

# GOTTLLOB FREGE - ŽIVOT A DIELO

František GAHÉR

## GOTTLLOB FREGE - LIFE AND WORK

G. Frege is one among the most prominent logicians in history. The author deals with the main events not just from Frege's awkward private life, but also from his scientific and teaching activities. This text is throwing some light on meaning and significance of the Frege's most important works and his revelations in the field of symbolic logic and semantics. Also, here are explained some notable relations concerning realisation of the main aim of his scientific works - realisation of the logicism programme.

Bez zveličovania môžeme povedať, že Frege patrí medzi najvýznamnejších logikov v dejinách ľudstva. Modernú logiku si bez Fregeho prínosu sotva vieme predstaviť. V čase jeho života si však iba málokto - ak vôbec niekto - toto uvedomoval. Mnohí ho považovali za neúspešného a bezvýznamného vysokoškolského učiteľa. Ešte v roku 1908 po 34 rokoch jeho pôsobenia na univerzite v Jene univerzitný kurátor o ňom napísal, že od nejakej zvláštnej pocty k Fregeho šesťdesiatke môžeme odhliadať, pretože jeho učiteľské pôsobenie má podradný význam a nie je pre univerzitu prínosom (pozri [5], 1).

### Študentské obdobie

Friedrich Ludwig Gottlob Frege sa narodil 8. novembra 1848<sup>1</sup> vo Wismare (Mecklenburg) v Nemecku. Jeho otec Karl Alexander (1809 - 1866) bol zakladateľom a riaditeľom súkromnej vyššej dievčenskej školy. Matka Gottloba Fregeho Augustína Bialloblotzká bola učiteľkou na tejto škole a po smrti svojho manžela riaditeľkou. Rodné meno matky poukazuje na jej pravdepodobne poľský pôvod. Fregeho rodina sa hlásila k evanjelickej cirkvi augsburského vyznania.

Frege navštevoval gymnázium vo Wismare, kde v roku 1869 zmaturoval. Študoval matematiku, fyziku, chémiu a filozofiu, a to štyri semestre na univerzite v Jene v rokoch 1869 - 1870 a päť semestrov na univerzite v Göttingene v rokoch 1871 - 1873. V študentských časoch sa najviac zaujímal o teóriu komplexných matematických funkcií, ktoré študoval u profesora Ernsta Abbeho v Jene a u profesora Ernsta Scheringa v Göttingene. Schering bol nástupca po Karlovi Friedrichovi Gaussovi a prvý editor jeho zobraňovaných spisov. Ako Fregeho učiteľ matematiky i jeho školiteľ určite vstúpil do Fregeho gaussovskú tradíciu a zdôrazňovanie logickej presnosti euklidovského typu

([6], 335 - 337). Doktorskú dizertáciu Frege napísal z oblasti geometrie "O geometrickom zobrazení imaginárných útvarov v rovine"<sup>2</sup> a 12. decembra 1973 získal titul Doctor Philosophiae na univerzite v Göttingene.

### Frege ako učiteľ

Po získaní doktorského titulu sa uchádzal o miesto súkromného docenta, t.j. neplateného učiteľa na univerzite v Jene. V tom čase ho zrejme finančne podporovala matka. Habilitačnú prácu z odboru matematika "Metódy výpočtu založené na rozšírení pojmu veličiny" napísal v roku 1874 a na základe veľmi pozitívneho hodnotenia profesora Abbeho ho komisia odporúčala na prijatie. Po uskutočnení verejnej diskusie a vykonaní troch skúšobných prednášok sa stal v máji 1874 členom matematickej fakulty. Vyučoval matematiku a spočiatku bol jeho úväzok nezvyčajne vysoký, najmä v roku 1878, keď prednášal za profesora K. Snella. Frege bol veľmi svedomitý učiteľ, ktorý svoje prednášky koncipoval so zreteľom na potreby študentov, prednášal jasne, premyslene a študentov nezaťažoval nadmernou zložitou. Rudolf Carnap, ktorý navštevoval Fregeho prednášky v rokoch 1910-1914 a ktorý sa považuje za jeho najväčšieho žiaka, si necenil ani tak prednášky z vlastnej matematiky alebo z vlastnej filozofie, ako práve Fregeho prednášky týkajúce sa hraničnej oblasti medzi nimi. Fregeho učiteľ a neskôr aj priateľ profesor Abbe v hodnotení Fregeho práce pre rok 1879 vysoko hodnotil jeho prednášky ako absolútne perfektné v každej základnej otázke. V tomto ohľade je príznačná známa historka z neskoršieho obdobia, keď prišiel za Fregem Wittgenstein (1911). Wittgenstein spomína:

"Frege nikdy nediskutoval o ničom inom ako o logike a matematike; ak som začal o nejakom inom predmete, povedal mi čosi zdvorilé a ponoril sa znovu do logiky a matematiky. Raz mi ukázal nekrológ o kolegovi, ktorý ako bolo uvedené *nikdy nepoužil slovo bez toho, aby nevedel, čo znamená*; vyjadril obdiv a názor, že tohto človeka by si mali za to vážiť" ([3], 132).

Zmysel tohto nekrológu by sme mohli považovať aj za Fregeho životné krédo.

Zmysel pre presnosť je pre matematiku a logiku najdôležitejší predpoklad úspešnosti a musí sa pestovať. Frege ho pestoval s neobyčajnou intenzitou a dôslednosťou celý život a z neho vychádzajúca kritičnosť voči názorom ktoréhokoľvek vedca charakterizovala všetky jeho vedecké diela. Provokovala márnomyseľnosť iných do tej miery, že to viedlo až k tomu, že jeho objavy zostali takmer úplne nepovšimnuté. Frege však v tomto ohľade neprípúšťal

žiadny kompromis či zľavenie požiadaviek voči nikomu. Ani voči sebe samému. A tá chvíľa tiež prišla.

### Od matematiky k logike

V recenziách, ktoré publikoval v prvých rokoch učiteľského pôsobenia, môžeme zbadáť prvé prejavy projektu, ktorý dominoval celej jeho kariére a ktorému venoval väčšinu vedeckej práce, a to dokázať, že aritmetika je odvetvím logiky. V recenzii na knihu H. Seegera *Die Elemente der Arithmetik* kritizuje, že základné teorémy a transformačné formuly sa uvádzajú bez dôkazu. Študent sa zákony aritmetiky musí učiť viacmenej naspamäť a zvykne si na to, že bude spokojný aj so slovami, ktorým nerozumie (KSch, 85). To, čo tak chýbalo v Seegerovej knihe - jasné a presné vysvetlenie základných pojmov a dôkazov základných zákonov aritmetiky - je hlavný cieľ Fregeho programu logicizmu. Neskôr (v roku 1919) o tom napísal:

"Od matematiky som odišiel. Pre túto vedu som videl najnaliehavejšiu úlohu v tom, postaviť ju na lepšie základy. Skoro som spoznal, že číslo nie je súbor vecí ani rad vecí a tiež nie vlastnosť jedného súboru, ale že číselný údaj, ktorý na základe počítania určíme, obsahuje výrok o nejakom pojme. Pri takomto skúmaní prekážala logická nedokonalosť jazyka. Nápravu som hľadal v mojom pojmovom písme. Tak som prešiel od matematiky k logike" (N, 273).

### Pojmové písme

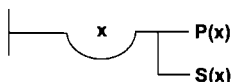
Prvou prácou, ktorou začal realizovať tento program, bolo jeho *Pojmové písme* (*Begriffsschrift* -BS), vydané v roku 1879. Frege zistil, že prirodzený jazyk nie je vhodný na zachytenie presnosti takého stupňa, aký vyžadujú logické základy aritmetiky: mnohé jednoduché výrazy i celé slovné spojenia z prirodzeného jazyka sú viacznačné, význam mnohých slov nie je dostatočne ostrý. Preto buduje symbolický jazyk *lingua characteristica*, v ktorom všetko, čo je pre vyplývanie nepotrebné, bude zatlačené do úzadia a všetko, čo je z hľadiska vyplývania dôležité, bude jednoznačne a prehľadne zachytené. Všetky predpoklady musia byť explicitne uvedené - nesmie sa vychádzať zo žiadneho implicitného predpokladu. Základné pravidlá usudzovania musia byť čo najjednoduchšie a správne iba na základe svojej logickej štruktúry. Frege vypracoval pre svoj symbolický jazyk dvojdimenzionálny zápis.

Obsah výrazu rozdeľuje akoby do dvoch častí: i) časť, ktorá je dôležitá z hľadiska vyplývania a je objektívna; ii) časť, ktorá nie je pre logické

vyplývajúce relevantná. Prvú nazýva *pojmový obsah* (*begrifflicher Inhalt*). Je to tá časť obsahu, ktorá je v oboch odlišných vetách

- (1) *Pri Platajách Gréci zvíťazili nad Peržanmi*
- (2) *Pri Platajách boli Peržania porazení Grékmi*

tá istá (pozri BS, 3). *Pojmový obsah*, ktorý môžeme tvrdiť, je *usudzovateľný* (*pojmový*) *obsah* (*beurtheilbare Inhalt*). *Pojmový obsah* predstavy "dom" nie je usudzovateľný, ale môže byť jeho časťou, to znamená, že usudzovateľný obsah má svoje časti. Avšak gramatické rozlíšenie na subjekt a predikát nepovažuje pre pojmové písmo za primerane odôvodnené, pretože vety v prirodzenom jazyku s odlišnými subjektmi - ako je to v prípade viet (1) a (2) - môžu mať ten istý *pojmový obsah*. Definuje základné výrokové spojky - implikáciu a negáciu. Rozširuje pojem funkcie aj na nečíselné priradenia. Pojem explikuje ako funkciu, ktorej hodnotou sú pravdivostné hodnoty, a miesto gramatických kategórií prísudku a podmetu pracuje s logickými kategóriami *funkciou* a *argumentom funkcie*. Zavádza *všeobecný kvantifikátor* a koncipuje moderný pojem *premennej*. Ukazuje prepis subjekt-predikátových výrokov v pojmovom písme, čím dokáže, že jeho *Pojmové písmo* obsahuje aj všetko to, čo zachytávala Aristotelova logika. Napríklad všeobecný kladný výrok [v dnešnej symbolike napr.  $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$ ] zapisoval vo svojej dvojdimenzionálnej symbolike:



kde  $\_$  je znak pre *usudzovateľný obsah*,  $\cup$  je znak pre *všeobecný kvantifikátor*, ktorý viaže premennú  $x$  [on používal nemecké (gotické) písmená)], ktorá je uvedená nad týmto znakom (nad touto "prehĺbeninou"),  $\_$  je znak pre implikáciu (antecedentom je dolný výraz, konzekventom horný),  $S$ ,  $P$  sú predikáty.

Formuluje v modernej dobe prvý úplný axiomatický systém výrokovej logiky a základy predikátovej logiky. Na základe pojmu logického dôsledku definuje niektoré základné pojmy aritmetiky, napríklad pojem *dedičnej vlastnosti*, reláciu *nasledovníka*, resp. *predchodcu* a iné. Uskutoční dôkazy 133 logických alebo aritmetických teorém (BS, 26 - 86).

Napriek týmto objavom nemala táto Fregeho prvá monografia takmer žiadny pozitívny ohlas. Zo šiestich recenzií bola iba jedna ako-tak priaznivá ([1], s. 1718). Najdôležitejšie boli recenzie, ktoré napísali odborníci v logike

- John Venn v Anglicku a Ernst Schröder v Nemecku. Obaja namiesto toho, aby ocenili veľký pokrok v oblasti logiky, ktorý *Pojmové písmo* znamenalo, odmietli Fregeho dvojdimenzionálny zápis ako ťažkopádny, nešikovný a nezvyčajný (Venn) či ako obrovskú stratu priestoru, ktorá je založená na obľube japonského zvyku vertikálneho zápisu (Schröder); sotva sa vyrovná logike Georga Boola. Nezbadali Fregeho objavy, pretože *Pojmové písmo* neustále porovnávali s Boolovou prácou *Zákony myslenia*.<sup>3</sup> Frege necitoval Boolovu prácu, a preto mu Venn vytýka ignoráciu toho, čo sa v tejto oblasti už urobilo.

Rok vydania *Pojmového písma* bol pre Fregeho dôležitý. Pred ohlasmi na *Pojmové písmo* mal všetky dôvody na optimizmus. Získal dobrú reputáciu v Jene, stal sa mimoriadnym profesorom, čím získal určité finančné prostriedky na zaopatrenie seba a svojej rodiny, a vydal prvú knihu. Po zverejnení ohlasov však nastalo pre neho ťažké obdobie. Viac ako desať rokov bolo jeho dielo ignorované alebo nepochopené. V rokoch 1891 až 1901 postupne získal všeobecné uznanie aj za hranicami Nemecka. Ani v osobnom živote to nemal ľahké - v manželstve s Margaretou Lieseburgovou (1856 - 1905) im zomreli všetky deti ešte ako malé a okolo roku 1900 adoptovali syna Alfreda. Avšak v roku 1905 jeho manželka zomrela a nechala ho s malým chlapcom samého.

Frege si po neúspechu *Pojmového písma* uvedomil, že sa musí vyrovať z Boolovou prácou. Ako odpoveď na kritiku napísal brilantnú štúdiu *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* (N, 9 - 52), kde porovnal ciele a vlastnosti jeho vlastnej symboliky s Boolovou logikou. Preukázal tu neobyčajnú schopnosť, ktorú možno dostatočne nevyužil pri písaní *Pojmového písma*, presne a jasne vysvetliť problematiku. Presvedčivo vysvetlil, prečo nemohol použiť Boolovu symboliku a ukázal prednosti vlastnej notácie. Článok ponúkol do troch časopisov, ale vo všetkých ho odmietli. Keďže to bol veľmi dlhý článok, plný zložitých symbolov, rozhodol sa napísať skrátenú a ústretovejšiu verziu *Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift* (N, 53 - 60). Ani tento článok neprijali, a to R. Avenarius zo *Švrtröckenky pre vedeckú filozofiu* ([1], 21).

Frege však nezložil zbrane a v roku 1882 sa mu podarilo publikovať veľmi všeobecný a symbolkov úplne zbavený článok *O vedeckom oprávnení pojmového písma*<sup>4</sup> a na zasadnutí Jenskej spoločnosti pre medicínu a prírodovedu v januári 1882 predniesť prednášku, ktorá bola neskôr publikovaná pod názvom *O účele Pojmového písma (Über die Zweck der Begriffsschrift)*. Zdôrazňuje odlišné ciele svojho diela oproti knihe G. Boola:

"... nechcel som zobrazit' abstraktnú logiku vo formulách, ale obsah napísaných znakov vyjadriť čo najpresnejším a najprehľadnejším spôsobom, aký je len vôbec možný. Nechcel som v skutočnosti vytvoriť čistý "*calculus ratiocinator*", ale "*lingua characteristic*" v Leibnizovom zmysle, pričom každý logický dôsledok bude uznaný ako nutná súčasť *Pojmového písma*" (BS (1964), 97 - 98).

Poukazuje na nedostatky v Boolovej symbolike, keď jeden a ten istý symbol (taký, ako je znak "+") raz znamená aritmetickú operáciu sčítavania a inokedy zas logickú operáciu "spojenia". Obhajuje proti Schröderovej kritike svoju notáciu a demonštruje, že jeho dvodimenzionálny zápis je neobyčajne vhodný a prehľadný v prípadoch zložitejších tvrdení.

### Základy aritmetiky

Frege pochopil, že ak chce naozaj presvedčiť odborníkov i širšie čitateľské auditorium o správnosti svojho projektu, musí zmeniť taktiku. Rozhodol sa napísať knihu, ktorá by sa týkala základných pojmov aritmetiky, akými bol napríklad pojem *číslo*, ale bola by napísaná bez symbolických zápisov, voči ktorým bola taká averzia. V roku 1884 vyšlo jeho dielo *Základy aritmetiky* (*Grundlagen der Arithmetik* - GLA). Cieľ práce bol zdanlivo jednoduchý - definovať pojem čísla. Toto dielo je hádam "najfilozofickejšie" zo všetkých Fregeho prác. V mnohých ohľadoch je to priam učebnica epistemológie. Frege s neobyčajnou trpezlivosťou analyzuje najznámejšie vysvetlenia pojmu čísla: psychologické, formalistické a empiricistické.

Ukazuje neudržateľnosť explikácie čísla ako mentálneho konštraktu - napríklad ak by si nikto práve nemyslel niektoré číslo, tak by toto číslo prestalo existovať. Zdrvujúcej kritike podrobuje formalistické vysvetlenie, ktoré čísla stotožňuje s číslicami napísanými na papieri. Argumentuje proti názoru, že môžeme čísla tvoriť; Frege tvrdí, že môžeme tvoriť iba nové symboly (mená) pre čísla, nie samy čísla (FA, 108). Frege s neobyčajným zmyslom pre jemnú iróniu takmer doslova "rozpušťa v kyseline" vysvetlenie extrémneho empirizmu, ktorého predstaviteľom je napríklad John Stuart Mill, podľa ktorého zákony aritmetiky sú empirické zovšeobecnenia založené na indukcii a základné aritmetické pojmy sú získané z pozorovania agregátov fyzických objektov.

Ako alternatívu k týmto vysvetleniam predkladá svoju koncepciu *logicizmu*. Podľa nej 1. všetky základné aritmetické pojmy možno definovať výlučne prostredníctvom logických pojmov; 2. pomocou takto definovaných

pojmov možno všetky zákony aritmetiky odvodiť z logických zákonov pomocou logických pravidiel.

Aby uskutočnil prvý krok tohto programu, musí definovať kardinálne číslo. Na definíciu kardinálneho čísla (mohutnosť množiny) v Cantorovej teórii množín sú potrebné tri pojmy: »množina«, »byť prvkom množiny« a »jedno-jednoznačné zobrazenie«. Logika sa naproti tomu podľa Fregeho zaoberá pojmami »pojmem« (sem patria vlastnosti - pojmy v užšom slova zmysle, a vzťahy), »spadať pod pojem« a »rozsah pojmu«. Pomocou týchto inštrumentov "čistej logiky" definuje dané množinové pojmy, a teda aj pojem »rovnakej mohutnosti pojmov« a pojem »mohutnosti pojmu« či »kardinálneho čísla«. Napríklad pojem »rovnakej mohutnosti pojmov« definuje pomocou jedno-jednoznačného vzťahu (GLA, §72) a kardinálne číslo "dva" definuje ako rozsah pojmu, pod ktorý spadajú tie pojmy, medzi rozsahmi ktorých a párom nejakých predmetov je jedno-jednoznačný vzťah - vzťah rovnakej mohutnosti. Frege tu veľa úsilia vynaložil na to, aby vysvetlil, čo je to kontextuálna definícia, a aby presvedčil čitateľa, že je prinajmenej rovnako dobrou definíciou ako tradičná. Tzv. kontextuálnu definíciu abstrakciou využil práve pri definovaní jedno-jednoznačného zobrazenia medzi rozsahmi pojmov.

Ohlasy na toto dielo boli rozličné. Napríklad Cantorova recenzia svedčí o tom, že nepochopil príbuznosť Fregeho snaženia s jeho teóriou množín a podľa všetkého toto dielo ani dobre neprečítal, pretože Fregemu pripisuje názor, že kardinálne číslo definuje ako množinu fyzických objektov, a nie ako množinu množín fyzických objektov, t.j. množinu pojmov. Frege na to upozornil v krátkej replike v roku 1885 v *Deutsche Literaturzeitung*: Cantor podsúva Fregemu názor, že "počet Jupiterových mesiacov je rozsah pojmu »Jupiterov mesiac«". Frege to v skutočnosti definoval inak: "počet Jupiterových mesiacov je rozsah pojmu »byť rovnako mohutný s pojmom »Jupiterov mesiac«« (pozri KSch, 112; MLPh, 123). Toto upozornenie zostalo nepovšimnuté. Do Fregeho sa pustili "advokáti" psychologizmu v logike a matematike, ktorý bol vtedy veľmi rozšírený a populárny. Jedným zo zástancov psychologizmu bol R. Hoppe, ktorý mal vplyv a vážnosť: dlhé roky (1873 - 1900) bol editorom *Archiv der Mathematik und Physik*. Hoppe v recenzii uviedol, že Fregeho teóriu budú učitelia považovať za neplodnú a nehodnú vážneho záujmu (pozri [1], 29). Žiaľ, dlhé obdobie to bola pravda.

## Objektivita pojmov a nové sémantické nástroje: zmysel a denotát mena

Napriek nepriaznivému ohlasu či skôr ignorovaniu *Základov aritmetiky* Frege nepoľavoval vo svojom úsilí. Okolo roku 1891 začína Fregeho dielo pomalú expanziu vplyvu po tom, čo taliansky logik G. Peano cituje Fregeho prácu. V tom období sa začína aj plodná korešpondencia Fregeho s E. Husserlom. V článku *O zákone zotrvačnosti* hovorí:

"Ak sa toto ostré ohraničenie [pojmu] neukáže, nemožno ho uznať ako pojem logiky... Logický pojem nemá žiadny vývoj, žiadnu históriu... Nesúhlasím s autorom [L. Langem], že je veľmi potrebné hovoriť o vývine pojmu ... Ak miesto toho povieme "história pokusov pochopiť pojem" alebo "história chápania pojmu", tak sa mi to zdá byť oveľa primeranejšie; ďalej pojem je niečo objektívne, čo netvoríme, čo tiež ani v nás nie je tvorené, ale to, čo sa snažíme pochopiť a nakoniec snád' aj naozaj pochopíme, keď nebudeme omylom hľadať tu, kde nič nie je" (KSch, 122; MLPh, 133)

Pojmy matematiky podľa Fregeho nevytvárame, čo neskôr objasňuje takto:

"Ako geograf nevytvára žiadne more, keď zakresľuje hranice a hovorí: "Touto čiarou ohraničenú časť vodnej plochy budem nazývať Žlté more", rovnako aj matematik definíciou nič vlastne nevytvára..." (GGA I, XIII).

Aby Frege pripravil vhodnú pôdu na prijatie diela, v ktorom sa má projekt logicizmu zavŕšený, predniesol pre svojich kolegov prednášku *O funkcii a pojme* (FB) a publikoval dva články. Staťou *O zmysle a denotáte* (SB, 1892) "položil základy intenzionálnej analýzy jazyka ...V druhej polovici dvadsiateho stotočia sa Fregeho štúdia stala jednou z najcitovanejších prác v oblasti filozofie jazyka."<sup>5</sup> V tejto štúdii zaviedol miesto pojmového obsahu nové sémantické inštrumenty: zmysel výrazu (*Sinn*) a denotát či referent výrazu (*Bedeutung*). Určitý výraz (meno) vyjadruje zmysel a označuje denotát. Zmysel výrazu je spôsob danosti toho, čo tento výraz označuje. Meno označuje predmet. Napríklad mená "Večernica" a "Zornica" označujú to isté (planétu Venušu), ale vyjadrujú odlišný spôsob danosti - majú odlišný zmysel. Sémantiku, ktorá v tomto článku bola načrtnutá, rozpracoval v modifikovanej podobe pre potreby modernej matematiky A. Church (pozri úvod [4]).

V druhom článku *O pojme a predmete* vysvetľuje rozdiel medzi predmetom a pojmom: predmet je nasýtený, môže byť denotátom nejakého gramatického subjektu a nikdy nemôže byť sám úplným denotátom gramatického



predikátu; pojem je nenasýtený a nemôže byť priamo denotátom subjektu; upozorňuje na rozdiel medzi pojмами prvého a druhého rádu (stupňa) a prichádza s veľmi presvedčivým vysvetlením, že existencia je primárne vlastnosťou pojmov, nie predmetov. (Slovenský preklad tohto článku vychádza práve v tomto čísle Organonu.)

### Základné zákony aritmetiky

Fregeho reputácia však stále nebola ani zd'aleka na takej úrovni, aby nemal problémy s publikovaním. Hotový rukopis bol veľmi rozsiahly a žiaden vydavateľ nechcel riskovať neúspech. Rukopis bol plný dôkazov v dvojzozmernej symbolike. Nakoniec sa našiel kompromis. Vydavateľ článku *O funkcii a pojme* H. Pohle súhlasil s vydaním práce v dvoch častiach, pričom druhá časť mala byť vytlačená iba v prípade priaznivého ohlasu prvej časti. V roku 1893 vyšiel prvý diel *Základných zákonov aritmetiky* (Grundgesetze der Arithmetik - GGA I).

V úvode diela možno netakticky hovorí o chladnom prijatí či vlastne neprijatí jeho predchádzajúcich prác matematikmi. Ironicky uvádza výhrady k svojej knihe:

"už prvý dojem musí odradzovať; neznáme znaky, veľa strán iba cudzích formúl..." (GGA I, XI).

Napriek tomu sa snaží presvedčiť čitateľa, že symbolický jazyk je nutný, a práve jeho symbolika umožňuje dosiahnuť požadovanú presnosť a prehľadnosť. Nebol ochotný v tejto veci urobiť ani milimetrový ústupok, hoci by mu mohol konečne priniesť uznanie. Myslel však oveľa ďalej ako na prchavú slávu: zaujímal ho skutočný pokrok vedy. Neoblomne a s ironickou ostrosťou kritizuje najznámejšie východiská vysvetlenia povahy čísel: psychologizmus, formalizmus a empiricizmus, čím mnohých čitateľov odradzoval. Bol si toho plne vedomý, a keďže za najhorší považuje psychologizmus v logike a matematike, priam irituje "psychologizujúcich logikov" konštatovaním v tom zmysle, že vyhrá iba vtedy, ak jeho knihu odmietnu v prípade, že sa vôbec prinútia ňou vážne zaoberať (pozri GGA I, XXVI).

Rozpracoval ďalšie rozšírenie pojmu funkcie oproti *Pojmovému písmu*: argumentmi niektorých funkcií môžu byť okrem objektov i nejaké (iné) funkcie; rozlišuje prvo-rádové (*erster Stufe*) funkcie, ktorých argumentmi sú výlučne objekty, a druho-rádové (*zweiter Stufe*) funkcie, ktorých argumentmi (aspoň jedným) sú prvo-rádové funkcie. Keďže funkcie môžu mať viac argumentov, a tie môžu byť objektmi alebo funkciami prvého rádu, niektoré funkcie sú z hľadiska argumentov rovnakého rádu, iné nerovnakého rádu

(*ungleichstufige Funktion*). Zavádza pojem *priebehu funkcie (Wertverlauf)* a definuje "pojem" (*Begriff* ako *vlastnosť*) ako "funkciu s jedným argumentom, ktorej hodnotou je vždy pravdivostná hodnota".

Cieľ, ktorý chcel dosiahnuť, opisuje v úvode diela takto:

"Ideál prísne vedeckej metódy v matematike, ktorý som sa tu pokúsil uskutočniť a ktorý môže byť naozaj pomenovaný po Euklidovi, by som opísal nasledovne. Nemôžeme požadovať, aby bolo dokázané všetko, pretože to je nemožné; ale môžeme požadovať, aby všetky tvrdenia, ktoré budú použité bez dôkazu, boli vyslovene vyjadrené ako také, aby sme zreteľne poznali, na čom spočíva celá stavba. Potom sa musíme snažiť počet týchto základných zákonov čo najviac znížiť dokazovaním všetkého, čo je dokázateľné. Ďalej požadujem - a týmto prekračujem Euklida - aby sa všetky spôsoby odvodzovania, ktoré sa použijú, uskutočnili podľa predchádzajúcich. Inak by sme nemohli dosiahnuť splnenie prvej požiadavky. Som presvedčený, že tento ideál som už v podstate dosiahol" (GGA I, XI).

Fregeho výkon - úroveň presnosti a formálnej korektnosti *Základných zákonov aritmetiky I* - dovtedy nikto nedosiahol a zostal neprekonaný najbližších dvadsať rokov. V tomto prvom diele podal na logickej báze výklad konečných i nekonečných kardinálnych čísel, pojmu »usporiadania«, operácií »prieniku relácií« a »skladania relácií« a iných. Bolo to nebývalé a monumentálne, ale predsa zostávalo toho ešte veľa: chýbala explikácia záporných, racionálnych, iracionálnych a komplexných čísel, ako aj operácií sčítavania, násobenia a iných aritmetických operácií. Pre toto rezervoval druhý diel. O jedinom zákone sa vyjadril rezervovane: *základný zákon V* o priebehu hodnôt mohol vyvolať pochybnosť, či svojou povahou patrí do čistej logiky (pozri GGA I, VII). Tento zákon tvrdí, že priebeh hodnôt jednej funkcie je totožný s priebehom hodnôt druhej funkcie vtedy a len vtedy, keď hodnota prvej funkcie pre každý argument je totožná s hodnotou druhej funkcie pre tento argument i naopak.

Z ohlasov na *Základné zákony aritmetiky I* bol Frege opäť frustrovaný. V tlači boli publikované iba dve recenzie, z ktorých jedna bola ako-tak priaznivá, a okrem nich nič - ani prijatie, ani odmietnutie, iba ticho. Ako dôsledok bolo vydavateľovo odmietnutie vytlačiť druhý diel. Fregeho projekt nemal byť dokončený.

Prvá recenzia od R. Hoppeho bola taká krátka, že sa vlastne dá ťažko nazvať recenziou a podľa všetkého jej autor knihu okrem úvodu a dodatku vôbec nečítal. Druhú recenziu napísal G. Peano. Táto recenzia bola obširna a iniciovala plodnú korešpondenciu medzi Peanom a Fregem. V roku 1900

alebo 1901 začína čítať Fregeho dielo B. Russell, čo viedlo cez reťaz udalostí k všeobecnejšiemu spoznaniu veľkosti Fregeho výkonu.

Peano mnohé dôležité veci prehliadol a zrejme sa ani nenaučil Fregeho symboliku. V recenzii porovnáva Fregeho systém so svojím: Frege používa viac základných pojmov (päť) ako on - Peano (tri). Peano, ktorý považoval Fregeho systém za konkurenčný a predpokladal, že analýza matematiky na základné pojmy môže byť iba jedna, uzatvára, že jeho analýza je fundovanejšia. Frege bol Peanovým záverom o "menšej" fundovanosti svojho systému podráždený a bol presvedčený o jeho nesprávnosti. V septembri 1896 napísal Peanovi ako vydavateľovi *Rivista di Matematica* list a požiadal ho o jeho publikovanie, pretože v tomto časopise bola uverejnená aj spomínaná recenzia. Peano spoznal tvrdosť Fregeho polemiky, ktorej je schopný, ak dostane na ňu priestor. Fregeho replika *Lettera del sig. Frege all'Editore*, v ktorej poukázal na slabiny a chyby v Peanovom diele, bola zdrvivúca a prinútila ho uverejniť odvolanie pôvodného hodnotenia a poďakovať sa Fregemu za opravy svojej logiky. Z chýb, ktoré vytýkal Frege Peanovi, išlo najmä o tieto chyby: nemal presné pravidlá definovania; nevedel odlišovať vyjadrenie myšlienky od jej tvrdenia (Frege mal na to základné symboly); Peanova definícia znaku identity bola kruhová, mnohé definície dôležitých pojmov boli chybné; najmenej štyri symboly neboli definované a nedali sa definovať pomocou základných symbolov (pozri KSchr, 234 239). Peano bol nútený priznať, že používa viac ako deväť primitívnych symbolov, a výsledkom polemiky bolo, že na jeho odporúčanie prijal znak pre definičnú rovnosť. Toto Fregeho spresnenie Peanovej logiky sa stalo známym. Podľa všetkého Peano od Fregeho prevzal aj teóriu kvantifikácie. Frege bol konečne "objavený".

### **Príprava Základných zákonov aritmetiky II**

V období rokov 1894 - 1902 Frege okrem písania viacerých štúdií (zväčša nepublikovaných) sa sústreďuje na dokončenie rukopisu druhého dielu *Základných zákonov aritmetiky* (GGA II). Okrem úspechu s Peanom dosiahol aj iný úspech - menovali ho za čestného riadneho profesora. Pravdepodobne mu ponúkli titul riadneho profesora, ale ten zrejme odmietol, aby sa nezaťažoval administratívnymi povinnosťami a mohol sa plne venovať svojmu projektu. To, že mohol prijať neplatené miesto, je vysvetliteľné tým, že jeho "tutor" E. Abbe mu zabezpečil trvalé štipendium z Carl Zeiss *Stiftung*, ktoré každý rok venovalo univerzite v Jene stotisíc mariek.

Ďalším úspechom bolo, že sa mu podarilo po zdrvivúcej recenzii (1894) Husserlovej knihe *Philosophie der Arithmetik* (vydané v roku 1891)

a následnej korešpondencii "konvertovať" E. Husserla zo zástancu psychologizmu na jeho odporcu. V roku 1895 publikuje kompromitujúcu kritiku Schröderových *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890). Humor, irónia a niekedy aj výsmech, ktorý obsahujú jeho recenzie, sú najlepším dokladom Fregeho výkonu ako satirika. V tom období Frege už vedie bohatú korešpondenciu s Balluom, Couturatom, Hilbertom, Husserlom a inými. Pripravil, ale nepublikoval 1. tri rozsiahle rukopisy v "pojmovom pisme" dva (301 a 210 strán) o teórii veličín a jeden (258 strán výlučne v symboloch) o iracionálnych číslach; 2. esej o logických chybách v matematike; 3. stať o princípoch definovania; 4. dva články, v ktorých argumentáciou *ad absurdum* vyvrátil stanovisko Weierstrassa a iných, že čísla sú agregáty objektov (podľa [1], 43).

### Russell objavuje paradox

V roku 1902 je druhý diel *Základných zákonov aritmetiky* v tlači. Podľa všetkého toto vydanie financuje Frege z vlastných peňazí. Veril, že sa mu podarilo ukázať, že aritmetika je odvetvím logiky, pričom úspešne zaútočil na všetky známe konkurenčné teórie: na extrémny empirizmus (Mill, Weierstrass), psychologizmus (Erdmann, Husserl) i extrémny formalizmus (Hankel, Ballue).

V období spokojnosti z uskutočnenia takého náročného a vyčerpávajúceho projektu sa stalo čosi, čo je pre vedca, ktorý vyznáva hodnoty logickej konzistentnosti a presnosti, azda najviac neprijemné: nejaký mladý anglický logik menom Bertrand Russell objavil antinómiu v logických základoch matematiky, ktoré Frege s takou námahou vypracoval. Russell napísal Fregemu o objave antinómie v júni 1902. Antinómia sa stala neskôr známou ako *Russellova antinómia* a netýkala sa iba Fregeho systému, ale rovnako aj Cantorovej teórie množín a Dedekindovej teórie. Jej zmysel, inšpirovaný starovekou antinómiou luhára, vysvetľuje sám Frege:

"O triede ľudí nikto nebude chcieť tvrdiť, že je človekom. Máme tu triedu, ktorá nie je prvkom seba samej. Hovorím totiž, že niečo je prvkom triedy, keď spadá pod pojem, ktorého rozsah je práve tá trieda. Uvažujme teraz pojem *trieda, ktorá nie je prvkom seba samej!* Rozsah tohto pojmu, pokiaľ o ňom môžeme hovoriť, je trieda tých tried, ktoré nie sú prvkami seba samých. Označme ju skratkou T. Teraz sa pýtame, či táto trieda je prvkom seba samej! Predpokladajme najprv, že áno! Keď je niečo prvkom nejakej triedy, tak spadá pod pojem, ktorého rozsahom je táto trieda. Keď v dôsledku toho naša trieda je prvkom seba samej, tak je triedou, ktorá nie je prvkom

seba samej. Náš prvý predpoklad vedie k sporu so sebou. Predpokladajme po druhé, že naša trieda  $T$  nie je prvkom seba samej, takže spadá pod pojem, ktorého rozsah sám je byť prvkom samého seba. A tu je opäť spor" (GGA II, 253 4).

Túto antinómiu umožnila prílišná "liberálnosť" základného zákona  $V$ , o ktorom si Frege hoci s istou rezervou myslel, že je logickým zákonom. Počas leta korešpondoval s Russellom. Na konci leta bol druhý diel *Základných zákonov aritmetiky* vydaný. Frege venuje doslov tohto diela Russellovmu objavu, pričom sa pokúsil o opravu, avšak jeho riešenie bol neinuitívne a iba *ad hoc*.

Russell neskôr napísal, že bol zrejme prvým človekom, ktorý ocenil veľkosť *Pojmového písma* a ktorý ho aj čítal - a to viac ako dvadsať rokov po jeho uverejnení. A to vraj Russell dostal od svojho učiteľa čítať *Pojmové písmo* ešte počas svojich študentských čias, ale vtedy ho toto dielo vôbec nezaujalo. Môžeme povedať, že zatiaľčo Peano objavil Fregeho, Russell objavil jeho "veľkosť". Russell o niekoľko rokov spolu s Whiteheadom napísal slávne *Principia Mathematica* dielo, ktoré pokračovalo v tradícii logicizmu, ako ho projektovateľ Frege, avšak bez spomínanej antinómie. Takže Russellova antinómia nezdiskreditovala program logicizmu. Význam Fregeho priekopníckeho diela *Základných zákonov aritmetiky* bol však takmer úplne zatienený prácami jeho pokračovateľov a Russellovi boli pripisované aj mnohé Fregeho zásluhy.

### Po Russellovom paradexe

Je rozšírenou fámou, že po zistení antinómie vo svojom diele Frege zanevrel a zostal podlomený. Nie je to pravda, pretože Frege neprestával veriť vo svoj program logicizmu až do rokov 1913 - 1914 ho obhajuje na svojich prednáškach na univerzite v Jene. Frege však nebol šťastný - v roku 1905 mu zomrela manželka. Bezpochyby ho otravovali a unavovali útoky jeho kolegu J. Thomaeho z Jeny a A. Korselta za Fregeho kritiku Hilbertovho raného názoru na axiómy a definície v geometrii. Frege v roku 1910 podľa Carnapových slov vyzeral na svoj vek zostaruto.

Slávu, ktorej sa síce nedožil a ani po nej netúžil, Fregemu v istom zmysle "zabezpečil" R. Carnap. Carnap bol jeho študentom v roku 1910, keď chodil na jeho prednášky z *Pojmového písma*, ktoré bolo úvodom do Fregeho novej logiky. V roku 1913 chodil na prednášky z *Pojmového písma II* a v roku 1914 navštevoval jeho prednášky *Logika v matematike*. O jedno či dve desaťročia sa stal Carnap známym a vplyvným vedcom, a keďže sa z logiky a sémantiky

najviac naučil u Fregeho, najmä vo svojom "sémantickom období" širil a ďalej rozvíjal jeho myšlienky. Spolu s Churchom, ktorý odlišným spôsobom modifikoval a rozvíjal Fregeho logiku a sémantiku, sa asi najviac zaslúžili o Fregeho prvú "renesanciu".

V roku 1911 po krátkej korešpondencii prišiel za Fregem Wittgenstein ešte z Manchestru. Okrem diskusie o jeho námietkach sa Wittgenstein radil s Fregem o štúdiu základov matematiky. Na Fregeho odporúčanie odišiel študovať do Cambridgea k Russellovi, ktorému už vyšiel spolu s Whiteheadom prvý diel *Principia Mathematica*. V úvode k svojmu *Tractatus* uvádza, že za značnú časť podnetov ku svojim myšlienkam vďačí okrem prác svojho priateľa B. Russella práve vynikajúcemu dielu G. Fregeho. Jeho vplyv na Wittgensteina bol taký veľký, že bez čítania Fregeho sa dá *Tractatus* sotva pochopiť.

V roku 1918 odišiel z univerzity do Bad Kleinena blízko jeho rodného mesta Wismar, avšak neprestával byť aktívnym vedcom. Publikoval tri významné štúdie *Myšlienka*<sup>6</sup> (1918), *Negácia*<sup>7</sup> (1918) a *Zložené myšlienky*<sup>8</sup>. Pokračoval v korešpondencii s mnohými vedcami. Žiaľ, časť z jeho celkovej korešpondencie s Husserlom, Jourdainom, Löwenheimom, Russellom a inými vedcami spolu s mnohými jeho rukopismi bola zničená v münsterskom archíve pri bombardovaní spojencami počas druhej svetovej vojny.

Zomrel 26 júla 1925 vo veku 77 rokov. Jeho smrť možno zostala nepovšimnutá vedcami vtedajšieho sveta, jeho dielo však zažilo nielen carna-pövsko-churchovskú "renesanciu", ale môžeme povedať, že sa v posledných desaťročiach dožíva druhej renesancie (bližšie o tom napríklad [7]).

## POZNÁMKY

<sup>1</sup> Niektoré podrobnosti o živote G. Fregeho som čerpal najmä z práce [1].

<sup>2</sup> *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene*.

<sup>3</sup> *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of Logic and probabilities* z roku 1854.

<sup>4</sup> *Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift*. In: BS (1964), s. 106-114.

<sup>5</sup> Cmorej, P., úvod k slovenskému prekladu, *Filozofia*, 47, 1992, č. 6, s. 349.

<sup>6</sup> *Der Gedanke*; slovenský preklad *Myšlienka: Logické skúmanie* bol publikovaný in: *Organon F, III*, 1996, č. 3.

<sup>7</sup> *Die Verneinung*.

<sup>8</sup> *Gedankengefüge*.

**Výber najdôležitejších Fregeho štúdií a monografií publikovaných počas jeho života:**

- 1873 *Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene.*(diss.); znovu publikované in KSch.
- 1874 *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen.*(habil.); znovu publikované in KSch.
- 1879 *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* L. Nebert, Halle a. S., X, 88 s.; znovu vydané hg. I. Angelelli, Darmstadt 1964. [BS]
- 1883 *Über die Zweck der Begriffsschrift,* Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft für das Jahr 1882, Jena s. 1-10; znovu vydané in BS (1964). [ZBS]
- 1884 *Die Grundlagen der Arithmetik.* Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. W. Köbner, Breslau, XI, 119 s.; znovu vydané Darmstadt 1961; nemecký text s paralelným anglickým prekladom J. N. Austina, Oxford 1950. [GLA]
- 1891 *Funktion und Begriff.* H. Pohle, Jena, 31 s.; znovu vydané in FBB; KSch.
- 1891 *Über das Trägheitsgesetz.* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, XCVIII, s. 145-161. znovu vytačené in KSch; anglický preklad in MLPh. [TG]
- 1892 *Über Sinn und Bedeutung.* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, C (100), s. 25-50.; znovu publikované in FBB, KSch; slovenský preklad in Filozofia, 47, 1992, č. 6, s. 349-363. [SB]
- 1892a *Über Begriff und Gegenstand.* Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie, XVI, s.192-205.; znovu publikované in FBB, KSch; slovenský preklad in Organon F, VII, 2000, č. 1. [BG]
- 1893 *Grundgesetze der Arithmetik.* Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band. H. Pohle, Jena, XXXII, 253 s.; nové vydanie Darmstadt 1962; 1966. [GGA I]
- 1896 *Lettera del sig. Frege all'Editore.* Rivista di Matematica VI, s. 53-59; znovu publikované in KSch.
- 1903 *Grundgesetze der Arithmetik.* Begriffsschriftlich abgeleitet. II. Band. H. Pohle, Jena, XV, 265 s.; nové vydanie Darmstadt 1962; 1966. [GGA II]
- 1904 *Was ist eine Funktion?* Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstag, Leipzig.s. 656-666; znovu publikované in FBB, KSch. [WF]
- 1918 *Der Gedanke.* Eine logische Untersuchungen. Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, I. s. 58-77; znovu publikované in KSch, LU, anglický preklad in MLPh. [LU I]
- 1918 *Die Verneinung.* Eine logische Untersuchungen. Beiträge zur Phil. des deutschen Idealismus, s.143-57; znovu publikované in KSch, LU, angl. preklad in MLPh. [LU II]
- 1923 *Gedankengefüge.* Eine logische Untersuchungen. Dritter Teil. Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, III. s. 36-51; znovu publikované in KSch, LU, anglický preklad in MLPh. [LU III]

**Súborné práce G. Fregeho publikované po jeho smrti:**

- 1962 *Funktion, Begriff, Bedeutung,* Fünf logische Studien. hg. G. Patzig, Göttingen. [FBB]
- 1964 *Begriffsschrift und andere Aufsätze.* Hg.I. Angelelli, Darmstadt. [BS]
- 1966 *Logische untersuchungen.* Hg. G. Patzig, Göttingen. [LU]

- 1967 **Kleine Schriften**. hg. I. Angelelli, Darmstadt; obsahuje bibliografiu publikovaných Fregeho prác a listov (s. 423-427). [KSch]
- 1969 **Nachgelassene Schriften**. Hg. H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach, Hamburg. [N]
- 1871 **Schriften zur Logik und Sprachphilosophie** (Aus dem Nachlass), G. Gabriel, Hamburg; obsahuje kompletnú bibliografiu Fregeho prác, publikovaných počas jeho života i po smrti do roku 1969, ako aj bibliografiu publikácií o Fregem do roku 1970. [LS]
- 1976 **Wissenschaftlicher Briefwechsel**. Hg. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veraart, Hamburg. [BW]

#### Niektoré anglické preklady:

- 1950 **The Foundations of Arithmetic**. Transl. by J.N. Austin; Blackwell and Mont, Oxford. [FA]
- 1964 **The Basic Laws of Arithmetic**. Transl. and ed. by Montgomery Furt, California UP, Berkeley.
- 1972 **Conceptual Notation and Related Articles**, trans. and ed. T.W. Bynum, Clarendon Press, Oxford.
- 1984 **Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy**, B. McGuinness (ed.), Basil Blackwell. [MLPh]

*Katedra logiky a metodológie vied  
Filozofická fakulta UK  
Šafárikovo nám. 6, 818 01 Bratislava  
e-mail: Frantisek.Gaher@fphil.uniba.sk*

#### LITERATÚRA

- [1] BYNUM, T.W. (1972): On the life and work of Gottlob Frege. In: Frege, G.: **Conceptual Notation and Related Articles**, pp. 1-54.
- [2] CARNAP, R. (1956): **Meaning and Necessity**. Chicago U. P., Chicago and London.
- [3] GEACH, P. T. (1961): "Frege". In: Anscombe, G. E. M. & Geach, P.T. (eds.): **Three Philosophers**. Oxford, Blackwell, pp. 129-62.
- [4] CHURCH, A. (1956): **Introduction to Mathematical Logic**. Princeton U. P., Princeton, New Jersey.
- [5] KUTSCHERA, F.V. (1989): **Gottlob Frege**. W. de Gruyter, Berlin - New York.
- [6] SLUGA, H. (1993): Frege: the early years. In: **General Assessments and Historical Accounts of Frege's Philosophy**, Garland Publ., New York & London.
- [7] TICHÝ, P. (1988): **The Foundations of Frege's Logic**. W. de Gruyter, Berlin New York.
- [8] WHITEHEAD, A. N. - RUSSELL, B. (1925): **Principia Mathematica**. Vol. I, Cambridge U. P.