MATEMATICKÉ OBJEKTY: NÁLEZY, ALEBO VYNÁLEZY?

RÓBERT MACO, Katedra filozofie a dejín filozofie FiF UK, Bratislava, SR

MACO, R.: Mathematical Objects: Discovered or Invented?
FILOZOFIA 70, 2015, No. 7, pp. 518-530

The question whether mathematical objects are things to be discovered or rather invented belonged for a long time among the most discussed issues in philosophy of mathematics. The answers range from strictly Platonist approaches to radical constructivism and even fictionalism. The paper is an attempt to bring this philosophical question down to earth before we set out to search for highly sophisticated but controversial explanations. The methods we employ are inspired by those implemented in philosophical remarks of the later Wittgenstein. The main goal of the paper is to strip the question of its reputed philosophical depth by means of paying closer attention to what its meaning could intelligibly be in the first place.

Keywords: Mathematical objects – Invention – Discovery – Platonism – Antirealism – Wittgenstein – Philosophy of mathematics

Sú matematické objekty ľudskými výtvormi (vynálezmi), alebo sú niečím, čo ľudia objavujú (nachádzajú)?[1] Zdá sa, že hlavné typy rôznych odpovedí na túto otázku by sa dali zhrnúť takto:

1. Matematické objekty sú čisto ľudskými výtvormi.
2. Matematické objekty sú ľuďmi len objavované.
3. Niektoré matematické objekty sú ľuďmi vytvárané, ostatné sú zasa ľuďmi objavované.
4. Matematické objekty nie sú ľuďmi ani čisto vytvárané, ani čisto objavované.
5. Otázka nemá zmysel.

Je zrejmé, že u každej z navrhnutých odpovedí sa vynára množstvo dodatočných otázok. Napríklad v prípade piatej odpovede by sme sa mohli oprávnene dožadovať spresnenia: O aký druh absencie zmyslu tu ide? Týmto smerom sa však nateraz nepustíme. Namiesto toho sa najskôr pokúsime stručne odpovedať na otázku, v akom kontexte a na základe akých motivácií by niekto mohol na uvedenú otázku odpovedať vymenovanými spôsobmi. Tento postup bude užitočný, lebo nám umožní uviesť niektoré konkrétne koncepcie a konkrétnych mysliteľov, ktorí by sa reálne podpísali pod aspoň niektoré z uvedených odpovedí, čím naše skúmanie získa trochu konkrétnejšie kontúry a aspoň sčasti ho tým legitimizujeme. Ak totiž možno nájsť rešpektované filozofické teórie, alebo aspoň

[1] Za užitočné pripomienky a komentáre k prvej verzii tohto textu ďakujem Tomášovi Čanovi, Petrovi Ježíkovi, Dežovi Kamhalovi, Marekovi Mikušiakovi a Nine Vojtekovej, ktorá odišla príliš skoro (6. 1. 1988 – 17. 5. 2015).

relevantné protofilozofické názory renomovaných mysliteľov (špeciálne matematikov), ktorých súčasťou sú tieto tézy, prinajmenšom bude jasné, že naša východisková otázka nie je zvolená úplne svojvoľne.

Pokiaľ ide o prvú odpoveď, tézu takéhoto znenia zrejme zastával napríklad vplyvný nemecký matematik Richard Dedekind (ktorý bol o. i. významným spolutvorcom teórie množín). Vo viacerých svojich prácach explicitne hovorí o „tvorení" určitých matematických objektov: napríklad v roku 1888 hovorí o (prirodzených) číslach ako o „slobodných výtvoroch ľudského ducha" (*freie Schöpfungen des menschlichen Geistes*), pričom na základe ďalších vyjadrení (napr. v jeho korešpondencii) sa dá usúdiť, že toto jeho presvedčenie sa vzťahovalo na všetky matematické objekty (Dedekind 1932, 335). V tomto duchu ho aspoň interpretuje J. Ferreirós vo svojom výbornom diele o dejinách teórie množín (Ferreirós 2007, 103). Dedekind však na uvedených miestach nekladie (aspoň nie explicitne) do kontrastu tvorenie a objavovanie. Existuje však skupina matematikov a filozofov matematiky (takzvaní „intuicionisti") , ktorí tvorenie v matematike zdôrazňujú práve preto, aby poukázali na neudržateľnú predstavu „klasickej matematiky", ktorá podľa nich nekriticky prijíma metafyzicky predpoklad matematických objektov existujúcich osebe. Matematika podľa intuicionistov, ako je napr. A. Heyting (žiak L. E. J. Brouwera, zakladateľa tohto smeru) pozostáva z mentálnych konštrukcií, ktoré podliehajú istým prísnym kritériám, pričom matematické vety jednoducho vyjadrujú len úspešnosť určitej konštrukcie (Heyting, 1956, 1, 8).

V prípade druhej možnej odpovede môžeme spomenúť B. Russella a jeho známy výrok z *Principles of Mathematics*: Aritmetiku objavujeme v tom istom zmysle, ako Kolumbus objavil Antily, i jeho výrok, podľa ktorého čísla nie sú našimi výtvormi – podobne, ako Indiáni neboli Kolumbovými výtvormi (Russell 1903, 451). V Russellovom prípade sa navyše dá s úplnou istotou tvrdiť, že toto jeho presvedčenie o ontologickej povahe matematických objektov sa – minimálne v čase písania daného diela – vzťahovalo na všetky matematické entity, nielen na čísla. Ako ďalší príklad mysliteľa s rovnakým názorom by sme mohli uviesť Russellovho kolegu z cambridgeskej univerzity matematika G. H. Hardyho, ktorý sa síce filozofickým otázkam matematiky venoval iba okrajovo, ale jeho populárne vyjadrenia veľmi dobre vystihujú základnú líniu uvažovania, o ktorú nám tu ide. Vo svojej známej *Apológii matematika* (Hardy 1940) vyslovuje presvedčenie, že podobne, ako existuje fyzikálna realita, existuje aj „matematická realita", ktorá je mimo nás a je nezávislá od nás v tom zmysle, že ju môžeme nanajvýš objavovať alebo „pozorovať", v žiadnom prípade nie je naším výtvorom (por. Hardy 2005, 35). V skoršom článku „Mathematical Proof" (Matematický dôkaz) z roku 1929 predstavuje tento svoj názor vo forme obrazu, v ktorom matematickú realitu prirovnáva k vzdialenému horskému reťazcu a činnosť matematika opisuje ako pozorovanie a zaznamenávanie čo najväčšieho počtu jednotlivých horských vrcholov (Hardy 1929, 18). Asi najpriamočiarejšie vyjadril v 19. storočí rovnaké cítenie francúzsky matematik Charles Hermite (ktorého meno sa objavuje napr. v „hermitovských operátoroch", dôležitých v kvantovej mechanike), ktorý v jednom zo svojich listov z roku 1894 napísal: „Verím, že čísla a funkcie analýzy nie sú svojvoľným výtvorom nášho ducha [*produit arbitraire de notre esprit*]; myslím, že existujú mimo nás s takou istou nevyhnutnosťou ako veci objektívnej reality a že ich stretáme alebo objavujeme a študujeme podobne ako fyzici, chemici a zoológovia atď." (Hermite 1905b, 398). V inom, skoršom liste hovorí, že medzi matematikou a fyzikou nie je v tomto ohľade „žiadna ruptúra" (*aucune coupure*) (por. Hermite 1905a, 332).

Nájsť adekvátneho zástancu tretej tézy nie je také jednoduché. Ak môžeme pripísať dostatočnú hodnovernosť povestnému výroku matematika L. Kroneckera – „Celé čísla vytvoril pánboh, všetko ostatné je dielom človeka" –, tak by sme k nim mohli *cum grano salis* zaradiť minimálne tohto predchodcu konštruktivizmu a intuicionizmu vo filozofii matematiky. Nebolo by pritom podstatné, či jeho vyjadrenie o „božskej kreácii" prirodzených čísel (pretože tie mal vlastne na mysli) myslel skôr obrazne, alebo doslova, dôležité by bolo iba rozlíšenie dvoch druhov matematických objektov: jedny, sú dané nezávisle od akejkoľvek ľudskej činnosti a druhé sú čistými výtvormi človeka. Bohužiaľ, podľa toho, čo vieme o Kroneckerových filozofických názoroch na matematiku a na matematické objekty, takýto pokus interpretovať Kroneckera ako reprezentanta tretej tézy nemá veľkú nádej na úspech (por. Ewald 2005, 942). Ak aj totiž naozaj niekedy (vážne) predniesol spomínaný výrok, chcel tým zrejme skôr vyjadriť svoje hlboké presvedčenie o potrebe aritmetizácie celej matematiky (to znamená, že to, čo nemožno vysvetliť/definovať pomocou prirodzených čísel a algoritmických procedúr, nepatrí do serióznej matematiky – osobitne aktuálne nekonečno a Cantorove transfinitné čísla). Sľubnejšieho predstaviteľa tretej tézy by sme azda mohli nájsť v C. F. Gaussovi. Niektoré vyjadrenia v jeho listoch by sa dali interpretovať tak, že priestor (ako predmet geometrie) pokladal za niečo existujúce mimo našej mysle, zatiaľ čo čísla (ako predmet aritmetiky) chápal ako čisté produkty našej mysle (Gauss 1900, 200-201).[2]

Je možné pripísať niekomu aj štvrtú tézu? Ponajprv uvažujme, čo by znamenalo pokladať našu východiskovú otázku za zrozumiteľnú/zmysluplnú, ale odmietnuť (negovať) predloženú disjunkciu. Tu je zrejme mysliteľných viacero možností, ktoré však môžu pôsobiť (aspoň na prvý pohľad) dosť zvláštne. Napríklad niekto by mohol zastávať názor, že *tertium datur*, pričom týmto tretím je možnosť, že matematické objekty vznikajú „aj za prispenia" ľudí, t. j. nie sú to čisto ľudské, ale povedzme sčasti ľudské a sčasti božské výtvory, no takým spôsobom, že obidva typy „stvoriteľských" činností sú pre ich vznik, resp. „zotrvávanie v bytí" nevyhnutné. Pokiaľ však viem, tento možný variant štvrtej tézy nemá žiadneho známeho reprezentanta. (Ostatné variácie na túto tému ponechávam na fantáziu čitateľa.)

A nakoniec, čo by sa dalo predbežne povedať o piatej téze? Zdá sa, že najbližšie k takejto odpovedi by mohli mať filozofi pracujúci v duchu wittgensteinovskej filozofickej metódy (či skôr súboru metód). Mohla by to byť totiž jedna z tých otázok, ktorá nášmu

[2] Tézu, že niektoré matematické objekty sú reálne existujúce a niektoré sú (možno len) našimi výtvormi, resp. artefaktmi nášho jazyka, zvažuje u nás Ladislav Kvasz v rámci svojej originálnej koncepcie *inštrumentálneho realizmu*. Jeho systematická monografia o filozofii matematiky, ktorá nadväzuje aj na jeho články uverejnené v tomto časopise (Kvasz 2010; 2015), nebola pred dokončením tejto state ešte publikovaná.

mysleniu spôsobuje akýsi intelektuálny „kŕč“ a ktorá nás zavádza svojou formou k produkovaniu filozofických teórií, vysvetlení, argumentov, zatiaľ čo najprimeranejšou a najsprávnejšou reakciou by malo byť jej eliminovanie („rozpustenie“) poukázaním na jej nezmyselnosť. Samozrejme, tvrdiť jej nezmyselnosť a presvedčivo to preukázať – to môžu byť dve veľmi vzdialené veci.

Tieto nejasnosti by bolo treba odstrániť alebo do nich aspoň vniesť aké také svetlo. Keďže však hlavný zámer tohto článku nie je podávať historickofilozofický rozbor jednotlivých pozícií a detailne študovať všetky ich zákutia, nebudeme si nárokovať na posledné slovo v týchto interpretačných otázkach. Zároveň však už teraz priznávame, že nasledujúce časti budú významne inšpirované práve spôsobmi a metódami uvažovania, ktoré sú charakteristické pre Wittgensteinovu (neskoršiu) filozofiu.

Pri našom pokuse budeme vychádzať z „prirodzeného“ predpokladu, že matematika má svoje „objekty“, pričom budeme mať na mysli také veci ako čísla, množiny, geometrické útvary, funkcie, grupy atď. – t. j. to, čo by zrejme bolo našou prvou odpoveďou na otázku, čo je predmetom takých matematických disciplín, ako sú teória čísel, teória množín, geometria, teória funkcií, teória grúp atď. Chceme však zdôrazniť, že týmto automaticky neprijímame ani jednu z filozoficky vyhranených pozícií ohľadne „povahy matematických objektov“ – podobne ako si ani bežný človek iba s kusými poznatkami o ma- tematických disciplínach alebo nefilozofujúci matematik nevyhnutne neosvojuje žiadnu filozofickú „teóriu objektov“, keď sa sem tam vyjadruje o tom, čím sa zaoberajú príslušné matematické disciplíny.

Ak máme uvažovať o „vytváraní“, resp. o „objavovaní“ matematických objektov, bolo by dobré uviesť nejaké konkrétne príklady. Cieľom nasledujúceho výkladu nebude sledovať zakaždým celú príslušnú sériu udalostí v dejinách matematiky ani podrobne vysvetľovať všetky matematické aspekty daných príkladov. Pre náš účel postačí, ak na základe nášho opisu dostatočne vystúpia do popredia tie aspekty našich príkladov, ktoré dokážu vniesť svetlo do spôsobov, akým môžeme v matematike (alebo aj mimo matematiky) hovoriť o objavovaní, resp. vytváraní matematických objektov.

Ako prvý príklad nám poslúži „objav iracionálneho čísla“. Predstavme si, že naša situácia je situáciou starogréckych matematikov povedzme približne z obdobia Euklidovho života. Pracujeme iba s celými (kladnými) číslami a pri svojich úvahách využívame kladenie týchto čísel do rôznych pomerov. Hovoríme tiež o geometrických útvaroch, ako sú úsečky, kružnice, trojuholníky atď., dokazujeme ich vlastnosti a možnosti ich konštrukcie pomocou (neoznačeného) pravítka a kružidla. Skúsme sa teraz zamyslieť nad tým, ako by sme v tejto našej situácii mohli vyhodnotiť udalosť, ktorá sa v dejinách matematiky označuje ako „objav nesúmerateľnosti“. Pridržme sa toho najjednoduchšieho prípadu: predstavujme si pritom jednotkový štvorec a aplikáciu Pytagorovej vety na jeho uhlopriečku, čo nás následne môže priviesť k známemu dôkazu sporom o nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky. Dajme tomu, že tento dôkaz nás presvedčil o tom, že nie je možné nájsť žiadny pomer dvoch čísel, ktorý by sa dal pripísať uhlopriečke nášho štvorca tak, ako sme pripísali jednotku každej jeho strane. Aký záver z toho teraz môžeme vyvodiť? Jedna možnosť: Usúdime, že neexistuje ani jedna taká aritmetická veličina, ktorá by sa dala použiť na stanovenie dĺžky uhlopriečky. Ak by bola dĺžka iba to, čo sa udáva v číslach, resp. v pomeroch čísel, naša uhlopriečka (pri stanovenej jednotke) by nemala dĺžku. Predstavme si však teraz iný vývoj udalostí: Čo ak by to bolo tak, ako sa to často uvádza v textoch o dejinách matematiky, totiž, že starí Gréci naozaj „objavili existenciu iracionálnych čísel“. Čo nám vôbec umožňuje charakterizovať túto situáciu týmto síce historicky neadekvátnym, no predsa len nesporne zrozumiteľným spôsobom? Odpoveď je celkom ľahká: Keď sa pozeráme späť na antickú matematiku, zasadzujeme to, o čom hovoria antické texty, do nášho systému čísel. Z tohto pohľadu, samozrejme, môžeme „vidieť“, ako Hippasos z Metapontu (alebo nejaký iný pytagorejec) takpovediac nič netušiac narazil na čosi, na čo pri istých úvahách naraziť „musel“, pretože $\sqrt{2}$ je predsa úplne legitímnym obyvateľom ríše reálnych čísel (ktorými v matematike odmeriavame dĺžky úsečiek a kriviek). To, že Hippasos o existencii tohto obyvateľa (a jemu podobných iracionálnych spoluobčanov) netušil, nie je vina týchto čísel; na vine je obmedzenosť starogréckej aritmetiky. To isté by sme mohli povedať o matematikoch polovice 19. storočia, ktorí netušili, že existuje nekonečne veľa transfinitných kardinálnych a ordinálnych čísel, keďže ich G. Cantor objavil až v druhej polovici toho istého storočia.

Aby táto situácia s objavovaním nadobudla ostrejšie hrany, bude vhodné uviesť jeden menej známy príklad „objavu“ nového matematického objektu, Diracovej „delta-funkcie“ (v súčasnej matematike a fyzike ide o veľmi známy a veľmi užitočný objekt). Pre naše účely si môžeme históriu matematiky v tomto ohľade opäť zjednodušiť: nebudeme zohľadňovať všetkých matematikov od začiatku 19. storočia, ktorých kroky možno retrospektívne interpretovať ako blíženie sa k definícii objektu, ktorý ako prvý pomenoval P. Dirac vo svojich *Princípoch kvantovej mechaniky* (1930). O akom novom objekte to teda hovorí Dirac? Dirac ako fyzik naráža pri výklade matematického aparátu kvantovej mechaniky na určitý technický matematický problém týkajúci sa istého typu nekonečien. Aby tento problém zvládol lepšie, rozhoduje sa „zaviesť“ (*introduce*) určitú novú „veličinu“ (*quantity*) – $\delta(x)$ –, ktorú nazýva „δ-funkcia“. Má to byť funkcia, ktorá spĺňa tieto podmienky:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$
$$\delta(x) = 0 \text{ pre } x \neq 0$$

Zjednodušené názorné vysvetlenie tejto funkcie by mohlo vyzerať takto: Predstavme si reálnu funkciu reálnej premennej x, ktorá je definovaná na reálnych číslach a ktorej funkčná hodnota je nula pre všetky x okrem $x = 0$ (to hovorí druhá podmienka). Aká je jej hodnota v bode $x = 0$? O tom Dirac nič bližšie nehovorí, k dispozícii už máme len jeho prvú podmienku, ktorá (prerozprávaná do názornejšieho jazyka) znamená, že obsah plochy ohraničenej x-ovou osou a krivkou, ktorá je grafom δ-funkcie, je rovný obsahu jednotkového štvorca, čiže 1. Pravdaže, ak si to predstavíme, znie to absurdne. Nech už by bola funkčná hodnota našej δ-funkcie pre argument $x = 0$ akákoľvek (napr. nech $\delta(0) = 5$ alebo nech $\delta(0) = 10^{100}$), nie je predsa možné, aby medzi jej grafom a x-ovou osou bola plocha rovnajúca sa ploche jednotkového štvorca. Graf našej funkcie predsa splýva až na jediný bod s x-ovou osou, takže plocha medzi nimi musí byť nulová!

Dirac však našej predstavivosti pomáha nasledujúcim obrazom: Predstavme si nejakú inú funkciu, ktorá je „podobná“ našej delta-funkcii, a to v tom, že 1. aj ona je definovaná na reálnych číslach, 2. aj jej funkčná hodnota je takmer všade nula. Na rozdiel od grafu delta-funkcie však graf tejto funkcie v tesnej blízkosti bodu $x = 0$ (napr. v intervale (-1/3, 1/3)) tvorí malý „kopček“, ktorého plošný obsah je zhodou okolností rovný ploche jednotkového štvorca. Ak si vieme bez problémov predstaviť nejakú takúto funkciu, tak nám zrejme nebude spôsobovať problémy predstaviť si ďalšiu podobnú funkciu, ktorá sa od predchádzajúcej líši len tým, že interval, na ktorom graf tejto funkcie tvorí „kopček“, je kratší (povedzme, (-1/100, 1/100)), pričom však obsah kopčeka je stále rovný jednej. Samozrejme, to sa dá docieliť iba tak, že tento druhý kopček bude podstatne vyšší, v skutočnosti sa už bude skôr podobať na akúsi značne dlhú ihlu. Ďalším skracovaním intervalu (pri zachovaní podmienky rovnakého jednotkového obsahu príslušnej plochy pod grafom) môžeme prísť k ďalším a ďalším funkciám – hrot pomyselnej ihly bude pritom musieť rásť do závratných výšok. Ako nám to objasňuje povahu našej delta-funkcie? Nuž, Diracova delta-funkcia je akási „limitná“ funkcia tých predchádzajúcich funkcií, t. j. je to tá funkcia, ktorú dostaneme, keď interval zúžime až na jediný bod ($x = 0$), zatiaľ čo hrot ihly, t. j. funkčná hodnota v bode $x = 0$, vystrelí až do nekonečna.

Ak si stále myslíte, že Diracova delta-funkcia je podivná a podozrivo vyzerajúca funkcia, sám Dirac vám dáva za pravdu. Oplatí sa dlhší citát z jeho diela: „$\delta(x)$ nie je funkciou premennej x podľa obvyklej matematickej definície funkcie, ktorá požaduje, aby funkcia mala určitú hodnotu pre každý bod definičného oboru. Je to niečo všeobecnejšie, čo by sme mohli nazvať ‚nevlastnou funkciou‘, aby sa ukázala jej odlišnosť od funkcií definovaných pomocou obvyklej definície. $\delta(x)$ teda nie je veličina, ktorá by sa dala vo všeobecnosti používať v matematickej analýze ako bežná funkcia, ale jej použitie treba obmedziť na isté jednoduché typy výrazov, v prípade ktorých je zrejmé, že nemôže vzniknúť žiadne protirečenie“ (Dirac 1958, 58).

Čo nové sme pre našu tému získali týmto príkladom? Na Diracovej „funkcii“ je zaujímavé to, že v čase, keď ju „zaviedol“, ešte neexistovala rigorózna matematická teória, ktorá by tomuto matematickému objektu a iným objektom tohto typu prideľovala systematické miesto v matematickom univerze. To sa stalo až o niekoľko rokov neskôr, keď predovšetkým L. Schwartz predložil tzv. teóriu distribúcií (resp. „zovšeobecnených funkcií“).

Porovnajme uvedené dva príklady matematických objektov: $\sqrt{2}$ a δ-funkciu. V obidvoch prípadoch máme – ako ľudia na začiatku 21. storočia – výhodu historickej retrospektívy. Ak sa trochu vyznáme v súčasnej štandardnej matematickej analýze, tak vieme, že obidva spomínané objekty majú svoje stabilné miesto – nevieme si predstaviť množinu reálnych čísel bez odmocniny z dvoch a množinu zovšeobecnených funkcií bez delta-funkcie. No pre tých z nás, ktorí nie sú zbehlí v teórii distribúcií, je tu predsa len rozdiel. $\sqrt{2}$ je relatívne známy objekt, takže keď čítame o pytagorejskej matematike, všetky výroky o nesúmerateľnosti nevyhnutne vnímame z perspektívy našej rozšírenej číselnej množiny. Skôr musíme vyvíjať značnú námahu na to, aby sme sa ako tak vžili („vmysleli“) do situácie starých Grékov, ktorí zastali pri nesúmerateľnosti istých geometrických útvarov a namiesto kooptovania nových čísel rozvinuli veľmi sofistikovanú „teóriu proporcií", ktorá umožnila s danými „iracionálnymi pomermi" exaktne pracovať. Aj keď nadobudneme serióznejšie znalosti o povahe starogréckej matematiky (ktoré nás uchránia pred hrubšími – a v lepšom prípade aj jemnejšími – anachronizmami, ktoré tu na nás na každom kroku číhajú), ťažko sa ubránime dojmu, že hoci Gréci, *striktne vzaté*, nehovorili o „iracionálnych číslach", predsa len o nich mnoho vedeli, hovorili o nich akoby bez toho, že by explicitne vedeli, že o nich hovoria. Gréci ich „svojím spôsobom" objavili – asi tak, ako Kolumbus Ameriku.

V prípade δ-funkcie – pokiaľ sme sa s ňou zoznámili len teraz – chýba práve táto schéma chápania v pozadí. To nám umožňuje vnímať Diracovo počínanie podstatne iným spôsobom. Oveľa viac sa nám môže natískať dojem určitej arbitrárnosti. Jednoducho, oveľa ľahšie (nezaťažení vedomosťami) pociťujeme nový prezentovaný objekt ako „konštrukt", čo neznamená nič iné ako „výtvor" s konotáciou arbitrárnosti. Sám Diracov spôsob vyjadrovania akoby potvrdzoval tento aspekt arbitrárnosti: Dirac hovorí o „zavádzaní novej veličiny" a o „poskytovaní novej notácie". V každom prípade 15. paragraf tretej kapitoly, v ktorom začína hovoriť o delta-funkcii, nepredkladá ako správu o objave nového matematického objektu. Tomu by sme však nemali prikladať príliš veľký filozofický význam. Jednoduchým vysvetlením môže byť to, že – ako sme už naznačili predtým – Dirac nebol prvý, kto uvažoval o takejto „funkcii" a kto podal jej definíciu (a sám Dirac o tom musel vedieť) (por. Lützen 1982, 126). Nech už však bola prehistória δ-funkcie akákoľvek, pravdou stále zostáva, že všetky tieto pokusy o jej definovanie a zavedenie od konca 19. až do tridsiatych rokov 20. storočia (vrátane Diracovho pokusu) boli z pohľadu súdobých štandardov matematiky „neobvyklé". A to je rozhodujúci bod, na ktorý sme sa snažili týmto príkladom poukázať. Mimochodom, pekným potvrdením toho, že Diracova delta-funkcia bola okolo roku 1930 matematikmi vnímaná ako „problematická entita", je ďalšie klasické dielo ranej kvantovej mechaniky – *Matematické základy kvantovej mechaniky* (1932) od J. von Neumanna. Von Neumann tu výslovne hovorí, že Dirac „fingoval (*fingierte*) existenciu takejto funkcie", a vzápätí detailne ukazuje, čo je možné matematicky dosiahnuť, „ak túto fikciu akceptujeme" (von Neumann 1932, 14). Von Neumann však tieto, ako ich nazýva, *„uneigentliche" Gebilde* („nevlastné" útvary) spomína len preto, aby nakoniec vyzdvihol svoj odlišný prístup k matematickej formulácii kvantovej mechaniky. Jeho cieľom je totiž vybudovať práve takú teóriu, ktorá sa bude pohybovať „v rámci všeobecne používaných matematických metód" (von Neumann 1932, 15).

Aké ponaučenie a aký záver vo vzťahu k našej východiskovej otázke plynie z predchádzajúcich dvoch príkladov z dejín matematiky? Kritik by mohol povedať, že z nich pre riešenie nášho *filozofického* problému neplynie vôbec nič. Je to nakoniec iba súbor (pomerne hrubých) informácií o dejinách matematiky. Čo by mohli *historické* výklady o tom, ako sa formovala matematika, povedať k riešeniu *systematického* filozofického problému? Nech už sa reálne k odmocnine z dvoch či k delta-funkcii dospelo akokoľvek (a nakoniec, aj historik matematiky musí uznať, že isté prvky v našej historiografii budú vždy chýbať, t. j. dejiny matematiky nebudú nikdy úplne presné a kompletné), príslušný historický výklad týchto udalostí operuje na inej úrovni, takže či už prijmeme *filozofickú* tézu o vytváraní, alebo tézu o objavovaní matematických objektov, nemôže dôjsť k sporu s históriou.

Výhoda takéhoto striktného postoja (ak to tak chceme brať) spočíva v tom, že naša otázka si zachová status *čisto* filozofickej otázky. Uvádzanie ďalších a ďalších historických poznatkov a historického kontextu je, pokiaľ ide o jej riešenie, irelevantné. A to isté vlastne platí aj o uvádzaní ďalších a ďalších matematických poznatkov – nijaké rozšírenie našich matematických vedomostí a zručností nemôže mať vplyv na jej riešenie. Nie je to totiž matematická, ale *filozofická* otázka.

V súvislosti s takýmto postojom však vyvstávajú otázky: Čo nám vlastne potom zostáva?; Aké prostriedky riešenia vlastne ešte môžeme použiť? Ak sme našu otázku dôkladne vyčistili od histórie matematiky aj od matematiky samotnej, možno sme dostali čistú filozofickú otázku, ale možno sme sa tým zároveň ocitli v podobnej situácii ako Kantov holub, ktorý si pri namáhavom lete vzduchom predstavoval, že vo vzduchoprázdne by sa mu lietalo ľahšie (Kant 1979, 61). Neocitli sme sa aj my týmto svojím postojom vo filozofickom vákuu?

Naša odpoveď na takto postavenú otázku v zásade znie: Áno, ocitli. Znamená to ale, že si v konečnom dôsledku hodláme privolať na pomoc dejiny matematiky, resp. matematiku samotnú? Nie celkom. Otázka, ktorú sme si položili na začiatku, nie je ani historická, ani matematická – je v pravom slova zmysle filozofická. To však znamená predovšetkým to, že jej zmysel ešte nie je jednoznačne stanovený, že na to, aby sme ju mohli tak či onak zodpovedať, musíme si vyjasniť, resp. stanoviť, čo presne sa pýtame, resp. čo by mohla naša otázka znamenať.

Ešte raz uvažujme o našich dvoch matematických objektoch. Čo by mohli znamenať tvrdenia o objavení odmocniny, čo nás zvádza k tomu, aby sme občas voľne hovorili o „objavení iracionálnych čísel“ pytagorejcami? Evidentne naša predstava, že títo naši matematickí predchodcovia narazili na nejaký netušený problém, ktorý sme my (presnejšie, matematici 19. storočia) „zhmotnili“ do podoby presne definovaného objektu. Ich problém pre nás vlastne nie je problémom; to, čo sa javilo Grékom ako isté obmedzenie, prekážka, sa nám javí zhmotnené do podoby štandardného matematického objektu, konkrétneho algebraického iracionálneho čísla. Pytagorejci teda, ak sa máme vyjadriť v tomto duchu, iracionálne číslo nevytvorili ani ho neobjavili, ale predsa naň narazili (a v tomto zmysle ho skôr objavili, než vytvorili). A z toho istého dôvodu môžeme povedať, že Karl Weierstrass a jeho kolegovia, ktorí v 19. storočí vybudovali rigoróznu teóriu reálnych číse, a teda rigorózne definovali aj to odmocninové, ich tiež „nevytvorili“, ale ich skôr novým (presnejším, systematickejším, úplnejším) spôsobom „objavili“. Ich definície predsa neprišli „z čista jasna“!

Prečo sme v predchádzajúcom odseku povedali, že zmysel našej otázky (ako otázky filozofickej) nie je ešte jasne vymedzený? Chceme tým povedať, že tí, ktorí si ju kládli (a pokúšali sa na ňu jednoznačne odpovedať), jej vlastne (dobre) nerozumeli? Odkiaľ berieme odvahu tvrdiť čosi také? Predovšetkým si musíme uvedomiť, že občas máme tendenciu klásť si otázky, ktoré používajú isté dobre známe slová v kontextoch, ktoré nie sú celkom zvyčajné, hoci sa z istých dôvodov zdajú oprávnené. Len čo však takúto otázku raz položíme (a vyžadujeme odpoveď áno – nie), často na prvý pohľad nevidíme dôležité konzekvencie, ktoré akceptovaním danej otázky vznikajú. Inými slovami, neuvedomujeme si hneď „záväzky“, ktoré tým na seba berieme a ktorých by sme možno chceli byť radšej ušetrení. Kladenie istých otázok ako zmysluplných a jednoznačne zodpovedateľných má svoje dôsledky. Tým, že sa pýtame na „vytvorenosť“, resp. „objavenosť“ matematických objektov, umiestňujeme ich do istého priestoru vytvoriteľných, resp. objaviteľných vecí – a ten má svoje pravidlá. Presnejšie, v našom jazyku používame slová ako „vytvoriť“ a „objaviť“ v niektorých kontextoch bez najmenšieho zaváhania. Keby žiadny takýto úplne neproblematický kontext neexistoval, boli by sme zrejme oveľa obozretnejší pri zavádzaní takýchto slov do nových (možno ešte problematickejších) kontextov. Prinajmenšom by nám chýbal ten bezprostredný pocit, že danému slovu rozumieme aj v novom kontexte (hoci niektoré dôsledky jeho zavedenia do tohto trochu nezvyčajného, kontextu ešte nemáme vyjasnené).

Nemusíme dlho hovoriť o tom, v akých kontextoch sa nám (v bežnom živote) použitie slov „vytvoriť“ a „objaviť“ javí ako neproblematické. Postačia dva príklady: Botanik objaví v amazonskom pralese rastlinu, ktorá ešte nikdy nebola opísaná. Niekto zadá umelcovi úlohu vytvoriť sochu (nejakej významnej osobnosti), ktorá bude väčšia než všetky existujúce sochy. V týchto prípadoch nebude nikto spochybňovať správnosť a zrozumiteľnosť použitia daných dvoch výrazov. Nikto ani nebude tvrdiť, že v spomenutých dvoch vetách by sme príslušné slová mohli zameniť, t. j. hovoriť o „objavení sochy umelcom“, resp. o „vytvorení rastliny botanikom“. To neznamená, že si v princípe nevieme takéto jazykové počínanie predstaviť. Vedeli by sme to (niekto by sa musel pousilovať viac, niekto menej), ale za bežných okolností to nerobíme. Aby sme naznačili, ako to myslíme, zoberme si ešte jeden príklad bežnej vety: „Podarilo sa mi vytvoriť vetu, ktorá obsahuje slovo ‚strom‘ vo všetkých pádoch“. Na prvý pohľad celkom jasné a neproblematické použitie slova „vytvoriť“. Ľahko si však vieme predstaviť takúto úvahu: Naozaj som danú vetu „vytvoril“? Nebola už v nejakom zmysle obsiahnutá v slovenskom jazyku predtým, než som ju vyslovil? Nie je to skôr tak, že som iba pomocou konkrétnych zvukov alebo konkrétnych atramentových stôp na papieri „zviditeľnil“ vetu, ktorá tu (v jazyku) už bola (aj keď to nik predo mnou ešte neurobil)? Nemohol by som teda (v tomto zmysle), resp. nemal by som skôr hovoriť, že som danú vetu objavil, a nie že som ju vytvoril? Atď.

Ako je to teda s „vytváraním“, resp. „objavovaním“ matematických objektov? Do akej miery je použitie týchto slov v tomto kontexte zrozumiteľné? Niekto by mohol povedať, že v predchádzajúcich (v zásade) neproblematických prípadoch sme mali dočinenia s (v zásade) neproblematickými entitami: s rastlinou, so sochou. Abstraktné entity matematiky sú však o čosi zložitejšie, preto sa vynárajú rôzne filozofické otázky. Ten, kto takto uvažuje, prijíma danú otázku ako niečo neproblematické; problém vidí skôr v nájdení správnej odpovede – podobne, ako keby niekto uvažoval o meraní výšky konkrétneho človeka a pyramídy: Tohto človeka, ktorý stojí vedľa mňa, zmeriam ľahko, mám meter a dotyčný je ochotný chvíľku postáť v pokoji. Naproti tomu v prípade pyramídy je to ťažšie a možno budem musieť vymyslieť nejaký nepriamy postup (napr. ako Táles). Podstata merania, mohli by sme povedať, je však v obidvoch prípadoch tá istá, v obidvoch prípadoch pripisujeme daným objektom nejakú výšku v tom istom zmysle.

Je tu však otázka, či aj v prípade hovorenia o vytváraní, resp. objavovaní na jednej strane matematických objektov a na druhej strane vecí, ako sú rastliny či sochy, hovoríme v tom istom zmysle. A ak nie, do akej miery sú si dané prípady použitia týchto slov významovo blízke? Ide o jemný, zanedbateľný posun, alebo ide – použijúc známy aristotelovský zvrat – o *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος*? A vieme vôbec do akého „rodu“, do akej oblasti tu vlastne prechádzame? Podľa akých pravidiel tu budeme posudzovať, či je niečo vytvárané, alebo objavované? Sú tieto pravidlá „dané“, alebo si ich skôr viac či menej vedome tvoríme *as we go along*?

Môže sa však zdať, že náš pôvodný *filozofický* problém sa nám tu vracia nedotknutý našimi úvahami, ktoré by sme nanajvýš mohli vnímať ako márny pokus trivializovať (čiže vlastne ignorovať) pôvodný seriózny problém. Môžu nám totiž namietnuť: Nám predsa nejde o to, či v nejakom zmysle môžeme zrozumiteľne *hovoriť* o matematických objektoch ako o vytváraných alebo objavovaných, nejde nám teda o to, aby sme (napr. poučení dejinami matematiky) vymedzili použiteľné spôsoby takéhoto hovorenia, ale ide nám o to, aby sme sa dozvedeli, ako je to s „ontologickým statusom“ matematických objektov: Jestvujú „osebe“ (a teda ich môžeme nanajvýš len objaviť/nájsť), alebo jestvujú len „pre nás“ (a teda vďaka nám, ako naše výtvory, konštrukty)?

A zdá sa, že aj Wittgenstein, ktorého spôsobom uvažovania sme sa nechali pri tomto probléme inšpirovať, odpovedá na našu pôvodnú otázku práve v duchu tohto rozlíšenia. Ustavične totiž zdôrazňuje, že v matematike nie sme objaviteľmi, ale vynálezcami. Podľa toho teda Wittgenstein zaujíma pozíciu, ktorá pritakáva jednej časti našej pôvodnej disjunkcie. Z tohto hľadiska sa radí medzi (ontologických) antirealistov vo filozofii matematiky. Ďalšie potvrdenie tohto záveru o povahe Wittgensteinovho postoja by sme mohli čerpať z jeho početných kritických poznámok na adresu platonizmu v matematike.

Takéto chápanie Wittgensteinovej pozície však má za následok značné problémy s celkovou interpretáciou jeho filozofickej pozície (myslíme tu predovšetkým na jeho metodologické poznámky ohľadne jeho vlastnej filozofie). Podľa dobre známych pasáží napr. z *Filozofických skúmaní* (por. Wittgenstein 1979, 74-79) cieľom filozofa nemá byť formulovanie a obhajovanie „filozofických téz“, ale naopak privodiť vyjasnenie tam, kde sme sa ocitli v tme (v dôsledku toho, ako sme filozofické otázky a tézy postavili), tam, kde sme sa takpovediac zaplietli do svojich vlastných jazykových pravidiel, tam nám má filozofická činnosť pomôcť rozpliesť uzly a priniesť mysleniu pokoj. Ako by mohlo byť toto všetko zlučiteľné so zaujatím a obhajobou antirealistického postoja (alebo realistického – to je v tomto ohľade vlastne jedno)? Je medzi Wittgensteinovou proklamovanou metodológiou a jeho vlastným filozofickým počínaním eklatantný rozpor? Máme si veci vysvetliť tak, že metodologické odporúčania (sebe samému) nakoniec Wittgenstein nebral až tak vážne? Alebo máme skôr formulovať záver, že Wittgenstein sa síce snažil postupovať v súlade s nimi, no niekedy jednoducho zlyhal, t. j. fakticky prešiel na stanovisko tých, ktorí predkladajú a obhajujú filozofické tézy?

Tejto problematike bolo v rámci dnes už v podstate neprehľadných wittgensteinovských štúdií venovaných množstvo článkov i celých monografií. My sa im na tomto mieste nehodláme venovať. Zdôrazňujeme, že naším cieľom nie je podrobná interpretácia Wittgensteinových filozofických poznámok – v našom chápaní sú jeho (vybrané) poznámky skôr nástrojom (vzorom, modelom, inšpiráciou, motiváciou) na riešenie filozofických problémov.

Náš postoj k zmienenému interpretačnému problému je však zhruba takýto: Sme presvedčení, že ak nie všetko, tak prinajmenšom veľká väčšina toho, čo Wittgenstein napísal hlavne vo svojom neskoršom období (t. j. približne od polovice 30-tych rokov), možno zosúladiť s jeho metodologickými maximami zo *Skúmaní*. Nebudeme však toto presvedčenie dokazovať, naznačíme len toľko, koľko je potrebné pre účely tohto textu.

Kľúčový postreh, ktorý vnáša svetlo do celej situácie, spočíva podľa nášho názoru v tom, že cieľ, ktorý má Wittgenstein pri svojom filozofovaní na mysli, možno dosahovať rôznymi spôsobmi, pričom niektoré z nich môžu byť mätúce, pretože vzbudzujú dojem upadnutia do starých (tradičných) filozofických koľají (predkladania a obhajovania filozofických téz a teórií). Konkrétne: Keď napr. Wittgenstein napíše, že matematik nič neobjavuje, na prvý pohľad to vyzerá, že jednoznačne vstupuje do tábora antirealistov (antiplatonistov). To je však podľa našej mienky iba zdanie. Podobné vyjadrenia nemajú pre Wittgensteina charakter filozofického záväzku voči určitej filozofickej téze (teórii), ale skôr charakter „didaktického dôrazu", resp. presunu dôrazu. Povedané jednoducho (a aplikujúc to na náš východiskový problém): Ak sme pri filozofovaní konfrontovaní s platonistickými filozofickými tézami, môžeme pre účely filozofického vyjasnenia formulovať ako isté skratky určité vety, ktoré vyzerajú ako (protichodné) tézy, no v skutočnosti sú to skôr sumarizujúce upozornenia určitého typu. Akého typu? Napríklad ak sa už chceme vyjadrovať o „matematických objektoch" jazykom „objavovanie verzus vytváranie", tak menej škody spôsobí (menej zavádzajúce bude), keď sa prikloníme k výrazu „vytváranie" než k výrazu „objavovanie". To však neznamená, že tým vypovedáme niečo „filozofické" (metafyzické) o povahe (poznávania) daných entít. Mohlo by sa pokojne stať, že v niektorých situáciách bude na rozohnanie filozofickej hmly užitočné pridržať sa skôr jazyka „objavovania" (napr. keby sme čelili filozofických tézam nejakého radikálneho matematického „voluntaristu") (por. Wittgenstein 1976, 142). Samozrejme, pointa nespočíva v tom, že mechanicky a bez ďalšieho rozmýšľania postavíme oproti jednej téze kvázitézu – formulovanie onej „kvázitézy" je len pripomienkou, upozornením alebo sumarizujúcim vyjadrením celého radu postrehov a úvah, ktoré sme k danej téme predtým formulovali. Nejde tu o to, že by sme si chceli vystúpením z rámca tradičných filozofických diskusií, napr. o matematických objektoch, ušetriť premýšľanie, naopak, chceme premýšľať možno ešte viac, ale novým spôsobom, spôsobom, ktorý prináša do centra pozornosti veci, ktoré v predchádzajúcich diskusiách zapadli, boli prehliadnuté alebo boli odsunuté bokom ako zdanlivo irelevantné.

Ako sme už povedali, v konečnom dôsledku nezáleží na tom, či je naša interpretácia dobrou interpretáciou Wittgensteinových zachovaných poznámok, resp. do akej miery je udržateľná, ale dôležité je skôr to, či je tento prístup k riešeniu (vyjasňovaniu) filozofických problémov funkčný a uspokojivý.

To, či je filozofovanie vo wittgensteinovskom duchu prínosné, či je súbor wittgensteinovských metód efektívny pri vyjasňovaní filozofických problémov, nespoznáme tak, že budeme interpretovať Wittgensteina (hoci aj to môže byť súčasťou tohto poznávania, najmä ak sa pritom kriticky a analyticky venujeme konkrétnym Wittgensteinovým postupom pri riešeniach konkrétnych problémov, a nielen textovej exegéze), ale skôr tak, že tieto metódy uplatníme na filozofické problémy, ktoré sú v centre našej vlastnej pozornosti, ktoré nás doslova ako filozofické problémy trápia.

V našom prípade sa teraz možno ukazuje, že sme nedospeli k želanému cieľu, keďže otázka, ktorú sme si na začiatku položili, sa nám vrátila: Ako je to teda s „ontologickým statusom" matematických objektov – jestvujú „osebe" (a teda ich môžeme nanajvýš len objaviť/nájsť), alebo jestvujú len „pre nás" (a teda vďaka nám, ako naše výtvory, konštrukty)? Je to teda tak, že všetky predchádzajúce úvahy nám v ničom nepomáhajú vyriešiť takto postavenú otázku? V istom zmysle je to tak. Predchádzajúce úvahy boli totiž skôr navádzacími prostriedkami, vďaka ktorým sme mali nahliadnuť, do akej miery je odpoveď na takto postavenú otázku **nedôležitá**, a to preto, lebo v tomto prípade nejde o konštatovanie (zistenie) „skutočného stavu vecí", ale v prvom rade o (implicitné) stanovenie istých (jazykových) pravidiel. Slová ako „objavovať", resp. „vytvárať" nemajú neproblematické (bezprostredne jasné) významy, keď ich aplikujeme na niečo také ako „matematické objekty". Samozrejme, to neznamená, že sa týmto slovám v tejto súvislosti musíme naveky vyhýbať. Môžeme ich používať, keď chceme položiť dôraz na istý aspekt našej matematickej praxe, na istý aspekt našej skúsenosti s „matematickými objektmi". Ak chceme ísť ešte o kus ďalej, môžeme: môžeme založiť istú novú „jazykovú hru", v ktorej týmto slovám explicitne pridelíme určité funkcie. Potom bude, pravdaže, veľa záležať od toho, aká bude pointa tejto novej jazykovej hry, aký z nej bude úžitok. Podľa toho by sme ju buď akceptovali, alebo odmietli.

Literatúra

BURGESS, J. P., ROSEN, G. (1997): *A Subject with No Object*. Oxford: Clarendon Press.

DEDEKIND, R. (1932): *Gesammelte mathematische Werke*. Dritter Band. Braunschweig: Verlag von F. Vieweg & Sohn.

DIRAC, P. A. M. (1958): *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press, fourth edition (first edition 1930).

EWALD, W. (2005): *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Volume II. Oxford: Clarendon Press.

FERREIRÓS, J. (2007): *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Basel; Boston, Berlin: Birhäuser, second revised edition.

GAUSS, C. F. (1900): *Werke*. Achter Band. Leipzig: Teubner.

HARDY, G. H. (2005): *A Mathematician's Apology*. University of Alberta Mathematical Sciences Society, first electronical edition (first edition 1940).

HARDY, G. H. (1929): Mathematical Proof. *Mind*, 38 (149), 1-25.

HERMITE, CH. (1905a): *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. Tome I. Paris: Gauthier-Villars.

HERMITE, CH. (1905b): *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. Tome II. Paris: Gauthier-Villars.

HEYTING, A. (1956): *Intuitionism. An Introduction*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

KANT, I. (1979): *Kritika čistého rozumu*. Bratislava: Pravda.

KVASZ, L. (2010): Penelope Maddyová medzi realizmom a naturalizmom. *Filozofia*, 65 (6), 522-537.
KVASZ, L. (2015): Šach ako metafora matematiky. *Filozofia*, 70 (3), 175-187.
LÜTZEN, J. (1982): *The Prehistory of the Theory of Distributions*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.
RUSSELL, B. (1903): *The Principles of Mathematics*. Cambridge: University Press.
VON NEUMANN, J. (1932): *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Verlag von Julius Springer.
WITTGENSTEIN, L. (1984): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Suhrkamp.
WITTGENSTEIN, L. (1979): *Filozofické skúmania*. Bratislava: Pravda.
WITTGENSTEIN, L. (1976): *Lectures on the Foundations of Mathematics*. Hassocks: The Harvester Press LTD.

Tento príspevok vznikol ako súčasť riešenia grantového projektu VEGA 1/0644/13 *Metafilozofia ako pragmatická analýza filozofických výpovedí*

Róbert Maco
Katedra filozofie a dejín filozofie
Filozofická fakulta Univerzity Komenského
Šafárikovo nám. 6
814 99 Bratislava 1
Slovenská republika
e-mail: robert.maco@uniba.sk