Pavol Zlatoš: Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou

IRIS, Bratislava 1995, 208 s.

Kniha Pavla Zlatoša *Ani matematika si nemôže byť istá sama sebou* je (po knihe S. Felbera *Filozofia matematiky* Bratislava 1959) po dlhšom odstupe druhým pôvodným dielom v odbore filozofie matematiky na Slovensku. Kým u našich susedov sa filozofia matematiky považuje za integrálnu súčasť filozofie (stačí spomenúť mená ako B. Bolzano, L. Wittgenstein, I. Lakatos či A. Tarski), na Slovensku sa filozofia matematiky ešte stále vníma ako čosi cudzie, či prinajlepšom okrajové. Samozrejme, jedna kniha nemá šancu túto situáciu zmeniť. Som však presvedčený, že kniha P. Zlatoša je impulzom, ktorý môže k tejto zmene v mnohom prispieť. Autorovi sa totiž podarilo skĺbiť hlbokú znalosť základov súčasnej matematiky s jej historickým výkladom, ako aj filozofickou reflexiou. Zároveň je však kniha napísaná sviežim a zrozumiteľným jazykom, s minimálnou dávkou formalizmu. Preto jej môžu porozumieť nielen matematici, zaujímajúci sa o humanitné aspekty svojej disciplíny, ale aj profesionálni filozofi či historici, ktorí si chcú doplniť humanitné vzdelanie trochou matematiky. Práve táto schopnosť premostiť dve zložky kultúry, humanitnú a exaktnú, je silnou stránkou knihy P. Zlatoša, ktorá ju predurčuje aby sa stala vzorom pre ďalšie filozofické diela v tejto oblasti.

Moja recenzia nechce byť štandardnou recenziou, ktorá stručne uvedie obsah knihy a na záver vyzve čitateľa aby si ju prečítal. Je to jednak preto, lebo neverím, že na moje odporúčania ktokoľvek dá. Okrem toho takúto informáciu čitateľ ľahko získa, keď si prečíta obsah knihy. Kniha je prehľadne členená na kapitoly a ich názvy jasne označujú kľúčové témy a etapy vo vývine modernej matematiky od vzniku teórie množín v druhej polovici minulého storočia cez objavenie množinových paradoxov a rôznych pokusov na ich prekonanie (logicizmus, formalizmus a intuicionizmus), až po Gödelove vety a ich dôsledky. Cieľom tejto recenzie nie je informovať o tom, čo je obsiahnuté v knihe, ale skôr sa zamyslieť nad témami, ktoré ostali v knihe nedopovedané, nad otázkami, ktoré autor načrtol ale nezodpovedal, nad odpoveďami, ktoré síce dal, ale ktoré navodzujú ďalšie otázky.

Pri čítaní knihy som mal pocit, že autor v nej nešiel "na doraz". Pravdepodobne nechcel ísť až na hranicu povedateľného, kde už končí hra intelektu, kde už prestáva nadhľad rozumu, kde sa už nedá kontrolovať, čo človek píše, lebo už naprosto chýba odstup, proste kde sa začína ozajstné filozofovanie. Je pravdepodobné, že ho k tomu viedli didaktické dôvody, starosť o to, aby bola kniha zrozumiteľná aj nematematikom. Domnievam sa však, že by si matematická verejnosť a najmä on sám, zaslúžili priestor aj pre vypovedanie zvyšku, ktorý ostal v hĺbke jeho mysle po tom, čo položil na papier všetko to, nad čím má nadhľad, čomu dokonale rozumie a čo bravúrne ovláda. Preto moje poznámky na okraj jeho knihy sú výzvou, aby sa s nami o tento zvyšok podelil.

Prečo vôbec "písať na doraz"? Preto, lebo len tak sa niečo naozaj nové naučíme. Jedným zo zvláštnych aspektov písania na hranici poznania je, že občas sa na papieri

ORGANON F 4 (1997), No. 1, 91-104

objaví aj niečo, čo sme nečakali, niečo, čo sme nemienili napísať, niečo, čo z nás len tak náhodou vyšlo. Samozrejme je tu nebezpečenstvo, že keď človeku chýba odstup, môže dať na papier niečo hlúpe. Ale hlúposti zväčša sami odhalíme, alebo nám v tom pomôže pozorný recenzent. Čo je však dôležitejšie je, že pri takomto spôsobe písania sa občas dostanú na papier myšlienky, ktoré presahujú to, čo bezpečne vieme, myšlienky, ktoré presahujú nás a teda s ktorých pomocou môžeme presiahnuť seba.

Tieto myšlienky sa vyznačujú tým, že ležia "naprieč textom". Vlastne doň nepatria, lebo patria už do nových kníh a textov. Spoznáme ich podľa agramatizmov, kostrbatých formulácií, nevyváženosti štýlu, rôznych hrán a zlomov v texte. Tieto štylistické nedostatky však nemusia byť na závadu. Možno znechutia povrchného čitateľa, ktorý chcel strávit' pri knihe niekoľko príjemných chvíľ, hladko kĺžuc po vyleštených formuláciách. Ale pre čitateľa, ktorý je ochotný pri takomto zlome sa pozastaviť, pozrieť si podrobnejšie jeho priebeh a zostúpiť po ňom do hlbších vrstiev textu, tomu sa môže práve takýto zlom stať podnetom pre vlastné premýšľanie či tvorbu.

To samozrejme neznamená, že sa vo filozofii môže písať nedbalo. Nejde mi o to písať zmätene, či dokonca nejasne. Ide len o to nevynechávať veci, ktoré jasne napísať nevieme. Wittgensteinovo tvrdenie, že čo sa dá povedať sa dá povedať aj jasne, zamlčuje jednu závažnú vec jasne sa to dá povedať až neskôr. Nechcem obhajovať nejasné písanie, ale skôr vyjasňujúce písanie. A kniha, ktorú nám predložil P. Zlatoš, je možno až príliš jasná. Jej formulácie sú vyhladené, jej vnútorné zlomy starostlivo skryté. Preto nasledujúci text bude plný zveličovania a prekrúcania, pomocou ktorých sa ho pokúsim vyrušiť z pokoja Rozumu a Dokonalosti.

Svoje poznámky som rozčlenil podľa určitých tematických celkov, ktoré sa v texte neustále vracajú. Pred každým citátom, ktorý komentujem, uvádzam číslo strany a riadku. Ak by bol citát príliš dlhý, uvediem iba jeho kľúčové časti.

1. Platonizmus ako východisko pre filozofiu matematiky

16_{10} Cestu, ktorou prenikáme z reálneho do ideálneho (nielen) matematického sveta, nazývame idealizáciou. Túto cestu si môžeme vykladať ako postupne sa otvárajúci a rozjasňujúci pohľad nás, bytostí pripútaných k reálnemu svetu, do sveta ideálneho, v ústrety svetlu, ktoré sa nám rozžína oproti, rozptyľujúc chmáry a rozháňajúc temnoty ...

Toto je ukážka platónskej **mytológie**. Napriek tomu, že vytrhnutá z kontextu znie dosť absurdne, je na nej kus pravdy. Platón vystihol pocity človeka, ktorému sa otvára "geometrický svet". Ale nie som si istý, či tento mýtus možno použiť ako východisko **filozofickej** reflexie. Moje pochybnosti sú nasledovné:

1. Funguje táto schéma aj pre iné disciplíny matematiky? Mám na mysli predovšetkým kalkuly, ako je algebra, diferenciálny počet alebo predikátový počet. Vystihuje uvedený mýtus aj dielo Cardana, Leibniza či Fregeho? Nešlo v uvedených prípadoch o niečo iné, než rozjasňujúci sa **pohľad**?

2. Nie je platónsky mýtus viazaný na "ducha gréckej kultúry"? Prenikajú aj Arabi či Židia do ideálneho sveta touto platónskou cestou? Veď v týchto kultúrach je slovo zásadne nadradené obrazu. Je možné, že ich do ideálneho sveta vedie nie pohľad, ale **hlas**. Toto treba zvážiť v súvislosti s Cantorom.

19[3] *Matematika sa totiž obracia - a často sa dokonca musí obracať - na svoje ideálne objekty, ako keby to boli objekty reálne. Z nich potom opätovnou idealizáciou môže tvoriť ideálne objekty vyššej úrovne. Typickým príkladom takéhoto prístupu je abstraktná algebra alebo funkcionálna analýza.*

Ak je idealizácia naozaj cesta za svetlom, za čoraz plnšou pravdou, dokonalosťou a čistotou, tak keď sa matematici obracajú ku svojim ideálnym objektom ako k reálnym, vlastne ich zatemňujú a znečisťujú. Pritom je divné, že keď tieto temné a nečisté objekty znova vyčistia a zjasnia, (teda uskutočnia ich opätovnú idealizáciu) zrazu vznikne čosi iného, než tam bolo pred ich zatemnením. Matematik tak pripomína cirkusového kaukliara, ktorý strčí do klobúka rukavice a vytiahne z neho králika. Pritom oba uvedené príklady sú **kalkuly**. Preto je možné, že v prípade kalkulov nejde o idealizáciu platónskeho druhu, ale o nejaký iný proces.

20[8] *Popri prebývaní v ideálnom matematickom svete sú ideálne matematické objekty súčasťou nášho kolektívneho vedomia.*

21[5] *Ideálne matematické objekty teda existujú v našom myslení.*

Pojem kolektívneho vedomia je pomerne nejasný. Je si kolektív vôbec niečoho vedomý? Ako sa dá zistiť čoho? A čo ak majú niektorí členovia kolektívu na niečo odlišné názory znamená to schizofréniu kolektívneho vedomia, alebo za kolektívne vedomie platí názor väčšiny? Čo potom s kolektívmi s párnym počtom členov, v ktorých určitý názor zastáva presná polovica.

Podľa mňa je rozumnejšie ideálne matematické objekty fixovať na **formálne jazyky**, ktoré sa počas vývinu matematiky konštituovali. Keď prijmeme toto jazykové zakotvenie sveta matematiky, tak rozlíšenie medzi jazykom (súborom noriem a pravidiel,...) a prehovorom (použitím týchto pravidiel) nám umožňuje všetky vyššie spomenuté problémy obísť. Pri tomto lingvistickom výklade je idealizácia vlastne zrodom novej syntaktickej štruktúry. Pravidlá tejto novej syntaxe v mnohom pripomínajú pravidlá, ktoré sme v prirodzenom jazyku používali na opis reálnych javov. Dva a dva sú štyri tak v prirodzenom jazyku, ako aj vo formálnej aritmetike. Rozdiel je len v tom, že formálny jazyk nám umožňuje prekročiť horizont reálneho sveta a konštruovať syntakticky správne utvorené výrazy, ktorým v reálnom svete nič nezodpovedá. A aby im predsa len niečo zodpovedalo, vymyslí sa ideálny svet.

V tomto pohľade je prvotný jazyk, kým idealizácia je odvodená. Preto keď si geometrické obrázky vyložíme ako jazyk, pričom Euklidove axiómy opisujú jeho syntax, celý platónsky mýtus stráca na význame. Netreba sledovať žiadne svetlo, netreba nič vyčisťovať stačí upresňovať syntaktické pravidlá (v geometrii sú to pravidlá geometrických konštrukcií). Rozdiel medzi geometriou a algebrou sa dá vyložiť ako vzťah medzi ikonickými a symbolickými jazykmi. Samovzťažnosť nás potom neprivedie k žiadnemu novoplatonizmu. Je to vlastnosť väčšiny jazykov.

Tento **lingvistický obrat vo filozofii matematiky** má tiež slabé miesta. Vykladať obrázky ako jazyk naráža na zásadný problém. Obrázky sú termy (alebo aspoň ich možno tak vykladať). Nie je však jasné, ako do obrázkov zaviesť predikáty, avšak bez predikátov sa nedajú tvoriť tvrdenia. Považovať za jazyk súbor znakov, v ktorom nemožno sformulovať žiadne tvrdenia, je tiež len metafora asi nie oveľa lepšia než bola Platónova metafora so svetlom. Ale aj keď je jazyková koncepcia vo filozofii matematiky len v počiatkoch, a nemôže si nárokovať na úlohu nahradiť platónsky mýtus, umožňuje vytvoriť od neho odstup. Tým, že považuje idealizáciu za niečo nepôvodné, odvodené, druhotné, vo vzťahu k jazyku, možno vrhne nové "svetlo" aj na platónsku filozofiu matematiky.

29_{16} Platónova filozofia na ňu dáva prekvapivo jednoduchú a konzistentnú odpoveď vo svojej teórii rozpomínania. Naša duša sa totiž rozpomína na idey, ktoré poznala v dobe, keď sa ešte nespojila s telom a sama prebývala v riši ideí.

Platónske rozpomínanie je pomerne divná vec. Aspoň pre mňa je záhadou, že v 17. storočí si mnoho matematikov zrazu začalo spomínať na diferenciálny počet, ale nikto z nich si nespomenul na teóriu množín. Naproti tomu na začiatku 20. storočia si zrazu masovo spomenuli na množiny. Podobne aj s neeuklidovskou geometriou po dlhé stáročia sa zopár matematikov márne usilovalo rozpomenúť sa na túto teóriu, a potom zrazu okolo roku 1820 si na ňu spomenú hneď piati nezávisle od seba. Nechápem, prečo si v Grécku nik nespomenul na teóriu grúp alebo diferenciálnu topológiu. Určite by to nasledujúcim generáciám uľahčilo prácu.

Na vysvetlenie tejto zvláštnej regularity sa prirodzene ponúka možnosť, že idey "existujú rôzne hlboko". Potom matematici ako Cantor či Zermelo (matematici, ktorí si ako prví spomenuli na teóriu množín na konci 19. a začiatku 20. storočia) sa **viac odpútali od telesnosti** než Bolyai, Lobačevskij či Gauss (ktorí si spomenuli na neeuklidovskú geometriu na začiatku 19. storočia) a všetci spomenutí sa **ešte viac odpútali od telesnosti** než Leibniz či Newton, ktorí si dokázali spomenúť iba na diferenciálny a integrálny počet.

Ale uznávam, že Platónova teória je príťažlivá, veď z toho, že celkový objem matematických ideí neustále narastá, jasne vyplýva, že matematikom sa stále lepšie darí odpútavať sa od telesnosti. Domnievam sa, že stačí ešte niekoľko objavov, a toto odpútanie sa bude úplné.

2. Teória množín - klasická aj alternatívna

41^2 Tým však dochádza k neobyčajnému rozšíreniu a obohateniu, no niekedy i k zanešváreniu rôznych oborov objektov skúmaných tradičnými matematickými disciplínami o objekty nové, ktoré nielenže nemôžeme nazerať, ale nevieme si ich ani predstaviť ...

Domnievam sa, že Peanova krivka, podobne ako Bolzanova funkcia, sú pôvodne topologické a nie množinové objekty. U Bolzana by stálo za zistenie, či v čase, keď napísal svoj "Rein analytischer Beweis" už pracoval na teórii množín, alebo ho ku skúmaniu teórie množín priviedla až táto funkcia. Podobne u Peana si možno položiť otázku, do akej miery sú jeho úvahy množinové, a do akej topologické. Tieto rozlíšenia by mohli pomôcť pri presnejšom pochopení zámerov teórie množín a odlíšiť ich od zámerov topológie.

42[10] Vidíme teda, že v podstate podvedomý zámer teórie množín - vyložiť čo najviac javov ako objekty - má značný metodologický dosah..

Tu vidno, prečo pre pochopenie vlastných zámerov teórie množín je potrebné ju prísne oddeliť od ostatných teórií. Totiž tento objektivizačný zámer nie je vonkoncom čosi špecifické pre teóriu množín, ale je to skôr charakteristická črta celej matematiky. Prvou veľkou objektivizáciou v modernej matematike bolo, keď Descartes dal meno (súradnicu) miestu nezávisle od toho, či sa v tomto mieste niečo nachádza, alebo nie. Inak povedané s nesúcnom začína narábať tak, ako keby existovalo. Viedlo to napokon k zrodu pojmu priestoru. Druhý veľký krok urobil Leibniz, keď začal vykladať ako objekty všemožné vzťahy (ktoré nazval funkciami). Každý, kto pozná klasickú ontológiu, vie, že vzťah nemá samostatné bytie, nie je substanciou. Napriek tomu s funkciami pracujeme, ako keby substanciami boli.

Preto pripisovať zámer objektivizácie teórii množín nie je podľa mňa správne. Cantor tu len nadväzuje na omnoho hlbší prúd, ktorý sa tiahne celými dejinami matematiky. Možno by bolo zaujímavé upresniť, čo z toho, čo P. Zlatoš charakterizoval ako zámer teórie množín, táto teória zdieľa s inými teóriami. Jednak súvekými (napr. s topológiou ujasniť pojem kontinua, s aritmetikou ujasniť pojem kardinality) ako aj staršími (napr. s analytickou geometriou či diferenciálnym a integrálnym počtom). Takéto porovnanie by umožnilo zámery teórie množín oddeliť od "zámerov doby" (t.j. zámerov spoločných pre viaceré teórie konca 19. a začiatku 20. storočia) a tiež od zámerov matematiky ako takej. Obávam sa, že objektivizačný zámer je všeobecným zámerom celej matematiky.

44[5] Tak je to nielen pri pohľade do diaľky, t.j. smerom k čoraz väčším vzdialenostiam, keď sa pred nami otvára obzor dosiahnuteľnosti...

Možno by bolo rozumnejšie hovoriť o obzore dohliadnuteľnosti. Celá naša telesnosť je zasadená v súbore horizontov kam dosiahnem rukou, kam viem dočiahnuť keď sa postavím na špičky, kam viem dôjsť, kam až dovidím, horizont dosluchu, horizont citlivosti čuchu. Základná otázka je, či majú tieto horizonty rovnakú štruktúru. Myslím si, že nemajú. Potom by bolo miešanie zrakového a motorického horizontu omylom. Teória množín má sklon všetky horizonty vykladať pomocou nekonečna. Aby sme však mohli tento jej zámer kriticky preskúmať, nesmieme sa zriecť porozumenia odlišnosti jednotlivých druhov horizontov.

44[15] Ak si javy, ubiehajúce až k tomuto obzoru, vyložíme ako nekonečné, hovoríme o takzvanom prirodzenom nekonečne. Obzoru však nerozumieme ako hranici sveta, ale ako hranici nášho pohľadu na svet.

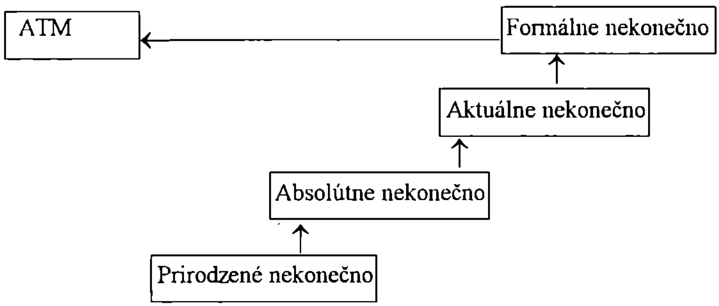
Keď si človek prečíta takýto pekný fenomenologický úvod, a celý natešený siahne po knihách o teórii množín s očakávaním, že sa tam dočíta niečo o horizontoch, je prekvapený, že tam nič podobné nenájde. Takýto filozofický úvod je pekný, teória množín je tiež pekná, ale vonkoncom mi nie je jasné, ako tieto dve veci súvisia. Aj pri čítaní *Úvodu do alternatívnej teórie množín* mi ostalo záhadou, ako podobné filozofické úvahy, obsiahnuté v úvodných kapitolách, súvisia s matematickou teóriou, ktorá po nich nasleduje. **Ako možno fenomenologicky zdôvodniť axiómu indukcie?** Obávam sa, že nijako. Čo je z hľadiska fenomenológie prázdna množina? Je to zrútený obzor? Kde v pohľade ubiehajúcom k obzoru nájdeme čosi také ako prázdnu množinu? Kde sa nabral jazyk teórie množín ako možno fenomenologicky vyložiť pojem premennej či kvantifikátora? Ako možno pomocou fenomenológie vyložiť rozdiel medzi množinovou a nemnožinovou vlastnosťou? Čo je z fenomenologického hľadiska množinové univerzum - zásvetie? Autorove úvahy o horizontoch mi pripomínajú príslovie "Vodu káže víno pije". Tieto duchaplné fenomenologické reflexie nesúvisia s tým ako sa teória množín naozaj robí, nezachytávajú jej každodennosť, jej bežné postupy a metódy. Toto je dôvod, prečo som chcel, aby sa u Bolzana a Peana odlíšili ich topologické práce od teórie množín. Domnievam sa totiž, že úvahy o horizontoch predstavujú pomerne elegantnú a hlbokú filozofiu, ale **filozofiu topológie**. S teóriou množín však nemajú nič spoločné. Iba v dôsledku neujasnenosti rozdielu medzi topológiou a teóriou množín vzniká tento čudný vopěnkovský konglomerát teória množín zrastená s filozofiou topológie.

47[2] Jednako porozumenie pre nekonečno ako pre nekonečno absolútne sa v tomto období na pôde matematiky definitívne kanonizuje, keďže stratené porozumenie pre nekonečno prirodzené sa do tých čias v rámci klasickej objektívnej vedy nestihlo obnoviť, a nikto sa o to ani nepokúšal.

Vynára sa otázka, kedy sa toto porozumenie stratilo? A existovalo niekedy porozumenie pre prirodzené nekonečno? Nie je to len naša spätná konštrukcia v štýle ako sa bežne spätne píšu dejiny? Zoberie sa súčasná citlivosť, súčasné pojmy a normy, a z ich hľadiska potom prerozprávame minulosť. Takýmto spôsobom je možné písať o gréckom pojme nekonečna ako o nekonečne prirodzenom, lebo v Grécku ešte nedošlo k jeho absolutizácii. Ale grécky pojem nekonečna nemá pravdepodobne nič spoločné s nekonečnom prirodzeným. Je otázne, či u Grékov sme oprávnení hovoriť o horizontoch. Samozrejme, po renesancii vnímame svet tak, ako je otvorený indivíduu, a k takto otvorenému svetu náleží aj horizont. Ale nie som si istý, či pri výklade gréckej matematiky pomocou horizontov jednoducho neprojektujeme náš pohľad, našu citlivosť, naše vnímanie na ich svet, a myslíme si, že oni to museli tiež tak vidieť. Všetky stratené raje, a v rámci nich aj stratené porozumenie pre prirodzené nekonečno s najväčšou pravdepodobnosťou nikdy neexistovali. Je to len spätná projekcia. Preto by bolo zaujímavé pokúsiť sa o skutočne historickú rekonštrukciu vývinu pojmu nekonečno. Vyjasniť kedy došlo k jeho absolutizácii a u koho, kedy k jeho aktualizácii a u koho. Pritom bude asi treba sledovať paralelne matematiku a teológiu, prípadne aj astronómiu. Procesy aktualizácie a absolutizácie nekonečna sú dôležité pre pochopenie viacerých aspektov vývinu matematiky, a preto by asi stáli za viac než len špekulatívny náčrt.

49[1] Cestu prirodzenému nekonečnu začne do matematiky kliesniť až o ďalších desať rokov neskôr takzvaná alternatívna teória množín ...

Nie som si istý, či v prípade alternatívnej teórie množín je oprávnené hovoriť o čomkoľvek prirodzenom. Celá matematika je v istom zmysle neprirodzená, lebo nahrádza prirodzenú skúsenosť idealizovanými objektmi. Ale v prípade teórie množín táto primárna matematická idealizácia viedla k paradoxom, a preto došlo k druhému kroku naivná teória množín bola nahradená formálnou axiomatickou teóriou. Myslím, že tento druhý krok spôsobil odtrhnutie teórie množín od prirodzených predstáv (tie sú totiž sporné). V tomto kroku však alternatívna teória množín klasickú cantorovskú verne nasleduje. Celkovo možno povedať, že alternatívna teória množín (ATM) sa zakladá na nasledovných posunoch:

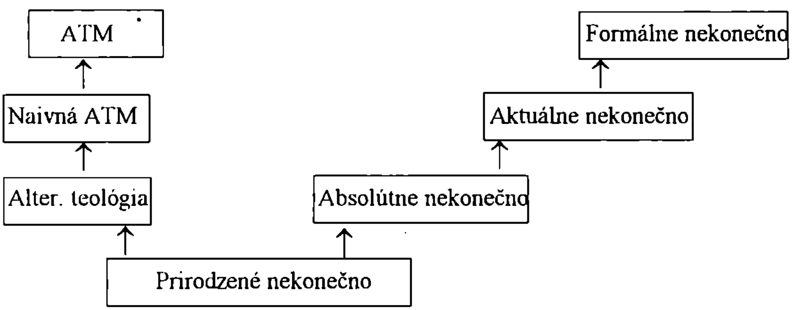


Pri jednotlivých krokoch (absolutizácii, aktualizácii, formalizácii) dochádza k určitým posunom pojmovej štruktúry, čo som sa usiloval naznačiť tým, že novú teóriu kreslím trochu posunutú. Potom to, že sa ATM usiluje o návrat k prirodzenému nekonečnu možno znázorniť tým, že sa pokúša svoju formálnu štruktúru vrátiť späť nad pôvodné fenomenálne pole, od ktorého sa klasická teória vzdialila. Táto schéma ukazuje, že ATM nedisponuje vlastným spôsobom absolutizácie nekonečna, ani vlastným spôsobom jeho aktualizácie či formalizácie. Všetko toto preberá od klasickej teórie množín. Nemožno jej to vyčítať, veď niekde začať treba, a začať formálnou alternatívou je asi to najprirodzenejšie.

Rovnako začínala aj kvantová mechanika na počiatku bol formálny trik použitý Planckom pri výpočte spektrálneho rozdelenia žiarenia absolútne čierneho telesa. Bola to len formálna schéma bez vlastnej konceptuálnej bázy. Potom prišiel Einstein s teóriou fotoefektu, Bohr s modelom atómu, Broglie s vlnami matérie, aby sa nakoniec u Heisenberga, Schrödingera a Diraca postupne vytvorila konceptuálna báza novej teórie. A obávam sa, že toto alternatívnu teóriu množín ešte len čaká. Ide o to vytvoriť pre ňu konceptuálnu bázu, ktorá by nebola odvodená od pojmovej stavby klasickej teórie množín, ale disponovala by vlastnou **alternatívnou absolutizáciou, aktualizáciou a formalizáciou nekonečna**. Až keď sa ATM konceptuálne ukotví v prirodzenom nekonečne spôsobom nezávislým od cesty klasickej teórie množín, bude možné povedať, že prekliesnila cestu prirodzenému nekonečnu do matematiky. Nič však nenasvedčuje, že by sa ATM o to naozaj usilovala.

Práce Petra Vopěnku tým, že sa v nich mieša filozofia topológie s formálnym aparátom teórie množín, vyvolávajú ilúziu, že alternatívna teória množín vlastnú konceptuálnu bázu už od začiatku má. Nie je to však pravda. Filozofické pasáže zakotvené vo fenomenológii horizontu a formálny aparát založený na prísnej formalizácii jazyka navzájom vôbec nesúvisia. Sú to originálne a zaujímavé teórie, ale okrem svojho tvorcu nemajú asi veľa spoločného. Ich nešťastné spojenie odviedlo pozornosť matematikov od nevyhnutnosti konceptualizácie alternatívnej teórie množín. To, že konceptuálna a formálna zložka alternatívnej teórie množín spolu nijako nesúvisia, malo za následok, že matematici, ktorí sa podieľali na rozpracovávaní tejto teórie, boli síce filozofickými úvahami jej autora nadšení, ale nedokázali v nich pokračovať. To, čo robili pri formálnom rozpracovávaní teórie im neumožňovalo prehlbovať jej konceptuálnu stavbu. Preto sa konceptuálna stavba alternatívnej teórie množín nijako nerozvíjala a po vyčerpaní možností formálneho rozvoja celá teória pomaly odumrela.

Toto odumretie však nebolo nutné. Nebolo spôsobené vnútornou slabosťou teórie, ale skôr nešťastnými okolnosťami, tkvejúcimi vo filozofických záľubách P. Vopěnku. Preto by možno stálo zato pokúsiť sa oddeliť ATM od fenomenológie a rozpracovať pre ňu jej vlastnú konceptuálnu bázu. Teda pokúsiť sa postupne prepracovať od vrchného poschodia formálnej teórie až k prirodzenému nekonečnu, podobne ako sa kvantová mechanika postupne, cez fotoefekt a Bohrov model atómu prepracovávala až k vlastnému pojmu fyzikálnej reality, založenému na princípe neurčitosti a komplementarity. Ide o to nájsť analogické princípy aj pre alternatívnu teóriu množín.



Bolo by možno zaujímavé pokúsiť sa napísať knižku "Naivná alternatívna teória množín", (istú analógiu slávnej Halmosovej učebnice) t.j. ATM budovanú v naivnom duchu, bez schémy axióm indukcie a podobných čisto formálnych trikov. Jej cieľom by bolo oslobodiť ATM od závislosti na klasickej teórii množín v otázke formalizácie. Ešte zaujímavejšia je otázka alternatívnej teológie, ktorá by priniesla alternatívny spôsob absolutizácie nekonečna, nezávislý od scholastickej teológie. To by umožnilo oslobodiť ATM závislosti na klasickej teórii množín v otázke aktualizácie nekonečna. Ďalším krokom by bolo napojiť takto získanú teóriu priamo na pojem prirodzeného nekonečna. Ak by sa toto všetko spravilo, bolo by oprávnené tvrdenie, že ATM kliesni cestu prirodzenému nekonečnu. Obávam sa však, že zatiaľ je toto tvrdenie iba ďalšou z radu sebailúzií, ktorými je ATM opradená.

Isté východiská pre uvažovanú "Naivnú ATM" možno čerpať z Bolzanovej teórie. Ďalší krok už bude podstatne ťažší a bude si vyžadovať detailnú historickú rekonštrukciu vývinu pojmu nekonečna.

3. Otázky teologické

33_1 Zrejme Všemohúci môže stvoriť človeka schopného zdvihnúť každý stvorený kameň. Rovnako môže stvoriť taký kameň, ktorý žiadna stvorená bytosť nezdvihne. Nemôže však oboje. Tento príklad nás upozorňuje na to, že nekompatibility oboru všetkého uskutočniteľného sa ani s Božou pomocou nezbavíme.

Predstavovať si, že Boh si nad niečím láme hlavu, potom na to celý natešený príde a rozhodne sa to uskutočniť, ale nejaká nekompatibilita mu to prekazí, je naivné. Príklad s kameňom je rovnako zavádzajúci. Boh samozrejme môže oboje, len my to nemôžeme pochopiť. Obávam sa, že "spontánna teológia" je veľmi tenký ľad. Predstavovať si Boha ako nejakého "experta", ktorý všetko vie, a potom ukázať, že aj tak mu vieme prejsť cez rozum a vieme nájsť niečo, čo predsa len nevie, a teda vlastne tými skutočnými "expertmi" sme vlastne my, to sa mi nezdá byť najšťastnejší prístup k otázkam teológie. Za slovom Boh sa skrýva okrem Neho aj mnoho bohov, bôžikov a modiel. Preto si myslím, že tu jediná schodná cesta je cesta historická. Zakaždým treba uviesť, ktorého boha má autor v tom ktorom prípade na mysli. Protestantského, katolíckeho, pravoslávneho, židovského či mohamedánskeho? A uviesť, z ktorého storočia, z ktorej školy (kláštornej, univerzitnej, rabínskej či madrasy), sekty, rádu, hnutia či smeru teologickej tradície.

46^{16} Teda rozumom môžeme postupne poznávať to, čo Boh obsiahne jediným pohľadom.

Odkiaľ vieme **ako** Boh vidí? A ako je možné, že to čo On **vidí**, my poznávame **rozumom**? Prečo sa neusilujeme rozumom poznávať vône, ktoré pociťuje Boh. On predsa cíti všetky vône sveta, ale čudným riadením osudu o čuchových vnemoch Boha nemáme ani potuchy, kým jeho zrakové vnemy poznávame rozumom.

46_9 Teda náš Boh vidí celý svet tak, ako my vidíme svet pred obzorom, čím obzor odďaľujeme až do absolútneho nekonečna a absolútnemu nekonečnu podsúvame atribúty nekonečna prirodzeného.

Prečo Boh nevidí celý svet ako konečný? Pre Neho predsa neexistuje žiaden horizont.

100_6 Pokusy dokázať Božiu existenciu z čistého rozumu tak vlastne usilujú o elimináciu potreby oprieť sa o Zjavenie v tejto základnej a najdôležitejšej teologickej otázke ... Teda pravé meno ich skrytého motívu je malovernosť.

Toto je veľmi silné tvrdenie. Uvažujme Anselma z Canterbury, autora jedného z klasických dôkazov. Anselm žil ešte pred scholastikou. O jeho viere, podľa dochovaných diel i správ, nemôžu byť pochybnosti. Zmyslom jeho dôkazu bolo zmieriť rozum s vierou, t.j. ukázať, že rozum nás privedie k tomu istému, k čomu nás priviedla viera. Preto netreba rozum zatracovať, ako to robila ranná patristika (keď postavila symbolicky proti sebe Rím a Jeruzalem t.j. rozum a cit) ale možno ho pokojne používať. Teda Anselmovým motívom je vziať rozum na milosť.

Mám pocit, že tu ide opäť o nepochopenie založené na spätnom pohľade. To **naša** doba je maloverná, preto keď čítame dôkazy Božej existencie, tak v **nás** vyvolávajú pocit, že v nich ide o elimináciu Zjavenia. Ale ľudia ako Anselm nepotrebovali podporovať svoju vieru v Zjavenie, lebo ich viera bola pevná. Až naša viera v Zjavenie je naštrbená krutosťami reformácie a protireformácie, ktoré obe v mene zjavenia masakrovali svojich blížnych. Až my, pod vedením osvietencov, chceme nahradiť svetlo Zjavenia svetlom Rozumu.

4. Problémy intuicionizmu

115, Z filozofického dedičstva, na ktoré intuicionizmus nadviazal treba spomenúť predovšetkým René Descarta a Blaise Pascala, ...

Pascalov pojem intuície silne pripomína náboženstvo. Preto by asi stálo zato preskúmať pôvod opozície rozum - intuícia. Neprekvapilo by ma, keby pravdy intuície vznikli sekularizáciou z právd viery. Potom by opozícia rozum intuícia bola opozíciou gréckeho racionalizmu a kresťanského myslenia, založeného na Zjavení. Začínať príbeh Descartom je príliš radikálny rez. Je to rozhodnutie jednoducho vynechať náboženské korene celého problému. Mnohí to tak robia, ale keď autor v ostatných kapitolách podrobne sleduje teologické korene pojmu nekonečno, prečo sa podobne nepozrieť aj na náboženské korene intuície? Myslím, že je načase rozdebatovať reformáciu ako zásadný epistemologický a ontologický zlom v európskej kultúre. Totiž práve reformácia mení spôsob vzťahovania sa k Bohu, zakladá ho na individuálnom cite. Je možné, že práve tento pre každého jedinca privilegovaný, individuálny prístup k Pravde je vzorom intuície.

125[5] Svet intuicionistickej matematiky je teda v stave neustáleho vznikania.

Rovnako opodstatnené sa zdá tvrdenie, že svet intuicionistickej matematiky je v stave neustáleho zanikania. Čo sa stane, keď nejakú konštrukciu zabudnem? A čo keď sa pomätiem, či zomriem? Odkiaľ viem, že zajtra mi intuícia odkryje tie isté čísla ako dnes? Preto by intuicionisti mali platiť strážcu kontinuity univerza, ktorý by Brouwerovi vždy ráno, keď sa zobudí, povedal základné čísla, konštrukcie a vety z predošlého dňa, aby bolo jasné, že pokračuje v tom istom univerze. Keby náhodou tento strážca zaspal, mohli by všetko začínať odznova. Ako sa intuicionista môže brániť budhistickej teórii, že existujú len izolované okamihy, všetko iné je ilúzia. Čo ak sa základné intuície menia s časom? Ako môžu intuicionisti zaručiť kompatibilitu intuícií v čase, ak neuznávajú jazyk? Zaujímalo by ma tiež, prečo intuicionisti zavrhli geometrický názor. Niekedy mám pocit, že intuicionizmus stavia na intuíciách slepca. Zdá sa, že fenomenológia predstavuje geometrický protipól intuicionizmu. Veď aj Husserl hovorí o kríze, a chce ju riešiť tiež radikálnym návratom k fundamentálnej báze. Jediný rozdiel je v tom, že touto bázou nie je aritmetický, ale geometrický názor.

130$_{14}$ Brouwer a po ňom Weyl a Heyting v podstate ľubovoľným spôsobom vypichli v matematickom myslení niektoré dôležité momenty ...

Toto je pomerne zásadná kritika. Naznačuje, že je možné vypracovať akýsi **metodický** intuicionizmus, v ktorom by sa systematickým spôsobom doplnili momenty, ktoré intuicionisti vynechali. Čím treba doplniť intuicionizmus, aby poskytoval použiteľnejší základ pre aplikácie? Geometrickou intuíciou? Algebraickou symbolickou intuíciou? Intuíciou limitného prechodu?

131^{1} ... prečo má práve matematika tak tvrdošijne trvať na bezprostrednej intuitívnej názornosti všetkých svojich pojmov v miere, v akej to nečiní napríklad ani fyzika ...

Odpoveď je jednoduchá. Fyziku pred "rakovinovým bujnením" zmysluprázdnych teórií uchráni nutnosť predpovedať čosi experimentálne testovateľné. Matematika takýto arbiter zmysluplnosti nemá, preto si ho musia matematici voliť sami. Dlho bol takýmto arbitrom konsenzus matematického spoločenstva opierajúci sa o "vkus veľkých matematikov". Došlo však ku generačnej vzbure. Rôznym väčším i menším matematikom sa nechcelo čakať na odobrenie autoritami. Radšej matematiku zideologizovali, premenili na bojisko rôznych izmov. Preto už nie je možné ponechať voľbu na konsenzus. Demagógovia (v starom gréckom význame slova: často samozvaní vodcovia dému), ako Peano, Russell či Brouwer, svojou propagandou rozložili prirodzené mechanizmy tvorby konsenzu. Mlčiaca väčšina matematikov si z tohto hurhaja nič nerobila a pestovala si svoju klasickú matematiku aj naďalej. Postupne, ako sa jednotlivé izmy zvnútra rozložili, stále jasnejšie vidno, že mali pravdu.

131$_{5}$ ... odňatie logiky mysleniu a jej prisúdeniu jedine jazyku [sa javí] *doslova nezmyselné.*

Otázka vzťahu myslenia a jazyka nie je jednoduchá. Nie som si istý, či vôbec myslím. Nie je jasné, či myslenie je naozaj činnosť, a či ju vykonávam naozaj ja, teda stručne, či naozaj myslím. Neviem, čím sa, ak vôbec, myslí. Čo je "myslidlo"? Kráčadlom sú nohy, písadlom ruky, hovoridlom pery a hlasivky. Ale nástroj myslenia je akosi záhadne neprístupný. Preto neviem jasne rozhodnúť, či mi patrí, tak ako viem, že mi patrí noha, ruka či pery. Ďalšia zvláštna vec je, že na priebeh myslenia nemám vplyv. Chôdzu, písanie či hovorenie môžem podľa ľubovôle zrýchliť (samozrejme po fyziologické limity), či spomaliť. Myslenie však nie. Nemôžem sa rozhodnúť, že teraz budem rýchlejšie myslieť. Ľudia si väčšinou pletú myslenie s vnútornou rečou. Tá je pre myslenie dôležitá, ale ona je len prostredníkom, ktorý myšlienky sprostredkúva. Vnútorná reč ešte nie je myslenie. Keď mi je niečo nejasné, vo vnútornej reči si hovorím rôzne možnosti, alternatívy, ..., ale často to tým aj skončí. Myšlienka proste nepríde, nech sa akokoľvek namáham. Inokedy sa myšlienka vynorí bez toho, že by som sa namáhal, bez toho, že by som sa prostriedkami vnútornej reči usiloval pomôcť jej na svet. Preto s istotou viem len to, že myšlienky ku mne niekedy prichádzajú, navštevujú ma. Ale či sú to moje myšlienky, či mi patria, alebo som iba ich prostredníkom, to neviem. Neviem, to znamená, že v tom nemám jasno. Preto sú mi všetci, čo vedia, ako to je s myslením, podozriví. A zdá sa mi, že intuicionisti si túto záhadnosť myslenia jasne uvedomili. Preto odňatie logiky mysleniu, ale tomuto radikálne pochopenému mysleniu, nie je podľa mňa nezmyselné, ale práve naopak, hlboké.

13[1] Ak sa teraz vrátime k intuicionistickej kritike klasickej logiky a pripomenieme si obsah pojmu prirodzené nekonečno v jeho súvislosti s obzorom, tak tvrdenie, že ľudstvo má v bežnom živote do činenia len s konečnými zoskupeniami objektov, musíme jednoznačne odmietnuť.

Toto je zvláštny spôsob kritiky. Najprv P. Zlatoš zmení interpretáciu pojmu nekonečno (aktuálne nekonečno nahradí prirodzeným), a potom z hľadiska tejto zmenenej interpretácie kritizuje intuicionistov. Keď intuicionisti hovoria o konečných objektoch, myslia konečné v opozícii voči aktuálnemu nekonečnu. A s tým, že v skúsenosti máme do činenia len so súbormi, ktoré nie sú aktuálne nekonečné (intuicionisti takéto súbory nazývajú konečnými) snáď P. Zlatoš súhlasí. Mne sa pojem prirodzeného nekonečna nezdá vôbec prirodzený. Je to ako s existujúcim hranatým kruhom. Tým že sa niečo nazve prirodzeným, nestane sa to o nič viac prirodzeným, než existujúci hranatý kruh existujúcim. Prirodzené nekonečno je prirodzené len v rámci pomerne komplikovanej techniky fenomenologickej rekonštrukcie, ktorá nás naučí pracovať s horizontom, a pomerne silného aparátu modernej logiky, ktorý ukáže, že tento pojem nie je, ako si dlho ľudia mysleli, kontradiktorický. Teda pojem prirodzeného nekonečna je prirodzený iba v značne neprirodzenom rámci. Preto by bolo možno vhodnejšie vymyslieť nejaký neutrálny technický termín, ktorý by sa používal namiesto termínu prirodzené nekonečno.

5. Rôzne

16[6] Náš vstup do ideálneho matematického sveta tak vedie cez bránu porozumenia existencii, čiže bytiu ideálnych matematických objektov.

Väčšina matematikov má vstup do tohto sveta, ale otázku existencie si nikdy nekládla a má o zmysluplnosti tejto otázky značné pochybnosti. Ono je to podobné, ako keby som povedal, že vstup do **reálneho** sveta vedie cez bránu porozumenia existencie **reálnych** objektov. Osobne si myslím, že otázke existencie reálnych objektov naozaj nikto nerozumie. To nám však nebráni aby sme boli v reálnom svete úplne ponorený. Preto sa domnievam, že matematici veselo narábajú so svojimi ideálnymi objektmi bez toho, že by sa usilovali otázke ich bytia porozumieť.

31[5] Napríklad perpetuum mobile nie je uskutočniteľné. Jeho uskutočneniu bránia fyzikálne vlastnosti reálneho sveta. Na druhej strane pokiaľ pojmy, v ktorých sme perpetuum mobile v myslení uchopili, nevsadíme dodatočne do súvislosti fyzikálnych zákonov, zostáva tento objekt ešte stále bezosporný.

Pojem perpetua mobile nevsadeného do fyzikálnych súvislostí nie je na tom o nič lepšie, než pojem okrúhleho štvorca, ktorý nevsadíme do súvislostí geometrických. Obávam sa, že pojmom je pomerne ľahostajné kedy a kam ich vsádzame. Pojem perpetua mobile je sporný či nesporný rovnako ako pojem okrúhleho štvorca, len na nájdenie príslušného sporu potrebujeme vedieť zákony termodynamiky. Nikdy som nerozumel tomuto pohľadu na vec mať nejaký fyzikálny pojem, ale bez fyziky. Akési "perpetuum mobile" v logickom zmysle slova. Čo to je? Kýva sa kyvadlo v logickom zmysle slova pomalšie či rýchlejšie, než kyvadlo vsadené do fyzikálnych súvislostí? Iná vec je, že naša znalosť fyzikálnych súvislostí je neúplná. Ale naša znalosť akýchkoľvek súvislostí je neúplná.

A potom, čo to znamená, že nejaký **objekt je bezosporný**? Bezosporná môže byť podľa mňa iba jeho deskripcia, ale objekt sám? Ako môže byť stolička sporná? Pritom každá deskripcia sa deje v určitom jazyku. A jazyk, v ktorom je zadaná deskripcia perpetua mobile jednoducho je jazyk fyziky. Preto nie je možné mať perpetuum mobile bez fyzikálnych súvislostí. To je ako mať okrúhly štvorec bez geometrických súvislostí. Je možné predstaviť si planétu slepých bytostí, ktoré sa z magnetofónových pások učia geometriu, bez toho, že by kedykoľvek v živote niečo videli alebo si len predstavili. Je možné, že niekto z nich by začal zrazu rozprávať o okrúhlom štvorci. Vzhľadom na svoju slepotu by však mal slovné spojenie okrúhly štvorec bez geometrických súvislostí. Ale boli by to iba prázdne slová. A podobne si myslím, že perpetuum mobile bez fyzikálnych súvislostí nie je pojem, ale tiež len prázdne slovné spojenie.

39[1] ... keď sa vnútorná jednota matematiky začala už dávno prejavovať a potreba zjednotenia matematiky, t.j. potreba dať tejto prejavenej jednote inštitucionalizovanú podobu, naplno pociťovať.

Vnútorná jednota matematiky je hlboký filozofický problém. Je to síce jedna z ústredných ideí teórie množín, ale myslím si, že by stálo zato zamyslieť sa nad ňou aj v širších súvislostiach.

1. Čo zakladá jednotu matematiky? Je to nejaká **teória** - v antike Euklidova geometria, dnes Cantorova teória množín? Je už dnešná jednota definitívna, alebo sa rozpadne podobne, ako sa rozpadla antická jednota založená na Euklidovi? Alebo zakladá túto jednotu skôr **jazyk**?

2. Má každá doba svoju jednotu, alebo je jednota čosi hlbšie? Existovala jednota matematiky 17. storočia, odlišná od jednoty matematiky v storočí 18. a 19.? Alebo tu existovala jedna základná jednota Euklidovská, ktorá sa od 16. storočia pod tlakom algebry a analytickej geometrie postupne rozpadala, potom nastúpilo 18. a 19. storočie bez vnútornej jednoty, a nakoniec teória množín prináša opäť do matematiky vytúženú jednotu?

3. Čo zapríčinilo rozpad jednoty matematiky? Kedy nastal a aké procesy ho tvorili? Bola to súčasť širšieho spoločenského vývinu, alebo bol proces rozpadu jednoty matematiky vyvolaný skôr vnútromatematickými motívmi?

Jeden možný scenár je, že keď sa vynorila algebra, analytická geometria a neskôr diferenciálny a integrálny počet, matematici cítili, že opúšťajú ideály euklidovskej presnosti, ale verili, že neskôr sa podarí jednotu obnoviť. Postupne sa však nová matematika stále viac vzďaľovala od ideálov geometrie, a sama o sebe bola natoľko zaujímavá, že jej prevedenie na euklidovský kánon prestalo matematikov zaujímať. Keď sa vynorili neeuklidovské geometrie, euklidovská geometria definitívne stratila svoje výsadné postavenie. Stále viac matematikov myslelo na aritmetiku, ako možný základ stratenej jednoty. Projekt aritmetizácie matematiky nakoniec vyústil do zrodu teórie množín. Takto by boli dejiny novovekej matematiky prechodom od euklidovskej ku cantorovskej jednote.

Druhá možnosť je, že jednota matematiky sa netýka ani tak dominujúcej teórie (lebo tá naozaj po celé 18. a 19. storočie chýbala), ale skôr štýlu či spôsobu robenia matematiky. Lebo matematika 18. storočia (Euler, Lagrange, Lambert) mala jednotu vo formálne analytickom prístupe. Jadro matematiky spočívalo v riešení problémov pomocou analytických metód. V 19. storočí (Gauss, Riemann, Galois) boli formálne techniky predošlého storočia nahradené snahou o prehĺbenie konceptuálneho porozumenia. Matematici pochopili, že môžu existovať neriešiteľné príklady či nedokázateľné vety, že vedľa euklidovskej geometrie je možná neeuklidovská, vedľa reálnych čísel čísla komplexné, vedľa trojrozmerného priestoru priestor štvorrozmerný. Otvorenie sa týchto nových svetov priviedlo matematiku k potrebe nájsť jednotu, ktorá by umožnila spojiť euklidovskú geometriu s neeuklidovskou, reálne čísla s číslami komplexnými. A túto novú jednotu zakladá teória množín.
Otázka znie, ktorý z týchto scenárov je správny. Alebo sú správne oba, a v prípade teórie množín došlo ku konvergencii opísaných procesov tvorby metodickej a ontologickej jednoty.

6. Záver

Ako si čitateľ určite všimol, vo svojej recenzii som často opustil samotný text recenzovanej knihy a písal som o problémoch, ktoré kniha navodzuje. Autor ma podnietil zamyslieť sa nad otázkami, o ktorých som si myslel, že ich mám už dávno zodpovedané (platonizmus). Pri čítaní knihy som si uvedomil mnohé súvislosti, o ktorých som si nikdy nemyslel, že sú problematické (teologické pozadie nekonečna). Recenzia mi umožnila artikulovať názory, ktoré už dlhšiu dobu nosím sebe, ale nevedel som, ako ich dať na papier (názory na ATM; otázka lingvistického obratu vo filozofii matematiky).

To svedčí o inšpiratívnosti a hĺbke textu P. Zlatoša. Jeho čítanie mi prinieslo mnohé prekvapenia, otázky a problémy, a verím, že ich prinesie každému, kto je ochotný hľadať, každému, kto sa s dôverou pustí do rozmýšľania nad filozofiou matematiky. Lebo aj keď "ani matematika si nemôže byť istá sama sebou", neistota, ktorú prinášajú jej poznatky opísané v knihe, nie je ohrozujúcou neistotou zániku, ale skôr vyzývajúcou neistotou rastu. Istotu starých odpovedí nahradila neistota nových otázok. Ale **kde sa končí istota, začína priestor pre dôveru**. Dôveru v spoločné hľadanie odpovedí. Verím, že kniha P. Zlatoša je výzvou práve k takémuto hľadaniu.

Ladislav Kvasz