně jsou? Tuto obecnou otázku můžeme položit následujícím způsobem: pro které kategorie A_1, \dots, A_n , A je rozumné připustit pravidlo kombinující výrazy kategorií A_1, \dots, A_n ve výraz kategorie A ?

(V rámci standardní kategoriální gramatiky by byla odpověď jednoduchá: pro ty, kde pro některé i platí $A_i = A/A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$). Anebo: pro které kategorie A a B je rozumné připustit, že výrazy kategorie A se mohou chovat i jako výrazy kategorie B ? (Na tuto otázku by v rámci standardní kategoriální gramatiky byla odpověď, že jediné pro $B = A$.)

Učíme nyní něco na první pohled zcela nesmyslného: podívejme se na symboly, kterými v rámci kategoriální gramatiky označujeme jednotlivé kategorie, jako na formule výrokového počtu. Představme si, že písmena v těchto symbolech jsou jednoduchými výrokovými symboly a že lomítko značí inverzní implikaci; takže například A/B budeme číst jako $B \rightarrow A$. Navíc konstatování 'výrazy kategorií A_1, \dots, A_n lze skombinovat ve výraz kategorie A ' čtème jako konstatování toho, že výrok A vyplývá z výroků A_1, \dots, A_n , zkráceně $A_1, \dots, A_n \Rightarrow A$. To znamená, že například fakt, že v rámci kategoriální gramatiky můžeme výrazy kategorií A/B a B skombinovat ve výraz kategorie A nahlédneme jako tvrzení, že výrok A vyplývá z výroků $B \rightarrow A$ a B :

$$B \rightarrow A, B \Rightarrow A.$$

Podobně to, co by mělo platit v námi uvažovaném rozšíření kategoriální gramatiky, totiž že výrazy kategorií A/B a B/C můžeme skombinovat ve výraz kategorie A/C , nahlédneme jako tvrzení

$$B \rightarrow A, C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A.$$

Podíváme-li se nyní na to, co jsme touto transformací dostali, blížeji, zjistíme, že obě uvedená tvrzení jsou platná; dostali jsme dvě platná inferenční pravidla.

Na tom by nebylo nic zajímavého, pokud by to byla náhoda. Dá se však ukázat, že to náhoda není. Zamyslíme-li se nad celou věcí podrobněji, zjistíme, že paralela mezi otázkami *které kategorie lze skombinovat z jiných?* a *které implikativní formule vyplývají z jiných?* je zcela systematická; a že obecně platí, že výrazy kategorií A_1, \dots, A_n lze v rámci lambda-kalkulu skombinovat ve výraz kategorie A právě tehdy, když je možné z A_1, \dots, A_n vyvodit A v rámci intuicionistické implikativní logiky. Proč tomu tak je, není těžké nahlédnout. Uvažme totiž způsob, jak je intuicionistická implikace definována v rámci systému přirozené dedukce (viz např. Prawitz, 1965):

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \qquad \frac{[A]}{B} \qquad \frac{}{A \rightarrow B}$$

Tedy: (i) z A a $A \rightarrow B$ vyplývá B ; a (ii) můžeme-li z předpokladu A dokázat B , pak analogicky bez předpokladu A můžeme dokázat $A \rightarrow B$. Nyní snadno nahlédneme, že 'kombinovatelnost' v rámci lambda-kalkulu je definována strukturálně zcela analogicky: (i) výrazy kategorií A a B/A lze skombinovat ve výraz kategorie B ; a (ii) můžeme-li za pomoci výrazu kategorie A vytvořit výraz kategorie B , pak analogicky bez použití A (za pomoci příslušné proměnné) můžeme vytvořit výraz kategorie B/A .

Každému diagramu 'odvození' kategorie složeného výrazu z kategorií jeho částí (to jest diagramu toho typu, jaký jsme výše uvedli například pro větu *Někdo jde a někdo zpívá*) tedy odpovídá skutečné odvození formule odpovídající kategorii

složeného výrazu z formulí odpovídajících kategoriím jeho částí. Například v případě věty *Někdo jde a někdo pívá* by tímto odvozením bylo

$$\frac{\frac{(T \rightarrow V) \rightarrow V \quad T \rightarrow V}{V} \quad (V \rightarrow V) \rightarrow V \quad \frac{(T \rightarrow V) \rightarrow V \quad T \rightarrow V}{V}}{V}$$

V některých učebnicích logiky bývá uváděno, že to, s čím se setkáváme například u výrokového počtu, je čistě abstraktní struktura, jejíž je výroková logika jenom jednou možnou instancí, která však může mít instance i zcela jiné. Jako příklad takové jiné instance pak bývají téměř univerzálně uváděny elektrické obvody s 'logickými' prvky. Nyní vidíme mnohem neotřelejší příklad stejného jevu: zjišťujeme, že struktura, která charakterizuje logické vyplývání, je vlastně i fenoménu s vyplýváním nijak přímo nesouvisejícím.

Zjmemně nyní poněkud způsob, kterým hovoříme o kombinování výrazů. Když jsme říkali, že nějaký výraz patří do kategorie A/B , říkali jsme tím, že může být (určitým způsobem) spojen s výrazem kategorie B ve výraz kategorie A . Rozlišme teď dva typy připojení (zleva a zprava): říkejme, že výraz je kategorie A/B , platí-li, že připojí-li se k němu *zprava* výraz kategorie B , vznikne výraz kategorie A ; a že je kategorie BA , platí-li, že připojí-li se k němu *zleva* výraz kategorie B , vznikne výraz kategorie A . Navíc říkejme, že výraz je kategorie $A \bullet B$, skládá-li se z výrazu kategorie A následovaného výrazem kategorie B .

Předpokládejme nyní, že výrazy kategorie A mají tu vlastnost, že když se k nim zprava připojí výraz kategorie B , vznikne výraz kategorie C ; jinými slovy, že výrazy kategorie A jsou současně kategorie C/B . Pak je zřejmé každý výraz kategorie A následovaný výrazem kategorie B výrazem kategorie C , to jest každý výraz kategorie $A \bullet B$ je výrazem kategorie C . Navíc pro každý výraz kategorie B platí, že připojí-li se k němu zleva výraz kategorie A , vznikne výraz kategorie C , to jest každý výraz kategorie B je výrazem kategorie $A \setminus C$. To znamená

$$A \Rightarrow C/B \text{ právě když } A \bullet B \Rightarrow C \text{ právě když } B \Rightarrow A \setminus C.$$

Relace \Rightarrow je navíc zjevně reflexivní a tranzitivní, tj. platí:

$$A \Rightarrow A$$

jestliže $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$, pak $A \Rightarrow C$.

Tři právě uvedená tvrzení tvoří axiomy jednoho z logických systémů, jejichž prostřednictvím navrhl Lambek (1958; 1961) studovat 'matematiku větné struktury'. (Lambekovy práce původně nezbudily téměř žádnou pozornost; uznání došly až s asi dvacetiletým zpožděním, kdy se logici a matematici pustili do systematického zkoumání kategoriálních gramatik.) Co je pozoruhodné, je to, že logiky tohoto druhu mohou být považovány za specifický druh modálních logik, totiž že je možné je sémanticky interpretovat způsobem, který je – z formálního hlediska – případem možnosvětové sémantiky navržené Kripkem (1963) pro modální logiky.

Představme si, že máme množinu W 'možných světů' a ternární relaci R 'dosazitelnosti' mezi nimi (to jest $R \subseteq W^3$). Pro výše uvedené kategoriální symboly nahlédnuté jako výroky je pak možné definovat následující sémantiku:

$$\begin{aligned} \|A \bullet B\| &= \{z \mid \exists xy \text{ pro nějaké } x \in \|A\| \text{ a } y \in \|B\|\} \\ \|A / B\| &= \{x \mid \text{jestliže } \exists xy \text{ a } y \in \|B\|, \text{ pak } z \in \|A\|\} \\ \|B \setminus A\| &= \{x \mid \text{jestliže } \exists yx \text{ a } y \in \|B\|, \text{ pak } z \in \|A\|\} \end{aligned}$$

Dá se ukázat, že výše uvedený Lambekův kalkul je vzhledem k této sémantice úplný.

To znamená, že způsoby syntaktického kombinování výrazů můžeme z tohoto pohledu vidět jako *modalitu* – v této souvislosti se pak hovoří o *multimodálních gramatikách*.

Úvahy naznačené v tomto článku daly vzniknout odvětví logiky, které se v poslední době bouřlivě rozvíjí (zejména v Holandsku) a pro které by bylo snad nejpřijatelnějším českým názvem *logika kategorií* (viz Morill, 1994, a Moortgart, 1997). Jak už jsme viděli, nejedná se vlastně o logiku ve vlastním slova smyslu, ale o *aplikaci deduktivních struktur, které logika vyvinula pro studium vyplývání, na něco, co nemá s vyplývání nic společného, totiž na syntax, přesněji na syntaktickou kombinovatelnost* (příčemž ve všichni autoři, kteří o daném tématu píší, si tohle dostatečně jasně uvědomují).⁵

POZNÁMKY

¹ Za 'praotce' kategoriální gramatiky bývají považováni Ajdukiewicz (1935) a Bar-Hillel (1953).

² V rámci symbolismu užívaného Churchem a Tichým bychom namísto $A/A_1, \dots, A_n$ psali $(\alpha\alpha_1 \dots \alpha_n)$; a namísto $\mathbf{V/T, \dots, T}$ bychom psali $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

³ Podrobněji o kategoriální gramatice viz Peregrin (1998, §3.8).

⁴ Přijetí takovéto analýzy ovšem bývá mnohými autory interpretováno jako jakési odhalení toho, že v sobě analyzovaná věta 'skrytě' obsahuje proměnnou. Proč tohle považuji za krajně zavádějící, jsem probral na jiném místě (viz Peregrin, v tisku).

⁵ V symbolické logice existují od počátku dva poněkud rozdílné přístupy. Jeden z nich má kořeny v pracích Boola, Schrödera a Peirce; v jeho rámci je logika považována za zkoumání určitých velice obecných algebraických struktur, které lze mimo jiné aplikovat na vyplývání. Ten druhý se odvíjí zejména od Frega; a podle něj je logika *přímým* zachycováním vyplývání. Prohlásit teorie toho druhu, jaké jsme popsali zde, za *logiku* nebude činit potíže těm, kteří chápou logiku spíše v rámci té první tradice; avšak bude pocitováno jako potenciálně zavádějící těmi, kdo mají blíže k té druhé.

LITERATÚRA

- [1] AJDUKIEWICZ, K. (1935): Die syntaktische Konexität. *Studia Philosophica* 1, 1-27.
- [2] BAR-HILLEL, Y. (1953): A Quasi-arithmetical Notation for Syntactic Description. *Language* 29, 47-58.
- [3] CHURCH, A. (1940): A Formulation of the Simple Theory of Types. *Journal of Symbolic Logic* 5, 56-68.
- [4] KRIPKE, S. (1963): Semantical Considerations on Modal Logic. *Acta Philosophica Fennica* 16, 83-94.
- [5] LAMBEK, J. (1958): The Mathematics of Sentence Structure. *Amer. Math. Monthly* 65, 154-170.

- [6] LAMBEK, J. (1961): On the Calculus of Syntactic Types. In: **Structure of Language and its Mathematical Aspects** (ed. R. Jakobson), Providence (R.I.).
- [7] MOORTGAT, M. (1997): **Categorial Type Logics**. In: **Handbook of Logic and Language** (ed. J. van Benthem a A. ter Meulen), Elsevier / MIT Press, Oxford / Cambridge (Mass.).
- [8] MORRILL, G.V. (1994): **Type Logical Grammar (Categorial Logic of Signs)**, Kluwer, Dordrecht.
- [9] OEHERLE, T., E. BACH a D. WHEELER, eds. (1988): **Categorial Grammars and Natural Language Structures**. Reidel, Dordrecht.
- [10] PEREGRIN, J. (1998): **Úvod do teoretické sémantiky**. Karolinum, Praha.
- [10] PEREGRIN, J. (v tisku): Variables in natural language: where do they come from? In: **Variable-free semantics** (ed. M. Böttner a U. Thümmel), Secolo, Osnabrück.
- [11] PRAWITZ, D. (1965): **Natural Deduction**. Almqvist & Wiksell, Stockholm.

ERRÁTA

Ospravedľujeme sa čitateľom i autorovi za nasledujúce chyby, ktoré sa pri technickom spracovaní minulého čísla vkradli do článku P. Maternu „Dva druhy propozičných postojů“ (*Organon F 7*, 2000, č. 3, 243-256):

Na s. 251¹⁴ namiesto výrazu „Typ konštruovaného objektu je nyní nikoli, nýbrž“ má byť výraz „Typ konštruovaného objektu je nyní nikoli o, nýbrž o_{to}“.

Na s. 251₆ namiesto výrazu „ $\lambda w \lambda t [{}^0 \text{Védět}_{wt} {}^0 K [wt [{}^0 V_{wt} {}^0 L {}^0 O]]]$ “ má byť výraz „ $\lambda w \lambda t [{}^0 \text{Védět}_{wt} {}^0 K [\lambda w \lambda t [{}^0 V_{wt} {}^0 L {}^0 O]]]$ “.

Takisto sa ospravedľujeme za nasledujúcu chybu, ktorá sa v tom istom čísle vyskytla v dialógu P. Maternu a P. Cmoreja „K transparentnej teórii pojmov (II)“ (*Organon F 7*, 2000, č. 3, 302-319):

Na s. 318₅ namiesto výrazu „-kalkulu“ má byť výraz „ λ -kalkulu“.

Štvrté pokračovanie *Úvodu do problematiky metodológie vied* pre nedostatok miesta uverejníme až v 1. čísle VIII ročníka (2000). *Poznámka redakcie*