

DIALÓGY

PIAGETOVO CHÁPANIE LOGICKO-MATEMATICKÝCH ENTÍT

Pavel CMOREJ - Ján RYBÁR

CMOREJ, P.: Pán kolega, vo svojom článku [8] o epistemológii, ktorý ste ponúkli čitateľom ORGANONu F, ste sa dotkli viacerých problémov, ktoré pokladám za veľmi zaujímavé. Na ploche jednej štúdie, zameranej na skúmanie možnosti budovania vedeckej epistemológie, ste ich však nemohli podrobnejšie rozvinúť, čo je celkom pochopiteľné. Ako jeden z čitateľov ORGANONu F by som však uvítal, keby ste sa mohli k niektorým problémom vrátiť a podrobnejšie ich rozobrať. Nemohli by ste to urobiť v dialógu so mnou, v ktorom by som vám položil niekoľko všetečných otázok? Tým by ste mi pomohli odstrániť isté nejasnosti, ktoré som mal pri čítaní vašej štúdie.

RYBÁR, J.: Z našich predchádzajúcich rozhovorov viem, že vaša východisková pozícia, z ktorej pristupujete k daným problémom, je iná, preto vašu ponuku na dialóg môžem len privítať. Beriem to aj ako príležitosť položiť svoje otázky.

CMOREJ, P.: V spomenutom článku charakterizujete Piageta ako mysliteľa, ktorý mal ambíciu prekonať tradičnú dilemu vynárajúcu sa, ako píšete, "v najrozličnejších oblastiach vedeckého poznania": buď empiricizmus alebo špekulatívny racionalizmus. Táto dilema sa v istej podobe zjavuje aj v oblasti filozofie matematiky a logiky, kde úzko súvisí s problémom povahy matematických a logických entít, ktorý ma v danom kontexte zaujíma azda najviac. Podľa toho, čo píšete, Piaget na jednej strane "odmieta empiristickú interpretáciu povahy logicko-matematických štruktúr", ale zároveň je "nekompromisný kritik platonizmu". Z Piagetovej kritiky platonizmu súdím, že jeho chápanie logicko-matematických entít sa veľmi nelíši od istej odrody psychologizmu. Nie som si však celkom istý. Azda by sme mohli začať otázkou, či Piagetovo chápanie povahy týchto entít je psychologické. Presnejšie, pokladal tieto entity za mentálne fenomény? Ak áno, aké vlastnosti im pripisoval?

RYBÁR, J.: Na vaše klasifikovanie Piagetovho chápania logicko-matematických entít a pochybnosti a otázky s tým súvisiace je možno odpovedať dlhšie (možno hovoriť o tom, že jeho koncepcia je rehabilitáciou psychológie, ale nie je psychologizmom, v istom zmysle ide o pokus prekonať dilemu psychologizmus-logicizmus). Je možné tiež odpovedať krátko, len na najkonkrétnejšiu otázku, či Piaget považuje tieto entity za mentálne fenomény? Zatiaľ dávam prednosť druhej možnosti.

Ak máte na mysli, pod mentálnymi fenoménmi materiál získaný bezprostredným vnímaním, tak odpoveď znie: nie. Pretože Piagetova koncepcia pochopiteľne primárne nevychádza len zo skúmania percepcie ako to bolo u klasikov novovekého empirizmu (anticipátorov psychológie ako vedeckej disciplíny). O čo sa teda Piaget opiera pri svojej interpretácii logicko-matematických objektov? Pre Piageta je charakteristické činnostné chápanie logicko-matematického poznania. Explicite vyjadruje svoj prístup aj takto: "V ktoromkoľvek výraze, napr.: $x^2 + z = z - u$, každý termín nakoniec označuje činnosť. Termín (=) vyjadruje možnosť nahradzovať, znak (+) zjednocovanie, znak (-) odlučovanie, štvorec (x^2) x-násobné opakovanie x a každá z hodnôt u, x, y, z, 2 určitý počet opakovania jednotky" ([4], 22).

Teda, podľa Piageta, logicko-matematické operácie sú v podstate reálne činnosti, či už ide o činnosti vykonávané dieťaťom na počítadle alebo či ide, na úrovni dospelého o manipulácie vykonávané so symbolmi v súlade so špecifickými pravidlami kalkulu.

CMOREJ, P.: Neviem, či som vám dobre porozumel, ale nechápem, ako môžete Piagetovu koncepciu označiť za nepsihologickú a zároveň konštatovať, aj keď s istým zaváhaním, že logicko-matematické entity pokladal za mentálne fenomény. Ved' ak tieto entity sú podľa Piageta mentálne fenomény, tak jeho koncepcia je prinajmenej istým druhom psychologizmu. Nie sú azda mentálne fenomény psychické entity?! Skutočnosť, že Piaget sa snažil prekonať dilemu psychologizmus - logicizmus, nemôže na tom nič zmeniť. No keďže mi nejde o zaškatulkovanie Piagetovej koncepcie (to som svojou otázkou rozhodne nesledoval), môžeme problém Piagetovho psychologizmu a chápania mentálnych fenoménov nechať predbežne bokom a sústrediť sa na jeho pokus spomenutú dilemu prekonať, čo v danom kontexte znamená zamerať pozornosť na činnostné chápanie matematických entít. Súhlasíte, alebo navrhujete najprv si vyjasniť, čo budeme rozumieť pod výrazom "mentálne fenomény"?

RYBÁR, J.: Neodmietam ani ujasňovanie, čo sú mentálne fenomény (aj tak je možné dostať sa k podstate Piagetovej koncepcie), ani ujasnenie, čo chápeme pod termínmi psychologizmus a logicizmus (čo je treba urobiť, ak sa chceme vyhnúť prípadným nedorozumeniam). Odpovede na tieto otázky súvisia s odpoveďou na fundamentálnu epistemologickú otázku - aký je vzťah medzi faktúálnym (empirickým) a normatívnym (logicko-matematickým poznaním)?

Aby som však mohol pokračovať ďalej musím položiť svoju prvú otázku. Skúmanie genézy logicko-matematických štruktúr - je to pre vás zmysluplný problém?

CMOREJ, P.: Nepochybne, ale to nie je jeden problém, ale celý strapec problémov a nie je mi jasné, ktoré z jeho hroziakov máte na mysli. Po prvé, nie som si istý, či nejde skôr o genézu osvojovania matematických štruktúr ako o genézu ich utvárania. Po druhé, treba odlišiť ich genézu v ontogenéze jednotlivca od genézy pri vzniku a rozvíjaní príslušnej disciplíny, teda od ich "fylogénzy" (žiadalo by sa však

bližšie určiť, čo to konkrétne je). Navyše vaša otázka sa opiera o predpoklad, že tieto štruktúry sa vyvíjajú, menia, čo sa môže ukázať ako veľmi diskutabilné. Nevyvíja sa skôr ich osvojovanie? Do ktorého z týchto problémov sa máme pustiť, aby sme sa čo najskôr dostali k Piagetovmu chápaniu logicko-matematických entít? Cestu musíte zvoliť vy. Vaša otázka o vzťahu medzi empirickým a apriórnym poznaním je príliš všeobecná (a skrýva v sebe problém, či logicko-matematické poznanie je naozaj normatívne, ktorému by sme sa mali - aspoň zatiaľ - vyhnúť). Obávam sa, že v tomto štádiu nášho dialógu by nás mohla zviest' na scestie, preto navrhujem začať špeciálnejším problémom.

RYBÁR, J.: Uznávam, že zatiaľ je v našom dialógu viac otázok než odpovedí (čo však na začiatku nepovažujem za chybu), no všetky otázky smerujú a súvisia s nastolenou témou (Piagetove chápanie logicko-matematického poznania).

Odpoveď na otázku - prečo Piagetovu koncepciu nemožno považovať za psychologickú nie je zložitá. Psychologizmus, stručne povedané, je doktrína, podľa ktorej zákony logiky a matematiky majú empirický charakter. (Typickým predstaviteľom tohto variantu radikálneho empirizmu bol J.S. Mill.)

Podľa Piageta prednosťou tejto koncepcie je, že akceptuje problém genézy (resp. vzniku) logicko-matematického poznania, ale jej vážnym nedostatkom je, že ignoruje, prehliada špecifické charakteristiky logicko-matematického poznania: jeho autonómii od bezprostrednej empirickej reality a jeho nevyhnutný charakter.

CMOREJ, P.: Nemám nič proti kladeniu otázok, pretože nám môžu pomôcť pri mapovaní problematiky, v rámci ktorej sa budeme pohybovať, ale skôr či neskôr si musíme niektorú z nich vybrať a na ňu sústrediť našu pozornosť. Tým nechcem povedať, že si budeme môcť dovoliť luxus koncentrovať sa na jediný problém, určite budeme nútení hľadať odpovede na viacej otázok. Jednou z nich je otázka, čo je psychologizmus v logike či matematike. S prekvapením totiž zisťujem, že naše chápania termínu "psychologizmus" sa líšia.

Pod psychologizmom rozumieme názor, ktorý by som radšej nazval empiricizmom a výraz "psychologizmus" ponechal koncepcii, podľa ktorej logicko-matematické objekty sú psychické (mentálne) entity. Táto charakteristika je samozrejme zjednodušená, všeličo v nej chýba, ale je obťažovaná dôsledkami, s ktorými v našej diskusii bohato vystačíme. K chápaniu mentálnych entít zatiaľ len toľko, že v danom kontexte ešte nezáleží na tom, či sú to psychické dispozície, aktuálne prežívané zážitky, fenomény získané bezprostredným vnímaním, alebo duševné akty či činnosti. Uvedomujem si úzku spätosť empiricizmu (presnejšie povedané, jednej z jeho viacerých odrôd) a psychologizmu, no napriek tomu by som ich nestotožňoval, už preto nie, že aj empirické zákony môžeme interpretovať tak psychologicky ako aj nepsychologicky, pričom ich empirický charakter môže spochybňovať iba človek, ktorý nerozumie výrazu "empirický zákon". Na druhej strane si viem predstaviť nepsychologické chápanie matematických entít a tvrdení, ktoré im priznáva empirický pôvod a zdôvodnenie. Po tomto predbežnom vyjasnení chápania

výrazu "psychologizmus" sa môžeme vrátiť k otázke, či Piaget bol stúpencom psychologizmu v naznačenom zmysle.

RYBÁR, J.: Na ceste k tomu, aby som mohol súhlasiť s tým, že Piaget chápe logicko-matematické entity ako mentálne fenomény sa mi objavili dve prekážky (jednu sa mi podarilo odstrániť, druhú nie):

1. Jednoduché logicko-matematické operácie sa manifestujú už v činnosti dieťaťa. Malé dieťa napr. rieši niektoré úlohy jednojednoznačným priradením. (Piaget pri tejto príležitosti nezabudne podotknúť, že táto operácia je fundamentálnou operáciou Cantorovej teórie nekonečných množín). Avšak dieťa nemá túto operáciu tematizovanú. Ide o neuvedomené používanie tejto operácie.¹

Toto nie je kontrapríklad k vášmu chápaniu mentálnych entít, ide mi len o zdôraznenie, že mentálne fenomény, aj v tomto prípade, môžu mať aj neuvedomený charakter.

2. Problematickejšou okolnosťou je, že Piaget vychádza z tesného preporenia organických a logicko-matematických štruktúr. Zdôrazňuje, že logicko-matematické operácie majú korene už v nervovej a biologickej organizácii subjektu (v biologických schémach činnosti organizmu). Pre potvrdenie toho, okrem iného, sa odvoláva aj na amerických neurofyziológov Mc Cullocha a Pittsa, že pravidlá vedenia nervového vzruchu v synapsiach sú izomorfné štruktúram výrokovkej logiky (dajú sa vyjadriť takými logickým spojkami, ako sú \bullet , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow , $|$).

CMOREJ, P.: Nevie, ako by termín "mentálne" vymedzil psychológ, ale v našej diskusii by sme mentálne nemali zužovať na vedomé. Strácajú azda rozmanité duševné schopnosti a dispozície mentálny charakter, akonáhle si ich prestaneme uvedomovať? Považujete za mentálne iba spomienky, ktoré si práve uvedomujeme, alebo aj tie, ktoré sú uložené v našej pamäti alebo hlboko v našom podvedomí, z ktorého ich môže vyvolať iba psychoanalytik?

Pomôžme si príkladom. Každý človek, ktorý absolvoval základnú školu, disponuje istým chápaním čísla 100 (tým nechcem povedať, že vie o ňom všetko, to zrejme nevie ani jeden matematik), mohli by sme to povedať aj tak, že disponuje (psychickým) pojmom čísla 100. Ale číslo 100 si pomyslí iba niekedy, na displeji jeho vedomia sa zjaví len vtedy, keď sa mu náhodne vkradne do úvah alebo ho na niečo potrebuje, napr. na nejaké výpočty. Má tento pojem mentálny charakter iba vtedy, keď si to číslo pomyslíme? Nemá ho aj dispozícia operovať ním, ktorá sa momentálne nerealizuje? Mohli by sme sa síce dohodnúť na takom chápaní výrazu "mentálny", z ktorého by vyplývalo, že mentálne fenomény sú vedomé, ale tým by sme nič nezískali, nehovoriac o tom, že také chápanie by nebolo účelné. Na vedomé duševné fenomény máme predsa výraz "vedomé".

V uvedenom príklade ide o fenomén, ktorý sme si už aspoň raz uvedomili, ktorý sa už zjavil vo sfére vedomia a teraz je uložený v našej pamäti alebo podvedomí. Vy ste však spomenuli aj operácie, ktoré dieťa ešte nikdy netematizovalo, a predsa ich vie pri riešení istých úloh vhodne uplatniť. Predpokladám, že tematizáciu

pokladáte za duševnú činnosť, pri ktorej si príslušnú operáciu uvedomíme. Rád by som dodal, že s netematizovanými operáciami v naznačenom zmysle sa možno stretnúť aj u dospelých. Isté logické operácie uplatňovali matematici celé stáročia bez toho, že by si ich boli uvedomovali a - ako hovoríte - tematizovali. Väčšinu týchto operácií však tematizovala až moderná logika v uplynulých 150-tich rokoch a niektoré možno bude tematizovať až AI alebo iná disciplína. Máme im však preto uprieť mentálny charakter? Ved' tieto operácie boli neodmysliteľnou zložkou duševných úkonov, v ktorých vznikali výsledky ich *duševnej* aktivity. Je ľad ľadovca pod hladinou iný ako nad ňou?

Na druhej strane si nemyslím, že zúžením sféry mentálneho na vedomé duševné javy a stotožnením logicko-matematických operácií a iných entít z tejto oblasti s istými neuro-fyziologickými procesmi a štruktúrami vyviazneme z ťažkostí, s ktorými zápasí psychologizmus. Preto nie je dôležité, či Piagetovu koncepciu nazveme psychologizmom alebo neurofyziologizmom, v tejto diskusii mi ide o to, či Piaget pokladá logicko-matematické entity za fenomény, totožné s procesmi, ktoré sa odohrávajú v našej psychike alebo - ak chcete - v jej neurofyziologickom podklade, prípadne za fenomény totožné s entitami z tejto sféry, bez ohľadu na to, či si ich uvedomujeme alebo nie. Na toto by sme sa mali sústrediť a otázku ocajchovania Piageta za psychologa odsunúť stranou ako vedľajšiu. Čo vy na to?

Skutočnosť, že dieťa niektoré operácie - ako hovoríte - netematizuje, nesvedčí ešte o tom, že tieto operácie strácajú mentálny charakter. Schopnosť vykonávať ich je predsa psychická entita, závislá od psychiky dieťaťa. Dispozície si nemusíme uvedomovať, to ich však nezabavuje psychického charakteru. Preto by som psychické či mentálne nezužoval na vedomé. Otázne však je, či schopnosť vykonať istú operáciu, napr. operáciu sčítania, je totožná s matematickou funkciou, ktorá jej zodpovedá, v našom príklade s funkciou, ktorá ľubovoľnej dvojici reálnych čísel priradzuje ich súčet. Som presvedčený, že to sú dve celkom odlišné entity, rozdiely medzi nimi sú obrovské.

Skutočnosť, že niektoré matematické funkcie sa manifestujú v činnosti dieťaťa, resp. v jeho schopnosti vykonávať operácie, ktoré im istým spôsobom zodpovedajú, ešte nesvedčí o tom, že s týmito schopnosťami splyvajú. Lahko možno ukázať, že to tak nie je, ale o tom hádam neskôr.

Možno diskutovať o tom, či nervová, resp. neurofyziologická organizácia subjektu má mentálny charakter, či neurofyziologické procesy sú totožné s mentálnymi, ale v našej diskusii to považujem za vedľajšie. To je jedna z mnohých tvárí známeho problému mysle a tela (mind-body problem) a totožnosti duševného s neurofyziologickým, ktorému sa môžeme v našom dialógu vyhnúť, pretože stotožnenie matematických entít s neurofyziologickými procesmi vedie k tým istým ťažkostiam ako ich stotožnenie s mentálnymi entitami.

RYBÁR, J.: Nevedomé aktivity som spomenul iba preto, že som chcel zdôrazniť, a to sa už opakujem, že logicko-matematické operácie môžu mať aj takýto charakter. Predmetom Piagetovho záujmu je práve skúmanie prechodu od používania

alebo implicitnej aplikácie určitých štruktúr alebo operácií k ich vedomému použitiu a konceptualizácii (tento proces sa obvykle nazýva tematizácia). V tomto smere sú vaše úvahy veľmi podobné. Piaget uvádza aj množstvo ilustrácií. Napríklad Aristoteles netematizoval logiku relácií, hoci ju používal práve tak, ako sylogistické štruktúry, rozpracovaním ktorých sa preslávil. Piaget veľmi veľa miesta venuje tematizácii pojmu transformácie v dejinách geometrie a algebry [6].

Piagetov záujem o skúmanie nevedomých aktivít je možno vidieť aj v širších súvislostiach. Piaget totiž patrí k druhej generácii tvorcov vedeckej psychológie. Ako je známe, pred ním už pôsobilo niekoľko "priekopníckych" škôl - Wundt (psychológia vedomia), Freud (psychológia nevedomia), Watson (psychológia správania), ak spomenieme aspoň tie najznámejšie. Piaget v svojej koncepcii využíva už všetky prednosti prvých zakladateľských škôl. Nejde o nejaký eklektický postup. Piagetova syntéza je realizovaná na základe skúmania aktivít subjektu (či už ide o aktivity vedomé alebo nevedomé, o manipuláciu s fyzickými objektami alebo o znútornenú myšlienkovú činnosť).

Hľadanie súvislosti medzi Freudom a Piagetom je možno na prvý pohľad prekvapujúce (to je aj pochopiteľné - Freudov literárne veľmi prístupný jazyk kontrastuje s vedecky ezoterickým jazykom Piagetovým). Napriek tomu isté pojmy (alebo teórie) v Piagetovej koncepcii boli nesporne inšpirované S. Freudom. Takou je napríklad teória egocentrizmu.²

Pokiaľ ide o hlavnú freudovskú kategóriu nevedomie, táto má veľmi dôležité miesto aj v oblasti kognitívnych funkcií, nemožno ju zúžiť len na emocionálny život. Podľa Piageta vedomie od nevedomia u Freuda rozdeľuje "imaginárna hranica s cenzorom, ktorým nie je nič iné než potlačenie jasne vidieť určité aspekty seba samého" ([2], 199). Podľa neho však neexistujú nijaké dve mentálne oblasti separované nejakou hranicou, ale len jedna a tá istá práca myslenia, z ktorej dokonca v najsvetlejších stavoch vnímame len veľmi malú časť a aj vtedy sme centrovani na dosiahnuté výsledky a nie na proces, mechanizmus myslenia ako taký. V týchto súvislostiach J. Piaget rád uvádza výrok A. Bineta: "Myslenie je nevedomou aktivitou ducha" ([2], 200).

Napriek všetkému, čo som tu uviedol, na vašu opakovanú otázku, či Piaget považuje logicko-matematické entity za mentálne fenomény, nemôžem zatiaľ jednoznačne odpovedať, že áno. Jednoznačne môžem iba povedať, že Piaget psychologicky (pomocou metód experimentálnej psychológie) skúma genézu logicko-matematických operácií. Toto jeho skúmanie je robené s epistemologickým zámerom a vyplývajú z neho epistemologické dôsledky.

Preto je tu otázka genézy (resp. vzniku) logicko-matematických štruktúr veľmi dôležitá a nie náhodou som sa pýtal na váš názor. Vo svojej odpovedi ste hneď odlišili genézu od osvojovania, resp. vidíte v tom skôr osvojovanie logicko-matematických štruktúr. Aký je potom status týchto štruktúr, sú už vopred dané?

CMOREJ, P.: Prv než zodpoviem vašu otázku, chcel by som navrhnúť, aby sme namiesto kostrbatého výrazu "logicko-matematické štruktúry" používali jed-

noduchší termín "matematické entity", pričom pod matematické zahrnieme aj logické entity (z ontologického hľadiska sa svojou povahou od matematických vôbec nelišia) a pod entity aj štruktúry. Nie všetky matematické entity sú totiž štruktúry v bežnom zmysle. Bol som v pokušení navrhnúť to už skôr, ale spočiatku som nevedel odhadnúť frekvenciu používania výrazu "logicko-matematické" a preto som to odložil na neurčito.

Nevyjadрили ste sa k môjmu chápaniu mentálneho, ale z vašej odpovede súdim, že ste ochotný akceptovať ho.

RYBÁR, J.: Najprv k terminologickým problémom. Systematické používanie adjektíva logicko-matematické, z mojej strany, nebolo náhodné. U Piageta je to štandardný termín a požíva ho nielen v súvislosti so štruktúrami, ale aj, keď hovorí o logicko-matematickej skúsenosti (resp. poznani) a o logicko-matematickej abstrakcii (v protiklade k empirickému poznaniu a empirickej abstrakcii).

Súvisí to s tým, že u Piageta je skúmanie genézy matematického poznania spojené so širším skúmaním genézy inteligencie (je to jej organickou súčasťou). Pritom u neho nejde o celkom bežné chápanie tohto termínu. Podľa neho logicko-matematické štruktúry sú predpokladom akéhokoľvek poznania. Už na najelementárnejších biologických úrovniach, skôr než vznikne nejaké poznanie, už je tu aktivita organizmu. Táto aktivita nemá celkom chaotický charakter, ale má určitú "logicko-matematickú" formu. O príklade týchto foriem na neurofyziologickej úrovni som sa už zmienil. V priebehu senzomotorického štádia, to je obdobie do sformovania symbolickej funkcie (reč, symbolická hra, obrazné predstavy ...), sa vytvára určitá praktická predstava priestoru a stáleho objektu na základe toho, čomu sa v geometrii hovorí "grupä premiestnení".³ Na neskorších úrovniach vývinu inteligencie budú podmienkou vzniku pojmov (číslo, objemu, dĺžky ...) rôzne kompenzačné vzťahy, ktoré tiež majú povahu logických operácií.

Pokiaľ ide o termín štruktúra, vzhľadom na vyššie naznačené súvislosti, používanie tohto termínu je dosť pochopiteľné. Niekedy však Piaget používa aj termín "les êtres mathematiques" (doslovne matematické súcna), a to spôsobom dosť blízkym tomu, akým vy navrhujete používať termín matematické entity. Ak sa vezmú do úvahy tieto okolnosti, potom mi nič nebráni používať termín matematické entity (i keď pri výklade Piagetovej koncepcie sa nedá celkom zaoberať bez pojmu štruktúra).

CMOREJ, P.: Ak termín "logicko-matematické entity (či štruktúry)" hrá v Piagetovom diele takú významnú úlohu, nebolo by na mieste vystrnadiť ho z nášho dialógu. Navrhujem používať obidva termíny, teda "logicko-matematické entity" i "matematické entity", a to približne v tom istom význame. Prvý z nich najmä vtedy, keby hrozilo nedorozumenie. Súhlasím, že bez pojmu štruktúra sa nezaobídeme - nemal som v úmysle "vytesniť" ho z našej diskusie - ale mali by sme pamätať na to, že nie všetky matematické entity sú štruktúrované, ako aj na to, že termín "štruktúra" sa v niektorých disciplínach používa v podstatne užšom význame (napr. v teórii modelov).

Na vašu otázku, či matematické entity sú vopred dané, sa podľa môjho názoru nedá odpovedať prostým "áno" alebo "nie". Také odpovede príliš zjednodušujú a zavádzajú. Pre ľudí, ktorí si matematiku len osvojujú, ale sami ju nerozvíjajú, sú tieto entity nepochybne "vopred dané". Taký človek sa musí s nimi oboznamovať, ako sa oboznamuje s neznámymi predmetmi, ľudmi alebo mestami. Spoznáva niečo, čo jestvuje nezávisle od neho a spravidla dávno pred tým, než sa s tým začal oboznamovať. Platí to nielen o matematických entitách, ale aj o významoch už jestvujúcich a istý čas používaných jazykových výrazov, o postavách z napísaných románov, o protagonistoch z jestvujúcich drám a pod.

Podstatne ťažšia sa mi zdá otázka, či tieto entity *objavuje* aj tvorivý matematik či logik, ktorý pritom neťaží z výsledkov iných autorov. Napríklad, čo je výstižnejšie: povedať, že G. Cantor svet množín objavil, alebo že ho v istom zmysle stvoril a ostatní matematici rozvíjajúci jeho systém už iba dokončujú to, čo on začal? Máme povedať, že N.I. Lobačevskij neeuclidovskú geometriu a svet jej entít objavil alebo skonštruoval? Ak ju skonštruoval, ako potom vysvetlíme fakt, že ten istý svet entít skonštruovali nezávisle od neho aj C. F. Gauss a J. Bolyai? Na druhej strane, ak matematické entity sú objekty, ktoré objavujeme, ako vysvetlíme fakt, že jestvuje toľko variantov teórie množín, toľko geometrií alebo logík, ktoré sa navzájom vylučujú? Môžeme povedať, že každá z nich opisuje iný svet entít alebo že iba jedna z nich je tá pravá a že iba svet jej entít objavujeme, kým tie ostatné si len vymýšľame? Obávam sa, že v našom dialógu nenájdeme odpovede na tieto otázky, ale to nám nemusí brániť v skúmaní Piagetovho chápania matematických entít. Ešte by som mal dodať, že v uvedenom podaní som naznačenú problematiku značne zjednodušil (ale v danom kontexte sa tomu nedá vyhnúť), a že spomenuté problémy nie sú pre mňa dostatočným dôvodom pre prijatie psychologizmu.

Myslím, že po odstránení niektorých terminologických diferencií medzi nami sa môžeme vrátiť ku skúmaniu Piagetovho chápania matematických entít.

RYBÁR, J.: Tradičnú formuláciu problému, či je matematická invencia invenciou v pravom zmysle slova, teda kreovaná v mysli subjektu alebo je objavom, t.j. stretom subjektu s realitou existujúcou pred jeho skúmaním, Piaget podobne ako vy, považuje za nerozhodnuteľnú. Podľa neho existuje však aj tretia možnosť.

Táto tretia možnosť sa zase opiera o jeho koncepciu štádiálneho formovania inteligencie v individuálnom vývine dieťaťa. Proces prechodu z jedného štádia do druhého prebiehajúci prostredníctvom reflektívnej abstrakcie, spočíva v rekonštruovaní predchádzajúceho poznania na vyššej úrovni, tým, že je integrované do širších rámcov. Napríklad spomínaný egocentrizmus na senzomotorickej úrovni, kde sa prejavuje v praktickom správaní dieťaťa, "objavuje" sa aj na vyššom štádiu vo forme egocentrickej reči.⁴ Nové matematické poznanie, tak vzniká na základe dvoch procesov, sčasti "objavom", pretože je odvodené z predchádzajúceho poznania a sčasti "invenciou", pretože vedie k originálnym výsledkom neobsiahnutým v predchádzajúcom poznaní.

Piaget postupuje tak, že keď uvažuje o objave, tak dochádza k záveru, že nikdy vlastne nejde o čistú invenciu. Napríklad, ak jednou z kľúčových intuícií Cantorovho chápania nekonečna bolo jednojednoznačné priradenie, tak potom, šlo o niečo viac než objav, pretože novo vypracované nekonečná prekračovali tie, z ktorých boli vyvedené ([2], 221). Piaget často v týchto súvislostiach parafrázuje L. Kroneckera, prirodzené čísla sú darom Božím, všetky ostatné sú dielom človeka a mohli by vyzeráť aj inak.

V súvislosti s otázkou genézy a povahy matematického poznania by som sa chcel explicitne vrátiť ešte k jednému problému. Vyššie ste spomínali, že si viete predstaviť empirickú interpretáciu matematických entít, bez toho, aby šlo o psychologizmus. Čo ste mali na mysli?

CMOREJ, P.: Pokúsím sa to objasniť na príklade. Pytagorovu vetu môžete pokladať za ideálnu entitu, za ideu, že štvorec nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu štvorcov nad jeho odvesnami. Túto ideu označme skratkou P. Sotva možno tvrdiť, že táto idea je totožná s vaším alebo mojím *presvedčením*, že P, teda s myšlienkou v psychologickom zmysle, lebo P je len jedna a presvedčenia, že P, sú aspoň dve (vaše a moje), navyše P tu bola aj vtedy, keď sme o nej nemali ani tušenia, ba i vtedy, keď sme ešte nežili. Toto chápanie P je jednoznačne antipsychologické. Napriek tomu možno zastávať názor, že k poznaniu P a k jej zdôvodneniu je nevyhnutná skúsenosť, názor, že sme ju získali na základe merania plôch štvorcov nad stranami jednotlivých pravouhlých trojuholníkov a že ju zdôvodňujeme meraním, teda empiricky, čiže musíme počítať aj s možnosťou, že jedného dňa ju naša skúsenosť vyvráti. Druhá vec je, do akej miery je podobná koncepcia korektná. Nepochybujem však o tom, že je možná a že sú alebo môžu existovať ľudia, ktorí ju vyznávajú.

Na druhej strane, empirické zákony, akým je napr. hociktorý z Newtonových pohybových zákonov, možno považovať za ideálne, nementálne entity, ktoré spoznáваме a potvrdzujeme empiricky (čo málokto spochybňuje). Ale to je už iný a podstatne menej diskutabilný prípad ako predchádzajúci. Ak empirické zákony stotožníme s našimi myšlienkami, budeme mať toľko zákonov zotrvačnosti, koľko je hláv, v ktorých sa nachádzajú.

RYBÁR, J.: Piaget na otázky, ktoré sú tu predmetom nášho záujmu, hľadá odpovede skúmaním elementárnych úrovní inteligencie (vzhľadom na to, že ide o vývinového psychológa je to pochopiteľné). Na základe výsledkov tohto skúmania popiera, ako som už niekoľkokrát naznačil, že by logicko-matematické štruktúry boli bezprostredne odvodené z fyzikálnych (t. j. empirických) štruktúr, pretože kontakt s empiriou je tu sprostredkovaný cez štruktúru aktivít organizmu.

Tieto štruktúry aktivít sú štruktúrami epistemického subjektu, to znamená, že sú spoločné pre všetky subjekty. Napríklad grupa premiestnení, ktorá sa vyskytuje v praktickom konaní u dieťaťa ešte pred dosiahnutím jedného roku. V tom zmysle sa Piaget zaoberá aktivitami, ktoré sú spoločné pre všetky subjekty, a ktoré vznikajú v interakcii poznávajúceho subjektu a prostredia. (V tom zmysle ako som o tom hovoril

v súvislosti s problémom invencia alebo objav.) To znamená, že Piaget nechápe logicko-matematické entity psychologicky (psychologicky vo vašom zmysle slova). Z toho tiež vyplýva, že logicko-matematické entity sú spojené aj so subjektom a pritom nestrácajú svoju základnú vlastnosť - nevyhnutný charakter.

V polemike s tým chápaním matematických entít, ktoré nazývate antipsychologickým, sa Piaget pýta: Pomocou akého mentálneho mechanizmu môžeme dosiahnuť takto existujúce entity? Podobnú otázku vám kladú aj V. Černík a J. Vicenik v diskusii o ideálnych pojmoch: "...akými metódami poznávame tieto ideálne pojmy, ktoré obývajú akýsi platónsky svet nezávislý entít a zároveň majú intersubjektívne skúmaniu prístupný charakter?" ([3])

Uspokojíme sa s Platonovým rozpomínaním?

CMOREJ, P.: Začnem námietskou, ktorá v našej diskusii už zaznela: z nepsychologického chápania logicko-matematických entít nevyplýva, že musia mať nevyhnutný charakter. Majú ho azda fyzické predmety, ich vlastnosti a vzťahy medzi nimi? Ale to je v danej súvislosti vedľajšie. Skutočnosť, že Piaget im tento charakter priznáva, možno len uvítať. Položme si však otázku, v čom vlastne spočíva. V prípade pravdivých matematických tvrdení je to jasné: ich nevyhnutnosť tkvie v tom, že sú pravdivé v každej možnej situácii alebo - ako sa hovorí v intenzionálnej sémantike - v každom možnom svete a okamihu. Inak povedané, nie je mysliteľný svet, v ktorom by mohli byť nepravdivé. Lenže matematickými entitami nie sú len isté tvrdenia, ale aj čísla, ich množiny, rozmanité funkcie, geometrické útvary atď. V čom spočíva nevyhnutnosť týchto entít, keď o ich pravdivosti nemožno zmysluplne vôbec hovoriť? Bolo by predsa nezmyselné tvrdiť, že množina $\{2,3\}$ alebo operácia súčtu $+$ je pravdivá alebo nepravdivá! Pod nevyhnutnosťou takých entít by sme mohli rozumieť okolnosť, že nemôžu neexistovať. Obávam sa však, že toto chápanie nie je zlučiteľné s Piagetovou koncepciou, podľa ktorého "logicko-matematické entity sú spojené ...so subjektom" a s jeho existenciou. Vy ste v uvedenej citácii namiesto troch bodiek dali "aj", ale neviem prečo. Môžu azda, podľa Piageta, existovať *i* mimo tohto spojenia?!

Existuje aj iná možnosť chápania nevyhnutnosti týchto entít: ich nevyhnutnosť by sa prejavovala v tom, že sa "správajú rovnako" v každom možnom svete v každom okamihu, presnejšie, v každom možnom svete v každom okamihu majú tie isté matematické (teda nie empirické!) vlastnosti a sú v tých istých vzájomných vzťahoch (čiže ich vzťahy k nematematickým entitám sa môžu meniť). Žiaľ, s Piagetovou koncepciou nebudie asi zlučiteľné ani toto chápanie nevyhnutnosti matematických entít, lebo predpokladá, že existujú nevyhnutne, teda aj mimo spojenia so subjektom, ktorý sa nevyhnutnej existencii určite neteší. Aby sme mohli pokračovať v diskusii, bolo by vhodné, keby ste mi objasnili Piagetovo chápanie nevyhnutnosti logicko-matematických entít.

Nie je mi tiež jasné, či mu tieto entity splyvajú s aktivitami, o ktorých hovoríte, alebo sa ich v týchto aktivitách iba zmocňujeme alebo ich dokonca tvoríme. Z vašej repliky súdím, že veľmi úzko súvisia so štruktúrami našich mentálnych aktivít, nie som si však istý, či sú s nimi totožné.

Nie som psychológ, aby som vám mohol odpovedať na Piagetovu otázku o mechanizme, ktorý sa uplatňuje pri "dosahovaní" ideálnych matematických entít a neviem, ktoré - a či vôbec nejaké - poznatky súčasnej psychológie myslenia by nám mohli pomôcť pri hľadaní odpovede na ňu. Ale v našej diskusii, zameranej na *Piagetovo* chápanie týchto entít, to nepovažujem za podstatné. K otázke, ktorú mi položili V. Černík a J. Viceník, môžem v danom kontexte povedať len toľko, že logicko-matematické entity určite nepoznávame prostredníctvom Platónovho rozpomínania sa na ne (to by uvítal nielen každý školák, ale i matematik), okrem iného aj preto, lebo to nie sú naše spomienky, ale objekty, ktoré jestvujú v istom zmysle nezávisle od nás a našich duševných aktivít. Preto ich poznávame iba prostredníctvom tvrdej a náročnej práce, pri ktorej zisťujeme, aké vlastnosti im prislúchajú a v akých vzájomných vzťahoch sa nachádzajú. Pritom uplatňujeme rozličné metódy, ktoré sú práve také rozmanité ako skúmané objekty. Čo urobíte, keď budete chcieť vedieť, či dané prirodzené číslo je prvočíslo? A čo vtedy, keď vás bude zaujímať, či daná formula predikátovej logiky je platná alebo či daná množina je spočítateľná? Vráťme sa však k Piagetovi, lebo predmetom tohto dialógu je predovšetkým *Piagetovo* chápanie logicko-matematických entít, naše názory sú v tomto kontexte predsa vedľajšie.

RYBÁR, J.: Pokiaľ ide o charakteristiku nevyhnutnosti v súvislosti s niektorými vašimi príkladmi matematických entít, vyjadril som sa nepresne a vaše námietky v uvedených prípadoch sú oprávnené. Ide skôr o charakteristiku vzťahujúcu sa na logicko-matematické štruktúry (a zase sme pri nich) alebo ešte širšie na logicko-matematické poznanie. Piagetov prístup je holistickejší (má celostnejší charakter).

Otázky spojené s nevyhnutnosťou logicko-matematického poznania však sú určite podstatné a môžu poslúžiť ako model Piagetovho prístupu: riešiť tradičné epistemologické problémy vedeckými prostriedkami.

Piaget tu nadväzuje na tradíciu, ktorá vedie až k Leibnizovi a Humovi, na ich odlišenie právd rozumu od právd faktu. Pravdy rozumu (sem patria logicko-matematické pravdy) platia vo všetkých možných svetoch, ako aj vy na to upozorňujete, a nevieme si predstaviť im protikladné tvrdenia. Na rozdiel od právd faktu (empirických právd), o ktorých sa to nedá povedať.

Piageta zaujíma proces formovania, utvárania tejto základnej charakteristiky. Piaget experimentálne skúmal, ako prebieha proces zvnútorňovania logicko-matematických aktivít manifestovaných v materiálnej činnosti dieťaťa už na veľmi počiatočných úrovniach až po úrovne, na ktorých nadobúdajú atemporálny nevyhnutný charakter.⁵ Tento proces má viacero etáp. Začína už utváraním semiotickej funkcie (okolo jeden a pol až dvoch rokov).⁶ Druhou veľkou etapou tohto procesu je formovanie konkrétnych operácií (v priemere vo veku okolo 7-8 rokov). Prechod od sukcesívnych činností k simultánnym tu nadobúda výraznejšie formy.⁷ Oproti tomu v tretej etape formálnych operácií, poznanie presahuje samotnú realitu a je spojené s možnosťou a nevyhnutnosťou bez sprostredkovania konkrétnym: teda ide o kognitívnu možnosť, takou je napríklad nekonečná postupnosť celých čísel, mohutnosť kontinua alebo jednoducho šestnásť operácií vyplývajúcich z kombinácie dvoch

propozícií p a q a ich negácií. Táto možnosť je v svojej podstate mimočasová ([5], 52).

Pokiaľ ide o spojitosť logicko-matematického poznania so subjektom ešte raz sa odvolávam na poznámku 4. Empirické poznanie vzniká abstrakciou z objektov a logicko-matematické poznanie abstrakciou z činnosti subjektu.

Pokiaľ ide o totožnosť štruktúr mentálnych aktivít a logicko-matematických aktivít, je pravda, že aj mentálne aktivity majú určitú logicko-matematickú štruktúru, ale proces ich formovania nie je čisto mentálna záležitosť, majú korene až v biologických úrovniach aktivít organizmu.

Čo sa týka spôsobu dosahovania ideálnych entít (resp. všeobecných pojmov) Piaget tu polemizuje s B. Russelom, ktorý v jednom svojom vývinovom štádiu zastával názor, že tak ako našou schopnosťou percepcie dosahujeme empirické objekty, tak existuje schopnosť "conception", ktorou dosahujeme idey, ktoré existujú nezávisle od nás. Pochopiteľne takáto schopnosť prostriedkami vedeckej psychológie nebola potvrdená. Nezávislosť existencie ideálnych entít zdôrazňujete aj vy. Vieme o existencii nejakej ideálnej entity pred jej skonštruovaním?

CMOREJ, P.: Pravdaže vieme. Hľadali by sme stále nové a nové prvočísla, keby sme nevedeli, že jestvujú? Počet ľuďmi skonštruovaných prirodzených čísel je (a vždy bude) konečný, vieme však, že existuje nekonečne mnoho ďalších čísel, ktoré ešte nik neskonštruoval. Alebo chcete tvrdiť, že existujú iba tie, ktoré sme už skonštruovali? O existencii ďalších, zatiaľ nikým neskonštruovaných prirodzených čísel či prvočísel sa predsa môžeme dozvedieť (a teda aj vedieť) pomocou dedukcie z axióm aritmetiky. Istota tohto vedenia je oveľa väčšia ako istota ktorakolvek empirickej predpovede či konštatovania, že na tom a tom mieste sa nachádza taký a taký objekt. Alebo príklad z logiky: skonštruovali sme iba isté konečné množstvo logických zákonov, ale ľahko možno dokázať, že okrem nich existuje nekonečne veľa ďalších. K vašej poznámke, že schopnosť uchopovania ideálnych entít "nebola [vedeckými prostriedkami] potvrdená" len toľko, že nebola ani vyvrátená a to neznamená, že tieto entity neexistujú - môžeme sa ich predsa zmocňovať nepriamo, prostredníctvom predmetov, ktoré pod tieto entity spadajú, resp. predmetov, na ktoré sa tieto entity aplikujú. Vráťme sa však k prvému odstavcu vašej poslednej repliky.

Priznám sa, že neviem, v čom spočíva nevyhnutnosť logicko-matematického poznania ako celku. Ak sa táto nevyhnutnosť nedá redukovať na nevyhnutnosť matematických viet, tak netuším, čo má Piaget, resp. vy, na mysli. V tomto podaní sa problém nevyhnutnosti matematických entít zbytočne zahmlieva. Navyše tu vôbec nie je jasné, čo všetko podľa Piageta do tohto poznania vlastne patrí: a) iba to, čo sa nachádza v hlavách ľudí, ktorí sa matematikou zaoberajú, prípadne ju viac alebo menej používajú, alebo b) aj to, čo sa vyskytuje v literatúre a v iných záznamoch, či dokonca c) aj to, čo logicky vyplýva z poznatkov obsiahnutých v myšliach ľudí a vo všemožných záznamoch???

Ak pri charakteristike nevyhnutnosti matematických entít "ide ... skôr o charakteristiku vzťahujúcu sa na logicko-matematické štruktúry", tak by ste nemali

zabúdať na to, že s určením ich nevyhnutnosti budete mať tie isté problémy ako s určením nevyhnutnosti čísel, množín, funkcií a pod. Ved' čo sú logicko-matematické štruktúry a čo ich nevyhnutnosť?

Neodpovedali ste priamo na moju otázku, či podľa Piageta matematické entity existujú aj mimo spojenia so subjektom. Konštatovanie, že matematické poznanie vzniká abstrakciou, môže predsa akceptovať práve tak empirista, podľa ktorého tieto entity v procese abstrakcie tvoríme, ako platonista, ktorý môže povedať, že ich v tomto procese objavujeme (ako nové planéty, územia či subatomárne častice), pričom prvý môže predpokladať, že sú so subjektom nerozlučne späté a mimo neho nemysliteľné, a ten druhý vyznávať názor, že sú od subjektu nezávislé a preto ich subjekt môže nanajvýš objavovať, no nie vytvárať.

Keď hovoríme o vzťahu medzi matematickými entitami a mentálnymi aktivitami, najmä o tom, či tieto entity s nimi splyvajú, t.j. či sú s nimi identické alebo od nich rôzne, už dlhší čas mám pocit, že si celkom dobre nerozumieme. Váš opis "zvnútorňovania logicko-matematických aktivít" je síce zaujímavý, ale nie je odpoveďou na moju otázku, či Piaget pokladá matematické entity za *totožné* s týmito aktivitami (citát, ktorý ste uviedli už vo svojej druhej replike, v značnej miere potvrdzuje kladnú odpoveď, ale vaše vyjadrenia k tejto otázke sú dosť zdržanlivé, ak nie priam vyhýbavé, takže neviem, čo si mám myslieť o Piagetovom názore na túto tému). Otázka identity "štruktúr mentálnych *aktivít* ... a matematicko-logických *aktivít*" je v danej súvislosti predsa irelevantná. Ak vám dobre rozumiem, tak všetky mentálne aktivity by mali mať logicko-matematickú štruktúru, o čom musím - napriek nejasnosťiam vznášajúcim sa nad chápaním tejto štruktúry - veľmi vážne zapochybovať. Ale nevidím dôvod, prečo by sme sa mali ďalej zaoberať týmto problémom. Za irelevantné pokladám aj tvrdenie, že mentálne aktivity "majú korene až v biologických úrovniach aktivít organizmu" - myslím, že platonistu nemusí táto skutočnosť príliš znepokojsť a empiristovi účinnejšie nepomôže.

Preto ešte raz opakujem otázku: pokladá Piaget logicko-matematické entity za isté činnosti alebo za entity, ktoré sú od nich odlišné a aspoň do istej miery nezávislé? Ak v jeho diele chýba odpoveď na túto otázku, tak treba povedať, že dilemu: psychologizmus či platonizmus, neprekonal, ale jednoducho obišiel. (Vy ste hovorili o dileme psychologizmus či logicizmus, ale pochybujem, že by Piaget bol proti psychologizmu staval Fregeho logicizmus, teda názor, že matematika sa dá odvodit' z logiky.) Od odpovede na položenú otázku závisí aj riešenie problému, v čom spočíva nevyhnutnosť matematických entít.

RYBÁR, J.: Otázok bolo položených veľa, ale vzťahujú sa k týmto základným problémom:

1. **Problém nevyhnutnosti logicko-matematických entít.** Zhoda s vami je v tom, že ide skutočne o nevyhnutnosť logicko-matematických právd (resp. viet). Zdôraznil som to odvolaním sa na Leibnizovsko-humovskú tradíciu. (Tým som naznačil, čo sa mal na mysli pod termínom nevyhnutnosť.) Avšak Piageta zaujíma, ako sa formuje, utvára fenomén nevyhnutnosti z hľadiska subjektu poznania (on

predsa skúma fakty). Nezhoda s vami, okrem iného, je aj v tom, že analyzujete logicko-matematické entity (aspoň v uvedených príkladoch) bez ich zasadenia do kontextu konkrétnej matematickej teórie. Ak by boli takto analyzované, vyhovovali by leibnizovsko-humovskému chápaniu.

2. Problémy existencie logicko-matematických entít (resp. štruktúr) a ich spojenie s poznávacím subjektom. Vo všeobecnosti možno, podľa Piageta, hovoriť o dvoch druhoch existencie: a) napr. keď dieťa váži dva kamene a zisťuje, ktorý z nich je ťažší, objavuje vlastnosť, ktorá patrila kameňu už predtým než sa stal predmetom činnosti subjektu; b) keď však dieťa zistí, že ak desať kamienkov usporiada do radu, kruhu alebo nejakej krivky, nemá to vplyv na ich počet, potom ide o vlastnosť (počet nezávisí od usporiadania), ktorá vzniká abstrakciou nie z objektov, ale abstrakciou y činnosti poznávajúceho subjektu. Táto vlastnosť nebola vopred obsiahnutá v kameňoch (tu sa "objavujú" vlastnosti vzťahov medzi činnosťami subjektu).

3. Vzťah medzi logicko-matematickými, mentálnymi a biologickými aktivitami. Tento vzťah je jedna z hlavných otázok, ktoré zaujímajú Piageta. Na vašu otázku v tejto súvislosti teraz odpovedám: logicko-matematické entity sú mentálnymi činnosťami, ale geneticky súvisia aj s biologickými a fyzickými aktivitami. (Intersubjektívna platnosť logicko-matematického poznania je pre Piageta veľmi dôležitou otázkou. Piaget je veľký kritik využívania len introspektívnych metód.) Odvolávanie sa na biologické korene logicko-matematických aktivít má svoju efektívnosť: umožňuje sa vystríhať zjednodušenému empirizmu (resp. psychologizmu).

CMOREJ, P.: Ak pod nevyhnutnosťou Piaget rozumel nevyhnutnosť matematických právd, tak by sme nemali hovoriť o nevyhnutnosti logicko-matematických entít či štruktúr vo všeobecnosti, ale iba o nevyhnutnosti viet, resp. ich významov - vyhneme sa tak zbytočným nedorozumeniam. Som rád, že jedno z nich ste na začiatku svojej poslednej repliky odstránili, umožní nám to dostať sa trochu ďalej. Napríklad, hneď musím vysloviť isté pochybnosti o formovaní či utváraní fenoménu nevyhnutnosti, pretože nevyhnutnosť tvrdení netvoríme, ale objavujeme: veta je nevyhnutná nezávisle od toho, či na to niekto prišiel alebo nie. Môžeme hovoriť nanajvýš o fenoméne chápania, zmocňovania sa a objavovania nevyhnutnosti určitých viet, lebo nevyhnutnosť nie je vlastnosť, ktorú veta nadobudne až vtedy, keď subjekt obráti na ňu svoju pozornosť.

Myslím, že v príkladoch som spomínané matematické entity neanalyzoval, takže ich "zasadenie" do kontextu konkrétnej matematickej teórie by bolo v danej súvislosti zbytočné. Na rozdiel od vás a Piageta si myslím, že vlastnosť mať takú a takú mohutnosť, resp. skladať sa z takého a takého počtu kamienkov, je rovnako objektívna, ako napr. vlastnosť mať jeden kilogram. Treba si však uvedomiť, že vlastnosti prvého druhu neprislúchajú kameňom, ale ich množinám. Vaše či Piagetovo tvrdenie, že tieto vlastnosti vznikajú až abstrakciou z činnosti subjektu pokladám za dosť diskutabilné (aspoň pri jednom chápaní *vznikania vlastnosti*), ale nerád by som sa pri ňom teraz zdržiaval, pretože moje výhrady k nemu budú zrejme z diskusie, ktorú by sme mali teraz rozvinúť na tému 3. bodu vašej repliky. Myslím, že v tomto

bode ste formulovali odpoveď na kľúčový problém nášho dialógu. Škoda, že ste s ňou nevyrukovali skôr. Na začiatku dialógu ste sa síce vyjadrili v podobnom zmysle, ale svojimi odpoveďami na niektoré z mojich nasledujúcich otázok ste ma potom trochu pomýlili. Navrhujem zvyšok nášho rozhovoru venovať obsahu spomínaného 3. bodu a tomu, čo ste povedali už vo svojej druhej replike. Súhlasíte, alebo sa chcete najprv vyjadriť k mojim poznámkam k 1. a 2. bodu?

RYBÁR, J.: Už v minulej replike som začal resumovať zhody a nezhody medzi vašou koncepciou a koncepciou, ktorá je mne blízka, pokiaľ ide o povahu logicko-matematických entít (resp. danú tému). Na záver dialógu by som chcel svoj výpočet doplniť ešte o následovné body (v ktorých je obsiahnutá aj odpoveď na vaše posledné otázky):

1. **Osvojovanie - konštruovanie.** Piagetova koncepcia by bola pre vás akceptovateľná, ale len ak ju berieme ako koncepciu na vysvetlenie osvojovania logicko-matematických entít. Avšak u Piageta ide o ich konštruovanie aj pokiaľ ide o najjednoduchšie štruktúry (resp. entity). Logicko-matematické štruktúry nie sú dané vopred ani v empirii, ani ideálnom svete, ani v jazyku a pod.

2. **Subjektívne - objektívne.** K názoru, že "logicko-matematické aktivity sú mentálnymi činnosťami, ale geneticky súvisiacimi aj s biologickými a fyzickými aktivitami", som sa prepracovával postupne, aj pomocou vašich otázok a najmä štúdiom materiálu, ktorý v tomto smere je obsiahnutý v Piagetových prácach. (Pred dialógom s vami som si explicitne túto otázku takto nekládol, ale vďaka vám som zistil, že je pre mňa zaujímavá.) Napriek tomu, že je to tak, nemôžem prijať záver, ktorý z toho podľa vás by mal vyplývať: Ak logicko-matematické aktivity sú mentálnymi aktivitami, potom ide o psychologizmus.

Táto rôznosť záverov, podľa môjho názoru, pramení v rôznom chápaní, resp. prístupu k statusu subjektívneho a objektívneho. O čo mi ide, dá sa dobre ilustrovať na tom, čo píšete na začiatku posledného odstavca vašej poslednej repliky: "Na rozdiel od vás a Piageta si myslím, že vlastnosť mať takú a takú mohutnosť, resp. skladať sa z takého a takého počtu kamienkov, je rovnako objektívna ako napr. vlastnosť mať jeden kilogram." O objektivite uvedených vlastností nepochybujem, ale pokiaľ ide o prvé dve vlastnosti, tie nie sú dané dopredu a pri ich "tvorbe" subjekt nemožno vynechať.

CMOREJ, P.: Veľmi zaujímavý, ale aj mimoriadne zložitý problém, či tieto vlastnosti sú objektívne alebo sú - a do akej miery - konštruktmi subjektu, nemôžeme v našom dialógu rozoberať, preto sa obmedzím na zopár otázok, ktorými sa pokúsim aspoň naznačiť isté problémy a ťažkosti súvisiace s vašim stanoviskom (ale diskusiu o nich musíme, žiaľ, odročiť na inokedy).

Ktorý subjekt nemožno "pri tvorbe" takých vlastností ako mať takú a takú mohutnosť a pod. "vynechať"? Subjekt, ktorý ju vytvára a ňou operuje prvý, alebo ani jeden subjekt, ktorý sa k nej prepracoval alebo dokonca ešte len prepracuje svojou abstrakčnou činnosťou? Je vlastnosť skladať sa z piatich kamienkov, ktorá vzniká vo

vašej abstrakčnej činnosti, totožná s vlastnosťou skladat' sa z piatich kamienkov, ktorá vzniká abstrakčnou činnosťou ktoréhokoľvek iného subjektu? Na tvorbu takej vlastnosti stačí aktivita jedného subjektu alebo ju utvára až súbor všetkých činností abstrahujúcich jedincov? Také vlastnosti jestvujú iba v priebehu činnosti individuí, ktoré nimi operujú, myslia ich, prípadne sa nimi zaoberajú (z toho či onoho aspektu), alebo aj vtedy, keď túto činnosť nik nevykonáva?

Nemám nič proti názoru, že "logicko-matematické aktivity sú mentálnymi činnosťami" podmienenými neurofyziologickou výbavou subjektu a súhlasím s vami, že tento názor nie je zaťažený psychologizmom. Lenže vo svojej predchádzajúcej replike ste nehovorili o logicko-matematických *aktivitách*, ale o logicko-matematických *entitách*. Povedali ste, že "logicko-matematické entity sú mentálnymi činnosťami". Zaznelo to i na začiatku nášho dialógu, hoci nie v takej jednoznačnej podobe ("logicko-matematické operácie sú v podstate reálne činnosti"); v tejto formulácii ste použili prinajmenej dvojznačný výraz "operácie", ktorý môže znamenať jednak určité matematické funkcie, jednak to isté ako slovo "aktivity"). Nevidím pádnejší dôvod, pre ktorý by sme tento názor nemohli označiť za istý druh psychologizmu (podfarbeného "neurofyziologizmom", ktorý vám možno bráni súhlasiť s mojím stanoviskom), ale otázku jeho zaškatuľkovania považujem - ako som naznačil už v tretej replike - za vedľajšiu. Myslím, že by sme ju mohli pokojne prenechať čitateľom tohto dialógu. Radšej sa sústreďme na niektoré *dôsledky* tohto chápania logicko-matematických entít. Pre nedostatok miesta ponúkam len niekoľko stručných poznámok.

1. Keďže počet mentálnych aktivít vždy bol, je a bude konečný, množina všetkých logicko-matematických entít je konečná. Teda existuje a vždy bude existovať iba konečný počet čísel, funkcií, geometrických útvarov atď.

2. Nikto nevie, čo všetko patrí do tejto množiny, lebo nik nemá *celkový* prehľad o tom, aké logicko-matematické myšlienkové akty sa vykonávajú.

3. Ak logicko-matematické entity sú mentálne činnosti, tak logika a matematika sú empirické disciplíny a pravdy formy "Entita X existuje" majú evidentne empirický charakter. Znamenajú totiž to isté ako pravdy typu "Nieкто vykonáva mentálnu činnosť X ". Teda aspoň istej časti pravdivých logických a matematických tvrdení chýba nevyhnutný charakter (a pravdaže chýba aj tvrdeniam, z ktorých vyplývajú, lebo z nevyhnutných premís nemôžu vyplývať závery, ktoré nie sú nevyhnutné). Odpovede na otázky formy "Existuje tá a tá matematická entita?" môže dať iba empirický výskum zameraný na získavanie údajov o vykonávaných duševných činnostiach.

Uvedený dôsledok nie je v rozpore len so všeobecne uznávaným chápaním matematiky, ale aj s Piagetovým názorom na nevyhnutnosť logicko-matematických právd a nezávislosť logicko-matematického poznania "od bezprostrednej empirickej reality" (text v úvodzovkách pochádza z vašej štvrtej repliky).

4. Niektoré logicko-matematické entity chvíľami jestvujú, chvíľami nejestvujú, a to vtedy, keď činnosti, s ktorými splyvajú, nikto nevykonáva. Napríklad číslo 532478326 jestvuje iba v časových intervaloch, v ktorých ho nieкто "vykonáva"

(podľa Piageta pravdepodobne vtedy, keď niekto 532478326 krát opakuje jednotku; vychádzam z citátu, ktorý ste uviedli vo svojej druhej replike).

5. V istých obdobiach nejestvuje jedno číslo 1, jedno číslo 2, jedna operácia súčtu +, jedna operácia rozdielu - a pod., ale toľko jednotiek, dvojok,, toľko operácií + a operácií - atď. ako ľudí vykonávajúcich príslušné činnosti. Vyplýva to zo samozrejmosti, že mentálne aktivity vykonávané rozličnými osobami sú rôzne entity bez ohľadu na to, ako sú si podobné. Napríklad sčítanie čísel vykonávané jednou osobou je iná entita ako ich sčítanie inou osobou (keby boli totožné, jedno z nich by nemohlo existovať bez druhého, čo o uvedených činnostiach neplatí). To isté možno konštatovať o ostatných matematických operáciách a funkciách, o číslach, ich množinách a iných logicko-matematických entitách *chápaných ako mentálne aktivity*.

6. Činnosti vykonávané tou istou osobou v rozličných časových intervaloch sú rôzne entity (jedna môže jestvovať bez druhej), takže keď si pomyslíte číslo 2 dnes a zajtra, vykonáte dve rozličné činnosti, z čoho vyplýva, že číslo 2 pomyslené dnes je odlišné od čísla 2 pomysleného zajtra.

7. Ak logicko-matematické entity sú mentálne aktivity, tak vlastnosti týchto aktivít sú vlastnosťami logicko-matematických entít. Niektoré činnosti majú kratšie, iné zasa dlhšie trvanie; napr. pomyslenie čísla 2 vyžaduje menej času ako pomyslenie čísla 365439556234, čiže prvé číslo má kratšie a druhé dlhšie trvanie (rozdiely v dĺžke trvania medzi jednotlivými osobami len potvrdzujú skutočnosť, že čísla pomyslené rozličnými individuami sú rôzne entity, samozrejme, čísla chápané ako mentálne aktivity). Z aritmetiky však vieme, že číslam sa také vlastnosti neprispisujú ani neupierajú. Vykonávané duševné operácie podliehajú aj istej priestorovej lokalizácii, čo nemá v prípade logicko-matematických entít nijaký zmysel.

8. Okrem podobných vlastností, ktoré sa logicko-matematickým entitám nedajú zmysluplne vôbec pripísať, na báze Piagetovej koncepcie musíme niektorým z nich pripísať atribúty, ktoré im matematika evidentne upiera. Mám na mysli vlastnosti a vzťahy týchto entít dané konečnosťou množiny, spomenutej v 1. bode. Patrí k nim napr. vlastnosť byť najväčším číslom, ďalej vlastnosť byť číslom, ktoré je menšie alebo rovné najväčšiemu jestvujúcemu číslu alebo vlastnosť byť deliteľom konečného počtu prirodzených čísel a pod.

Rozvinutím naznačených záverov na pozadí konkrétnych matematických teórií a ich entít by sme získali mnoho ďalších dôsledkov, ktoré Piagetovu koncepciu prinajlepšom vážne sponchyňujú. Nemyslím si však, že tieto pochybnosti vážnejšie ohrozujú význam výsledkov, ktoré získal vo svojom empirickom výskume - týkajú sa len ich interpretácie a filozofického výkladu. Predpokladám, že tieto výsledky sa dajú reinterpretovať na báze koncepcie, ktorá ich nebude pokladať za odpovede na otázky týkajúce sa *vzniku a genézy* logicko-matematických *štruktúr čí entít*, ale za výsledky, ktoré nám umožňujú lepšie pochopiť, ako sa subjekt týchto entít zmocňuje, ako a za akých podmienok sa utvára jeho logicko-matematické poznanie. S Piagetovým zdôrazňovaním činnostnej povahy tohto *poznania* možno len súhlasiť (poukazoval na ňu aj neskorý L. Wittgenstein a iní významní filozofi XX. storočia), nie však s jeho stotožnením logicko-matematických mentálnych aktov s entitami,

ktoré sú predmetom skúmania logiky a matematiky. Nazdávam sa, že uvedené dôsledky to jednoznačne potvrdzujú.

RYBÁR, J.: Vzhľadom na priestor, ktorý máme k dispozícii môžem už len konštatovať, že si nastoľujeme otázky, o ktorých je druhá strana presvedčená, že už na ne dost' zreteľne reagovala. (Pokiaľ ide o mňa mám na mysli napríklad vzťah medzi sukcesívnym a simultánnym, temporálnym a atemporálnym a s tým súvisiacej otázky špecifickosti logicko-matematického poznania, jeho autonómie od empirickej reality).⁸

Ďalej, že problematcké otázky, ktoré by mali "tať do živého", pre druhú stranu nie sú takej povahy a sú riešiteľné. (Napríklad, prečo pri chápaní, ku ktorému sa prikláňam by mali byť matematické entity u každého subjektu iné? Predmetom Piagetovho chápania sú predsa epistemické vlastnosti subjektu, a to je to, čo je spoločné pre každý poznávací subjekt).⁹

To všetko je spôsobené predovšetkým rozdielnou "optikou", pomocou ktorej skúmame dané problémy (nedostatočný priestor na výklad koncepcie je tu určite až na druhom mieste). Vzájomné spoznávanie týchto "optík" je pre mňa veľmi zaujímavé, ale o tom naozaj až zase niekedy inokedy.

CMOREJ, P: Na 1. a 2. odsek môžem v tomto štádiu dialógu reagovať len čírym vyjadrením nesúhlasu. Čitateľ nech si vyberie, komu dať za pravdu.

POZNÁMKY

¹ Aby bolo jasné, čo mám na mysli uvediem jeden z piagetovských experimentov. Experimentátor položí pred dieťa dve kôpky žetónov a jednu z nich usporiada do radu (musí v ňom byť najmenej sedem žetónov). Úloha pre dieťa znie: postav z druhej kôpky rad, v ktorom by bolo rovnako veľa žetónov. Deti vo veku 4-5 rokov riešia túto úlohu tak, že dbajú iba na to, aby sa rovnali konce radov. Deti vo veku 5-6 rokov riešia tú istú úlohu jednoducho priradením. (Avšak nemusia mať ešte pojem čísla, čo si môžeme jednoducho overiť tým, že priradený rad roztiahneme alebo zúžime. Ak dieťa bude tvrdiť, že teraz je v rade viac alebo menej žetónov, nemá ešte pojem čísla.)

² "Egocentrizmus je konfúzia seba (dieťaťa) s externým svetom". ([1], 5). Pre ilustráciu uvediem príklad: Dieťa má zavesené hrkálky nad postieľkou. Zistí, že keď zatrasie postieľkou, hrkálky vydávajú zvuk. Potom, aj keď sa objavia hrkálky mimo postieľky, dieťa sa snaží zatrasť postieľkou. Takéto správanie Piaget nazýva egocentrickým. Ako vidíme s egocentrickým správaním dieťaťa je spojené zvláštne chápanie kauzality. Pre úplnosť treba dodať, že pre rôzne dezinterpretácie zmenil tento termín na centráciu. Ďalší vývin inteligencie spočíva vlastne v neustálom decentrovaní.

³ O existencii praktických pojmov (resp. predpojmov) vieme na základe praktického konania detí. O pojmoch v pravom slova zmysle možno hovoriť až so vznikom symbolickej funkcie u dieťaťa.

"Grupa premiestnení" sa psychologicky dá vysvetliť takto: a. Premiestnenie AB a BC sa môže koordinovať do jedného premiestnenia, ktoré stále patrí do tej istej sústavy; b. každé premiestnenie AB môže byť obratené v premiestnenie BA, k čomu dochádza pri "návrate" k východisko-

vému bodu; c. zjednotenie premiestnenia AB a inverzného premiestnenia BA dáva nulové premiestnenie AA; d. premiestnenia sú asociatívne, t. j. v slede A, B, C, D máme $AB + BD = AC + CD$; to znamená, že z jedného jediného bodu môže byť dosiahnuté z bodu A rôznymi cestami (ak úsečky AB, BC atď. neležia na priamke) ([7], 23).

⁴ Podľa Piageta z psychologického hľadiska matematické poznanie vzniká reflektívnou abstrakciou. Napríklad, keď dieťa zisťuje, že výsledok sčítania nejakých objektov je nezávislý od ich usporiadania (týka sa vlastnosti usporiadania a nie vlastnosti objektov, ktoré neobsahujú ani sčítanie, ani komutatívnosť - ide o abstrakciu z činnosti a nie z objektov). Úloha reflektívnej abstrakcie spočíva v prevode následných materiálnych, fyzických aktov do systému interiorizovaných operácií, ktorých zákony sú pochopené ako simultánny akt ([2], 221).

⁵ Ani na elementárnych úrovniach nejde o proces jednoduchého učenia, osvojovania. Napríklad príčinu toho, že existujú tzv. nenadané deti na matematiku a prírodné vedy Piaget videl v tom, že škole sa v týchto prípadoch nepodarilo vhodne nadviazať na vývin spontánnych logicko-matematických pojmov. Podľa neho elementárne pojmy sa neosvojujú, ale konštruujú.

⁶ Jedna z jeho prvotných foriem je nápodoba (napríklad, keď dieťa napodobuje psa, mačku alebo trebárs auto). Už tu začína diferenciácia označujúceho od označovaného.

⁷ Je to dobre vidno napríklad v experimente, v ktorom ide o usporiadanie paličiek rôznych veľkostí. Deti predoperačnej úrovne rozdeľujú paličky najprv po pároch (jedna malá a jedna veľká atď.) alebo po trojiciach (jedna mala, jedna prostredná a jedna veľká atď.), ale nie sú schopné ich potom všetky skoordinať do jednej série. Neskoršie dokážu urobiť správnu sériu, ale v procese pokusov a omylov a korekciou chýb. Na úrovni konkrétnych operácií naopak subjekty často používajú exhaustívnu metódu spočívajúcu v hľadaní najmenšieho prvku, potom najmenšieho z tých, ktoré ostanú atď. Teda vidíme, že táto metóda pripúšťa predpoklad, že ľubovoľný element E bude väčší než paličky už umiestnené povedzme $E > D, C, B, A$ a zároveň menší než tie, ktoré ešte nie sú umiestnené povedzme $E < F, G, H$ atď. Teda inovácia zavedená v tomto štádiu spočíva v simultánnom použití relácií $>$ a $<$. (V predoperačnom období subjekt vedel orientovať svoje manipulácie len jedným smerom. Napríklad o B vedel povedať, len, že je menšie ako C, alebo väčšie ako A, nikdy nie, že je zároveň väčšie aj menšie. Alebo iný príklad: subjekt A má brata B, ale na otázku, či jeho brat má brata odpovedá záporne, pretože "oni sú iba dvaja v rodine" ([5], 27-28).

⁸ Pozri s. 344 a 345 tohto dialógu a príslušné poznámky.

⁹ Pozri s. 342 a 343 tohto dialógu.

*Pavel Cmorej,
Filozofický ústav SAV,
Klemensova 19, 813 64 Bratislava,
fax: 321 215, e-mail: postmast@fiu.savba.sk*

*Ján Rybár,
Katedra humanistiky MFF UK,
Mlynská dolina, 842 15 Bratislava,
fax: 72 58 82, e-mail: rybar@fmph.uniba.sk*

LITERATÚRA

- [1] BATTRO, A. N. (1973): **Piaget: Dictionary of terms**. Oxford.
- [2] BETH, E. W. - PIAGET, J. (1966): **Mathematical Epistemology and Psychology**. Dordrecht.
- [3] ČERNÍK, V. - VICENÍK, J. (1992): Ešte raz k otázkam identity, zmeny a vývinu pojmov. In: **Filozofia** 47, č. 12, s. 674
- [4] PIAGET, J. (1970): **Psychologie intelligence**. SPN, Praha.
- [5] PIAGET, J. (1972): **L'épistémologie génétique**. Paris.
- [6] PIAGET, J. - GARCIA, R. (1983): **Psychogenèse et histoire des sciences**. Paris.
- [7] PIAGET, J. - INHELDEROVÁ, B. (1970): **Psychologie dítěte**. SPN, Praha.
- [8] RYBÁR, J. (1994): Epistemológia ako vedecká disciplína? In: **Organon F** 1, č. 2, 109-122.