

SROVNÁNÍ BOLZANOVY A TARSKÉHO DEFINICE VYPLÝVÁNÍ

Marta VLASÁKOVÁ

COMPARISON OF BOLZANO'S AND TARKI'S DEFINITION OF
LOGICAL CONSEQUENCE

Bernard Bolzano presents in his work *Wissenschaftslehre* (1837) a definition of derivability among sentences. Tarski publishes his well-known definition of logical consequence almost one hundred years later. This article intends to prove that the Bolzano's definition is fully satisfactory compared to the Tarski's one, even though no attention was drawn to Bolzano's definition at that time.

Ve svém rozsáhlém systematickém spisu, *Vědosloví*, které poprvé vyšlo v roce 1837, podává Bernard Bolzano mimo jiné definici vzájemné odvoditelnosti vět. Jako téměř celé Bolzanově práci nebyla ani této definici věnována valná pozornost. O téměř sto let později (v roce 1936) vyšel Tarského článek¹, ve kterém se pokusil podat exaktní definici logického vyplývání. Vzhledem k tomu, že do té doby prosazované syntaktické pojetí vyplývání bylo zásadním způsobem otřeseno Gödelovým důkazem věty o neúplnosti, postrádal Tarski nějakou přesnější sémantickou definici logického vyplývání, a tudíž se sám pokusil ji formulovat. Tarski si sice nečinil nárok na naprostou originalitu, přesto se domníval, že teprve metody vyvinuté v jeho době při vzniku vědecké sémantiky mu umožnily podat příslušnou definici v exaktnější formě.² Cílem tohoto článku je rozebrat obě definice, navzájem je srovnat a ukázat, že se v podstatných rysech shodují.

Při výkladu Bolzanova pojmu odvozování je nejprve potřeba objasnit dva jeho základní pojmy, totiž pojem *věty o sobě* a pojem *představy o sobě*. Větou o sobě rozumí Bolzano každou výpověď (Aussage), která je buď pravdivá nebo nepravdivá, přičemž se abstrahuje od toho, zda tuto výpověď někdo kdy vyjádřil slovy či zda byla někým myšlena. Věta o sobě tedy *není jazykovým útvarem*, jazyk je pouze prostředek, kterým je věta o sobě vyjádřena: *tatáž věta o sobě může být např. vyjádřena česky i německy*. Na základě pojmu věty o sobě Bolzano definuje *představu o sobě*. Termíny našeho jazyka, vyskytující se ve větách, jsou označením určitých *představ* (zde je slovo "představa" značně zavádějící, jak Bolzano sám uznává, neboť navozuje

dojem něčeho subjektivního - vhodnější by bylo třeba slovo "pojem", podle Bolzana je ovšem termín "pojem" příliš úzký, neboť představy o sobě se mohou týkat např. smyslových vjemů). Abstrahujeme-li od toho, zda danou představu někdo myslí či vyjadřuje pomocí slov, dostaneme se tak k představě o sobě. Přestava o sobě je tedy součástí věty o sobě, může být vyjádřena pomocí jazyka, sama o sobě ale není jazykovým útvarem.³

Mluví-li Bolzano ve svém výkladu odvoditelnosti o větách, má vždy (pokud výslovně nestanoví jinak) na mysli věty o sobě. Pro zjednodušení se tedy přidržíme jeho způsobu a budeme mluvit pouze o větách, přičemž se tím vždy míní věty o sobě. Podobně kde bude řeč o představách, rozumí se tím představy o sobě.

Při zkoumání pravdivosti vět dochází Bolzano k zajímavému poznatku: v rámci věty lze jednu nebo více představ obměňovat, tj. nahrazovat ji různými jinými představami, a při tom sledovat, jaký vliv to má na pravdivostní hodnotu věty: "Z toho však zřetelně vysvítá, že na chování vůči pravdě, jež projevují všechny věty, které je možno utvořit z dané věty, když v ní předpokládáme existenci jedné nebo několika proměnných částí, se lze dívat jako na vlastnost, která nám dává hlouběji poznat povahu této věty samé."⁴

Na základě této možnosti obměňování Bolzano definuje pojem *odvoditelnosti*. Mějme věty A, B, C, D,... a věty M, N, O,..., v nichž považujeme za proměnné (tedy obměnitelné) určité představy, které budeme označovat i, j,... Nechť nyní platí, že všechny představy, které činí po dosazení na místo představ i, j,... všechny věty A, B, C, D,... pravdivými, činí pravdivými i všechny věty M, N, O,... Pak řekneme, že věty M, N, O,... jsou *odvoditelné* z vět A, B, C, D,... *vzhledem k představám i, j...*⁵

Tarski bere ve své definici *logického vyplývání* za základ následující podmínku:

(1) Mějme třídu výroků K a výrok X. Kdykoli nahradíme ve výrocích třídy K a ve výroku X všechny mimologické konstanty libovolnými jinými konstantami (stejně stejnými) a označíme takto vzniklou třídu výroků K a takto vzniklý výrok X, musí být výrok X pravdivý, jsou-li pravdivé všechny výroky třídy K.

Tarski považuje tuto podmínku za nutnou, nikoli však postačující pro to, aby X vyplývalo z třídy K. Problém je totiž podle Tarského v tom, že příslušný jazyk nikdy nemá dostatečnou zásobu mimologických konstant, jinými slovy nikdy nemá označení pro *všechny* možné předměty, tudíž při uvedeném nahrazování nelze projít všechny případy. Tarski se proto snaží

nalézt způsob, jak si s tímto problémem poradit, a zároveň zachovat uvedenou podmínku.

Zavádí proto pojem *modelu*. Model definuje následujícím způsobem: nechť má v uvažovaném jazyce každá mimologická konstatna odpovídající proměnnou. Máme-li libovolnou třídu výroků L , nahradíme v ní všechny mimologické konstanty příslušnými proměnnými - dostaneme tak třídu L výrokových funkcí. Libovolnou posloupnost předmětů, která splňuje (příčemž pojem splňování, *erfüllen*, vyžaduje podle Tarského ještě podrobnější definici v závislosti na konkrétním jazyce) každou výrokovou funkci třídy L , nazveme *modelem* třídy výroků L . Sestává-li třída L z jednoho jediného výroku, mluvíme o modelu výroku. Definice vyplývání je pak podle Tarského následující: Výrok X logicky vyplývá z třídy výroků K právě tehdy, když každý model třídy K je zároveň modelem výroku X .⁶

Proberme si nyní, v čem se obě definice liší. Zdá se, že Bolzano používá pro svoji definici podmínku (1), která však podle Tarského není postačující. Bolzanova definice se však od podmínky (1) liší ve dvou zásadních ohledech. Zatímco Tarski ve své podmínce (1) uvažuje nahrazování mimologických konstant jinými mimologickými konstantami, tj. nahrazování jazykových výrazů jazykovými výrazy, Bolzano mluví o obměňování představ o sobě. Představa o sobě však není závislá na svém jazykovém vyjádření, a tudíž ani na tom kterém konkrétním jazyce. Tarského námitka, že jazyk nemusí mít pojmenování pro všechny předměty, je tak v Bolzanově pojetí bezpředmětná, protože Bolzano zde vůbec nezachází s jazykovými výrazy. Tak se Bolzanova definice přibližuje spíše Tarského pojmu modelu, přičemž podle Tarského posloupnosti předmětů splňují výrokové funkce, podle Bolzana jsou věty o sobě činěny pravdivými dosazováním představ o sobě.

Je sice možné mít výhrady k Bolzanovým pojmům věty o sobě a představy o sobě, na kterých je celá jeho definice založena, nicméně velmi podobné výhrady lze mít i k Tarského pojmu "předmětu", neboť Tarski pod pojem předmětu musí zahrnovat vedle materiálních předmětů nejen např. čísla, nýbrž i vlastnosti, relace aj. Pokud by Tarski stanovil určité universum, vůči kterému by odvoditelnost definoval, problému by se stejně nevyhnul: buď by toto universum definoval dostatečně jednoznačně, pak by ale nutně bylo omezené a v důsledku toho by Tarského pojem předmětu nebyl vyčerpávající, nebo by vymezil universum tak, aby v zásadě odpovídalo skutečnému světu, pak by ovšem dostal stejně vágně vymezenou oblast jako Bolzano svou definicí představ o sobě. Navíc se zdá, že Bolzanův pojem představy o sobě může poskytovat v určitých ohledech více možností než Tarského pojem

předmětu: Bolzano např. připouští i tzv. *bezpředmětné představy*, tedy představy, kterým ve skutečnosti nic neodpovídá (např. "zlatá hora")⁷, které je nicméně smysluplné dosazovat do zkoumaných vět. S něčím takovým by Tarski měl patrně větší problémy.

Další podstatná odlišnost v Bolzanově definici vlastně poskytuje i určitou odpověď na Tarského vlastní námitku proti své definici, kterou Tarski sám nechává otevřenu: podle Tarského totiž nelze stanovit přesné hranice mezi logickými a mimologickými konstantami, a tudíž se celá definice logického vyplývání stává nejasně vymezenou, závislou na tom, co je zrovna považováno za logické konstanty.⁸ Bolzano však nemluví o odvoditelnosti jako takové, nýbrž o odvoditelnosti *vzhledem k představám i, j, ...* Bolzano tak připouští nejen nahrazování jen některých mimologických konstant (přesněji řečeno představ o sobě, které jsou označeny mimologickými konstantami) v závislosti na tom, které představy se rozhodneme považovat za proměnné části, nýbrž i nahrazování také logických konstant (přičemž je mu jasné, že pak z původní věty nemusí zůstat zachováno nic a že v případě obměnitelnosti logické konstanty již rozhodně nemůže být řeč o logické odvoditelnosti) a nepotřebuje tudíž pro svůj pojem odvoditelnosti rozlišení mezi logickými a mimologickými konstantami. Jeho pojem odvoditelnosti je tak obecnější, neomezuje se jen na logickou odvoditelnost (takže je např. věta "Gajus je smrtelný" odvoditelná z věty "Gajus je člověk" vzhledem k představě Gajus). Přirozeně je si Bolzano vědom, že logika by se měla zabývat jen určitým druhem odvoditelnosti, totiž logickou odvoditelností - nicméně otázka, co vlastně do logické odvoditelnosti spadá, se pak stává více problémem logiky samotné než problémem definice odvoditelnosti. Bolzano si totiž stejně jako Tarski uvědomuje neostrost rozdílu mezi logickými a mimologickými konstantami a z toho plynoucího problém s ostrostí definice logického vyplývání.⁹

Bolzanova definice se od Tarského mírně odlišuje ještě v jednom bodě: Bolzano totiž při zavádění pojmu odvoditelnosti předpokládá, že uvažované věty A, B, C, D, ... a M, N, O, ... jsou navzájem *slučitelné vzhledem k představám i, j, ...*, což pro Bolzana znamená, že existuje alespoň jedna posloupnost představ, která po dosazení za proměnné představy i, j, ... činí všechny věty A, B, C, D, ... i M, N, O, ... pravdivými.¹⁰ V Tarského terminologii by to vlastně znamenalo, že příslušná množina výroků $K \cup \{X\}$ musí mít model, tj. být bezesporná (proto v této souvislosti mluví např. Jan Berg o "podmínce konzistentnosti"¹¹). Bolzano tedy nepřipouští odvozování z kontradikce, což je intuitivně přijatelnější, nicméně poněkud omezující. Důsledkem toho například je, že tautologie není automaticky odvoditelná

z čehokoli (neboť např. s kontradikcí není slučitelná a tudíž nespĺňuje výchozí podmínku odvoditelnosti).

V zásadě lze tedy říci, že přes určité drobné rozdíly se obě definice shodují nejen co do základní myšlenky, nýbrž i co do přesnosti provedení. Pak je ovšem potřeba přiznat v tomto směru Bolzanovi učitě prvenství, protože jeho o sto let starší definice je ve srovnání s Tarského definicí plně postačující.

*Filosofický ústav AV ČR,
Jilská 1, Praha 1, 110 00*

LITERATÚRA

- [1] BERG, J. (1962): **Bolzano's Logic**. Stockholm.
- [2] BOLZANO, B. (1837): **Wissenschaftslehre - Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik**. Sulzbach. K českým citacím použito překladu B. Bolzano: Vědosloví (Výbor), přel. Bayerová a Loužil, Academia, Praha 1981
- [3] TARSKI, A. (1936): Über den Begriff der logischen Folgerung. In **Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique**, vol. 7, Paris 1936, 1-11.

POZNÁMKY

¹ Článek vyšel nejprve polsky pod názvem O pojęciu wynikania logicznego, in *Przegląd Filozoficzny*, vol 39 (1936), později německy pod názvem Über den Begriff der logischen Folgerung, *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, vol. 7 (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, vol 394), Paris, 1936.

² A. Tarski, [3], str. 6. V pozdějším vydání Tarski v přidané poznámce pod čarou vcelku lakonicky konstatuje, že H. Scholz ve svém článku *Die Wissenschaftslehre Bolzanos, eine Jahrhundert Betrachtung* upozorňuje na značnou analogii mezi Tarského a Bolzanovou definicí. Tarski to nedoprovází žádným komentářem. (Poznámku pod čarou viz Tarski: **Logic, Semantics, Metamathematics**, Oxford 1969, str. 417).

³ Viz např. B. Bolzano, [2], § 19, str. 76-8, §§ 48, 49, str. 215-221.

⁴ B. Bolzano, [2], § 147, str. 79, český překlad str. 190.

⁵ B. Bolzano, [2], § 155, str. 113-133.

⁶ Celý výklad viz A. Tarski, [2], str. 1-9.

⁷ B. Bolzano, [2], § 67, str. 304-5.

⁸ A. Tarski, [2], str. 10-11.

⁹ B. Bolzano, [2], § 148, str. 83, § 154, str. 101-2, § 223, str. 391-395.

¹⁰ B. Bolzano, [2], § 155, str. 113.

¹¹ J. Berg, [1], str. 119-120.