FILOZOFIA
Roč. 65, 2010, č. 6

PENELOPE MADDYOVÁ MEDZI REALIZMOM A NATURALIZMOM

LADISLAV KVASZ, Katedra filozofie FF KU, Ružomberok

KVASZ, L.: Penelope Maddy between Realism and Naturalism
FILOZOFIA 65, 2010, No 6, p. 522

Mathematics is often interpreted as an apriori discipline whose propositions are analytic. The aim of the paper is to support a philosophical position which would view mathematics as a discipline studying its own segment of objective reality and thus contributing to our knowledge of the real world. The author tries to articulate in more details such a position which has been proposed recently by Penelope Maddy.

Keywords: Philosophy of mathematics – Realism – Naturalism

Realizmus vo filozofii matematiky je stanovisko, podľa ktorého matematika skúma určité (abstraktné) objekty podobne, ako prírodné vedy skúmajú predmety materiálneho sveta.[1] Tvrdenia matematiky sú pravdivé vtedy, ak verne opisujú vlastnosti týchto abstraktných objektov, podobne, ako tvrdenia prírodných vied sú pravdivé vtedy, ak verne opisujú vlastnosti materiálnych predmetov. Táto pomerne priamočiara pozícia sa pod názvom platonizmus zrodila v antike, v implicitnej podobe tvorí filozofické východisko Euklidových *Základov*[2] a od Euklidových čias veľkej časti matematickej praxe. Väčšina matematikov dnes formuluje svoje tvrdenia ako vety opisujúce vlastnosti a vzťahy skúmaných objektov. Jedným z nedávnych pokusov o artikuláciu matematického realizmu je pokus Penelope Maddyovej v knihe *Realism in Mathematics* [12]. Kniha vyvolala kritiku ([11]; [1]; [19]; [3]), pod tlakom ktorej Maddyová matematický realizmus opustila a vo svojej neskoršej knihe *Naturalism in Mathematics* [13] podrobila svoju predošlú pozíciu prísnej kritike.

Cieľom tejto state je načrtnúť stratégiu, ako Maddyovej matematický realizmus ochrániť ako pred argumentmi jej kritikov, tak aj pred námietkami samotnej autorky. Pôvodná verzia matematického realizmu, ktorú roku 1990 Maddyová predložila, má nedostatky. Zdá sa však, že tieto nedostatky nemajú takú povahu, ako tvrdia kritici. Podľa mňa nedostatkom realizmu Maddyovej bolo to, že bol ahistorický. Preto namiesto ústupu od ma-

[1] Predmetom tejto state je výlučne realizmus vo filozofii matematiky. Preto keď v ďalšom texte niekedy prívlastok „*vo filozofii matematiky*“ kvôli plynulosti textu vynechám, prosím čitateľa, aby si ho v duchu doplnil.

[2] Treba však priznať, že medzi filozofiou Platóna a matematickou praxou existuje určité napätie. Matematici rozumejú svojim objektom operacionálne: Hovoria, že trojuholníky konštruujú, čísla násobia, čo podľa Platóna nie je možné. Toto napätie však nič nemení na skutočnosti, že matematici chápu objekty, o ktorých hovorí matematika, ako reálne existujúce a tvrdenia matematiky považujú za pravdivé výpovede o týchto objektoch.

tematického realizmu sa pokúsim zasadiť ho do historického kontextu a v tejto pozmenenej podobe obhájiť. Predkladaná stať má štyri časti. V prvej časti načrtnem pozíciu Maddyovej matematického realizmu. V druhej uvediem hlavné argumenty proti tejto pozícii vrátane argumentov z jej knihy [13]. V tretej časti ukážem, ako možno pozícii matematického realizmu dať plauzibilnejšiu podobu. Vo štvrtej časti sa pokúsim ukázať, že táto nová forma matematického realizmu dokáže ustáť námietky kritikov.[3]

1. Maddyovej realizmus v matematike [12]. Maddyová založila pozíciu matematického realizmu na troch argumentoch, ktoré sa dopĺňajú a spoločne umožňujú vytvoriť realistický výklad celej matematiky. Jeho východiskom je Quinov-Putnamov argument založený na nepostrádateľnosti. Podľa Maddyovej z roku 1990 (a v tomto bode neskôr zmenila názor) argument založený na nepostrádateľnosti poskytuje zdôvodnenie realistického stanoviska pre disciplíny vyššej matematiky od analytickej geometrie cez diferenciálny a integrálny počet po funkcionálnu analýzu. To sú disciplíny, ktoré moderná veda reálne používa (a keďže moderná matematika tieto disciplíny formuluje v jazyku teórie množín, dostávame zdôvodnenie realistického stanoviska pre časť teórie množín). Podľa Maddyovej však argument založený na nepostrádateľnosti nie je vhodný na zdôvodnenie elementárnej matematiky[4] (počty či elementárna geometria). Počty Maddyovej považuje za *teóriu „malých“ množín* (množín s menej než povedzme 10^{100} prvkami) a tvrdí, že ich možno zdôvodniť bezprostredne, na základe intuície. Quinov-Putnamov argument nie je vhodný ani na zdôvodnenie *„vyšších partií teórie množín“* (napríklad teórie veľkých kardinálov), ktoré Quine explicitne z oblasti platnosti svojho argumentu vylučuje.

Maddyovej prínos spočíva v tom, že Quinov-Putnamov argument založený na nepostrádateľnosti doplnila kognitívno-psychologickou teóriou, zdôvodňujúcou realistický status „malých množín“, a na základe Gödelových poznámok rozpracovanou argumentáciou v prospech realizmu v oblasti „vyšších partií teórie množín“. Tieto argumentačné stratégie (kognitívno-psychologická pre elementárnu teóriu množín; quinovsko-putnamovská pre *„stredné partie teórie množín“*, t. j. veľkých konečných množín s viacej než 10^{100} prvkami a nekonečných množín kardinalít povedzme do alef 5, a gödelovská pre vyššie partie teórie množín) sa navzájom podporujú a spolu tvoria ucelenú stratégiu realistického výkladu celej teórie množín. Než pristúpim ku kritike týchto názorov, stručne ich vyložím.

1.1 Quinov-Putnamov argument založený na nepostrádateľnosti. V stati *On what there is* z roku 1948 Quine píše: *„Platónska ontológia tohto druhu je z hľadiska prísne fyzikalistickej konceptuálnej schémy mýtom do tej istej miery, do akej je mýtom samotná fyzikalistická konceptuálna schéma pre fenomenalizmus. Tento vyšší mýtus je naopak dobrý a užitočný, pretože zjednodušuje náš výklad fyziky. Keďže matematika je*

[3] Stať nadväzuje na [10] a je prípravou na systematické rozpracovanie matematického realizmu. Reakciu na pripomienky J. Peregrina zo [16] uvediem až v pripravovanej systematickej štúdii.

[4] Tu Maddy preberá a rozpracúva starší argument Charlesa Parsonsa [15], ktorý ako prvý upozornil na skutočnosť, že argument založený na nepostrádateľnosti nedokáže objasniť samozrejmosť elementárnej matematiky.

jeho súčasťou, jeho užitočnosť pre fyziku je dostatočne evidentná" ([18], 33 – 34). Podľa Quina Carnap používal dvojité štandardy keď vyhlasoval, že otázky matematickej existencie sú lingvistické a konvenčné, kým otázky fyzikálnej existencie sú vedecké a skutočné. Podľa Quina medzi týmito disciplínami neexistuje ostrá hranica, a preto nie je možné rozlišovať ani ich ontologické nároky. Podobnú myšlienku vyslovil Putnam: „... *matematika a fyzika sú integrované do takej miery, že nie je možné byť realistom v prístupe k fyzikálnej teórii a nominalistom v prístupe k matematickej teórii*" ([17], 74). Ak teda chceme zastávať realistické stanovisko vo fyzike, nezostáva nám iné východisko ako akceptovať ontologické záväzky, ku ktorým nás fyzikálne teórie zaväzujú, a okrem teoretických entít pripísať realistický status aj matematickým entitám, ako sú Hilbertove priestory, spektrá operátorov či reprezentácie grúp.

1.2 Maddyovej psychologický výklad elementárnych partií teórie množín. Quinov-Putnamov argument nepostrádateľnosti môže poskytnúť realistický výklad objektov vyššej matematiky, ale pre objekty elementárnej matematiky sa nezdá byť vhodný. Preto Maddyová pre objekty elementárnej matematiky rozpracovala realistický výklad založený na poznatkoch neurologických výskumov vnímania, podľa ktorých sa človek naučí rozpoznávať určitú črtu svojho okolia vtedy, keď sa mu v mozgu nakonfiguruje určitý súbor navzájom zladených neurónov, ktorý sa odborne nazýva *neurálny detektor* danej črty. Za normálnych okolností je aktivácia detektora kauzálne spojená s prítomnosťou príslušnej črty v okolí, takže z aktivácie detektora možno usudzovať na reálnu prítomnosť príslušnej črty. Maddyová argumentuje, že napodmieňovaním špecifických detektorov sa učíme počítať a naše mentálne stavy sú kauzálne spojené s prítomnosťou zodpovedajúcich objektov, v tomto prípade malých množín predmetov v našom okolí. Maddyová píše: „*Predstavme si príklad: Steve potrebuje podľa istého receptu dve vajíčka. Kartón s vajíčkami, ktorý vybral z chladničky, je zlovestne ľahký. Otvorí kartón a s úľavou zbadá, že v ňom má tri vajíčka. Tvrdím, že Steve vnímal množinu troch vajíčok. Podľa práve načrtnutého výkladu vnímania je nevyhnutné, aby v kartóne bola množina troch vajíčok, aby Steve získal o nej perceptuálne presvedčenie a aby sa množina vajíčok podieľala na vytvorení tohto perceptuálneho presvedčenia rovnako, ako sa moja ruka podieľa na vytvorení môjho presvedčenia, že mám pred sebou ruku, keď sa na ňu pozerám v dobrom svetle*" ([12], 58).

Maddyová uvádza výskumy Piageta a jeho pokračovateľov, ktoré svedčia o tom, že proces, v ktorom si dieťa osvojuje počítanie, možno interpretovať ako vytvorenie „***neurálneho detektora množín***". Práca tohto detektora vedie k vytvoreniu radu intuícií a presvedčení spojených s množinami. Zakotvenie matematických intuícií v práci detektora, a nie bezprostredne v skúsenosti, vysvetľuje, prečo sú matematické intuície nezávislé od konkrétnych faktov, pomocou ktorých sa s danou oblasťou matematiky oboznamujeme. Keď sa správne vytvorí príslušný detektor, konštituuje sa aj príslušný súbor intuícií. Podľa Maddyovej sa teda elementárna matematika rodí v priamom kontakte s naším okolím. Jej princípy sú intuitívne presvedčenia generované príslušným neurálnym detektorom. Ich existencia je analogická našim intuitívnym presvedčeniam, ktoré spájame s makroskopickými telesami. Preto malé množiny existujú v našom okolí rovnako ako stoličky či stoly.

1.3 Maddyovej gödelovský výklad vyšších partií teórie množín. Kým realistický status malých množín opiera Maddyová o psychológiu a realistický status nekonečných množín niekoľkých najnižších kardinalít zakladá na argumente založenom na nepostrádateľnosti, realistický výklad vyšších partií teórie množín opiera o argument, ktorým sa Kurt Gödel snažil zdôvodniť pravdivosť axiómy postulujúcej existenciu vyšších kardinálov: „*Môžu existovať axiómy s takým množstvom verifikovateľných dôsledkov, vrhajúce toľko nového svetla na celú disciplínu a poskytujúce tak silné metódy na riešenie problémov..., že nezávisle od toho, či sú, alebo nie sú intuitívne, budú musieť byť akceptované prinajmenšom v tom zmysle, v akom je akceptovaná ľubovoľná etablovaná fyzikálna teória*“ ([4], 477). Tento argument hovorí, že tak, ako vo fyzike prijímame existenciu polí a častíc (ktoré nemôžeme bezprostredne evidovať) preto, lebo ich zavedenie umožní vysvetliť množstvo experimentálnych faktov, aj v teórii množín môžeme akceptovať existenciu veľkých kardinálov na základe toho, že ich zavedenie umožní dokázať množstvo zaujímavých tvrdení v samotnej matematike.

2. Kritika matematického realizmu. Maddyovej teória sa v krátkom čase dočkala zásadnej kritiky. Pod jej vplyvom Maddyová svoju pozíciu opustila, a dokonca sa pridala ku kritikom. Preto stručne uvediem hlavné argumenty kritikov.

Penelope Maddy

2.1 Argumenty Shaughana Lavina. Lavine v recenzii [11] formuluje niekoľko námietok, z ktorých uvediem dve najdôležitejšie. Prvou z nich je *nejednoznačnosť intuícií spájaných s množinami*. Prejavom tejto nejednoznačnosti je konflikt týkajúci sa axiómy výberu. Maddyová tento konflikt medzi Zermelom na jednej strane a Bairom, Borelom a Lebesguom na strane druhej vysvetľuje tým, že existujú dva rozdielne pojmy súboru: matematický a logický. Zermelo mal pri diskusii na mysli matematický pojem súboru (množinu, t. j. ľubovoľný bezosporný súbor objektov), kým jeho oponenti používali logický pojem (triedu, t. j. súbor objektov spadajúcich pod určitý pojem). Lavine upozorňuje na nekompatibilitu tohto vysvetlenia s psychologickým výkladom pôvodu množinových intuícií v perceptuálnej skúsenosti s malými súbormi objektov. Ak Maddyová chce naozaj zaviesť odlíšenie intuícií spojených s množinami od intuícií spojených s triedami (ako to robí pri vysvetlení konfliktu týkajúceho sa axiómy výberu), musí vysvetliť, ako pri pohľade na súbor predmetov zistíme, či vidíme triedu, alebo množinu, a ako tieto rozdiely vo vnímaní množín a tried (či medzi neurálnym detektorom množín a neurálnym detektorom tried) zakladajú intuície v prospech, respektíve proti axióme výberu. A to je podľa Lavina beznádejný podnik.

Ako hlavnú námietku Lavine uvádza ***nemožnosť prepojenia našich intuícií týkajúcich sa množín s vyššou teóriou množín***. Všetky množiny, s ktorými máme bezprostrednú skúsenosť, sú konečné. Preto nemáme evidenciu, že nekonečné množiny majú výberové funkcie. Maddyová „*musí preto pripustiť, že jej výklad teoreticko-množinových intuícií je neúplný. Keďže chce podať naturalistický výklad intuície a keďže ľudská myseľ je konečná, tento výklad bude musieť vysvetliť, ako môžeme bezpečným spôsobom extrapolovať z našej skúsenosti s konečnými vecami na nekonečno*“ ([11], 326).

2.2 Argumenty Marka Balaguera. Balaguer v článku *Against (Maddian) Naturalized Platonism* zasadzuje Maddyovej koncepciu do kontextu platonizmu, pričom jej prístup označuje ako *naturalizovaný platonizmus*, podľa ktorého matematické objekty sú súčasne abstraktné i vnímateľné. Maddyová píše, že jej cieľom je „*odmietnuť tradičnú platónsku charakterizáciu matematických objektov... a priniesť ich do sveta, ktorý poznáme, a do kontaktu s našimi bežnými kognitívnymi schopnosťami*“ ([12], 48). Tradičný platonizmus považuje matematické objekty za abstraktné objekty mimo priestoru a času. Podľa Balaguera „*naturalizovať platonizmus, tým že prinesieme abstraktné objekty do časopriestoru, je to isté ako naturalizovať teizmus stotožnením Boha s Lincolnovým Tunelom. Tu nenaturalizujeme, ale opúšťame*“ ([1], 99). Takže prvá Balaguerova námietka je *problém časopriestorovej lokalizácie abstraktných matematických objektov*.

Podľa Balaguera sú na túto námietku možné dve odpovede, obe implicitne prítomné u Maddyovej. Prvou je ***hybridný platonizmus***, podľa ktorého *niektoré* množiny (nečisté množiny, t. j. množiny fyzických objektov, množiny množín fyzických objektov atď.) existujú v časopriestore, kým *iné* (čisté množiny, t. j. množiny iteratívnej hierarchie, vybudovanej z prázdnej množiny pomocou operácie potenčnej množiny) existujú mimo časopriestoru. Teória ZF je teóriou čistých množín a tie sú abstraktnými objektmi v tradičnom zmysle. Keď prijmeme hybridný platonizmus, môžeme vysvetliť, ako ľudské bytosti môžu získať poznanie o týchto objektoch. Najprv získajú perceptuálne poznanie o nečistých množinách, ktoré sú časopriestorovo lokalizované, a potom postúpia k poznaniu čistých množín pomocou teoretickej inferencie. Podľa Balaguera však táto cesta nefunguje, lebo ***nemôžeme vedieť, že nečisté a čisté množiny sú objekty rovnakého druhu***, že spĺňajú rovnaké axiómy. Keďže epistemický prístup máme iba k nečistým množinám, nemôžeme vedieť, či sú také isté ako čisté množiny.

Druhou alternatívou je ***fyzikalistický platonizmus***, podľa ktorého sú časopriestorovo lokalizované všetky množiny. Fyzikalistický platonizmus však nemôže zdôvodniť pravdivosť axióm, ako sú axióma nekonečna alebo axióma prázdnej množiny. Ako ďalší problém Balaguer uvádza problém odlíšenia množiny od matérie objektov, ktoré množinu tvoria, teda napríklad odlíšenie látky tvoriacej tri vajíčka v príklade uvádzanom Maddyovou od množiny troch vajíčok. Výklad tohto rozdielu pomocou neurálnych detektorov je kruhový, lebo vytvorenie takéhoto detektora *predpokladá*, že zmyslovo interagujeme s množinami, čo je práve problém, o ktorý ide. Preto sa dá povedať, že v prípade fyzikalistického platonizmu sa ***stráca rozdiel medzi množinou a jej fyzikálnym substrátom***.

2.3 Argumenty Adriana Riskina. Riskin si v stati *On the Most Open Question in the History of Mathematics: A Discussion of Maddy* všíma motiváciu celého projektu, ktorý Maddyová predkladá. Ukazuje, že napriek prihláseniu sa k naturalistickému programu Maddyová ostáva *v zajatí fundacionalizmu*. Svedčia o tom pasáže typu: *„Axiomatizácia teórie množín vytvorila škálu problémov, ktoré sú väčšmi otvorené než kedykoľvek v minulosti, t. j. problémov, ktoré na základe akceptovaných východísk disciplíny... nemožno ani dokázať, ani vyvrátiť. Z platónskej perspektívy existujú dobré dôvody veriť, že tieto otázky majú jednoznačné odpovede*" ([12], 32). Maddyová označuje hľadanie axióm, ktoré odrážajú skutočný stav vecí, za *„najdôležitejšiu súčasnú otvorenú otázku*"[5] filozofie matematiky. Jej program spočíva v hľadaní evidencie, ktorá umožní túto otázku rozhodnúť. Podľa Riskina teoreticko množinový fundacionalizmus vnucuje predpoklad, že by mala existovať iba jedna teória množín.

Maddyová považuje teóriu množín za posledného arbitra v otázkach existencie v matematike: „V tomto zmysle je teória množín poslednou inštanciou (the ultimate court of appeal) v otázkach o povahe matematických entít, t. j. v otázkach, ktoré filozofi nazývajú ontológia matematiky" ([12], 4). Tento fundacionalizmus typu „court of appeal" je v rozpore so skutočnou matematickou praxou. Matematika je plná neriešených problémov a iba veľmi zriedkavo si matematici myslia, že potiaže sú spôsobené nedostatočnosťou používanej teórie množín. Dva hlavné otvorené problémy sú Poincarého hypotéza a Riemannova hypotéza, ktoré boli roku 1994 otvorené už 89, respektíve 134 rokov. Zatiaľ nikto neprišiel s názorom, že by mohli nejako súvisieť s axiómami teórie množín. Skutočnosť je taká, že v oblastiach matematiky mimo teórie množín, všeobecnej topológie, analýzy a infinitárnej algebry žiadna posledná inštancia (ultimate court of appeal) neexistuje. Viera v existenciu jedinej teórie nie je zdieľaná ani v rámci samotnej teórie množín. Andrzej Mostowski napríklad píše: „Pravdepodobne v budúcnosti budeme mať zásadne rozdielne pojmy množín, podobne, ako máme rozdielne pojmy priestoru, a našu analýzu množín budeme zakladať na axiómach, ktoré budú v súlade s druhom množín, ktorý budeme chcieť skúmať... všetko v súčasnej práci na základoch teórie množín poukazuje na stav, aký som práve opísal" ([14], 94).

2.4 Argumenty Emily Carsonovej. Carsonová vo svojom článku *On Realism in Set Theory* formuluje námietky, ktoré sú príbuzné námietkam Lavina, len sú detailnejšie vyargumentované. Prvá námietka je namierená proti téze, že *sme schopní vnímať množiny*. Carsonová argumentuje, že podstatnou črtou množín, ktorou sa odlišujú od agregátov (zjednotenie matérie objektov tvoriacich množinu) a tried (súbory vyčlenené pomocou pojmov), je to, že množiny môžu byť prvkami iných množín, a to rozhodne nie je perceptuálna črta toho, čo vnímame. Pritom vlastnosť *byť schopný byť prvkom inej množiny* tvorí jadro teórie množín. Pokiaľ niekto neukáže, že sme schopní vnímať objekt s touto

[5] Názov Riskinovej state je ironickým odkazom na túto pasáž.

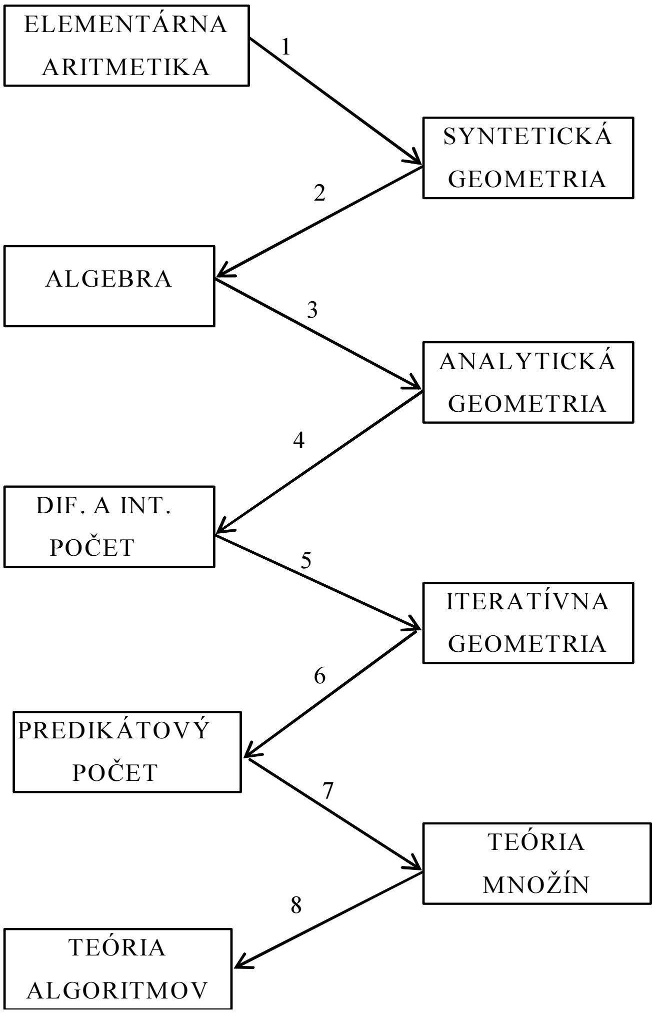
vlastnosťou, neukázal ani to, že vnímame množiny.

Ako druhý problém uvádza ***absenciu vysvetlenia vzťahu medzi vnímateľnými množinami a množinami postulovanými na teoretickej úrovni***. Maddyová zdôvodňuje našu vieru v pravdivosť niektorých axióm, napríklad axiómy dvojice alebo axiómy zjednotenia, našou skúsenosťou s malými (t. j. konečnými) množinami. Nie je však jasné, na základe čoho sme oprávnení preniesť tieto axiómy aj na (nekonečné) množiny postulované na teoretickej úrovni.

2.5 Argumenty Penelope Maddyovej podľa [13]. Pod vplyvom uvedenej kritiky Maddyová opustila matematický realizmus. V knihe *Naturalism in Mathematics* píše: „*V mojej práci z r. 1990 argumentujem, že máme perceptuálny prístup k jednoduchým numerickým faktom, napríklad ‚na stole sú tri jablká'. Nevidím žiadny dôvod vziať toto tvrdenie späť, avšak nasledujúce tvrdenie – že tieto fakty sú faktmi týkajúcimi sa množín... teraz odmietam*" ([13], 152). Vzdáva sa teda psychologického výkladu elementárnych partií teórie množín.

Okrem zavrhnutia pôvodnej pozície týkajúcej sa malých množín Maddyová uvádza námietky aj proti argumentu založenému na nepostrádateľnosti. Ako prvý príklad uvádza atómovú teóriu vo fyzike. Okolo roku 1900 atómová teória disponovala všetkými črtami, na základe ktorých je Quine ochotný priznať určitej entite realistický status (jednoduchosť, jasnosť princípov, šírka opísaných javov, plodnosť pri aplikáciách a súlad predpovedí s pozorovaním). Napriek tomu Duhem, Ostwald, Mach a Poincaré existenciu atómov odmietali. Až pokusy Jeana Perrina s Brownovým pohybom, uskutočnené v rokoch 1908 – 1911, sú považované za dôkaz existencie atómov. Teda v prípade fyzikálnych hypotéz sa vedci ***neuspokojujú s nepriamymi argumentmi***, ktoré tvoria jadro Quinovho-Putnamovho argumentu založeného na nepostrádateľnosti. Ako druhý príklad analyzuje Maddyová spôsob, ako vedci rozprávajú o matematike. Na príklade Feynmanových prednášok z fyziky ukazuje, že fyzici majú k matematickým konštrukciám, ktoré používajú vo svojich teóriách, ***rezervovaný postoj***. Predpoklady o súvislosti priestoru považujú za užitočné fikcie alebo za predbežné zjednodušenia a majú ďaleko od toho, aby im priznali realistický status. Preto na nich nemožno zakladať argument založený na nepostrádateľnosti. „*Skrátka, matematické existenčné predpoklady vo vede spolu s predpokladmi o štruktúre fyzikálnej reality a bežné fyzikálne predpoklady nie sú rovnocenné: Štandardy ich zavedenia sú mäkšie a úloha, ktorú hrajú v úspešných teóriách, nemá konfirmačnú silu; sú súčasne favorizované i trivializované. Problém je v tom, že táto epistemologická disanalógia podkopáva základy pôvodného quinovského argumentu*" ([13], 156). Maddyová opúšťa projekt matematického realizmu a nahrádza ho matematickým naturalizmom. Je to rozšírenie quinovského naturalizmu z vedy na matematiku.

3. Historizácia matematického realizmu. Zraniteľnosť Maddyovej matematického realizmu je dôsledkom jeho nedostatočného historického zakotvenia. Preto sa ho najprv pokúsim zasadiť do historického rámca vývinu matematiky. Nasledujúca schéma (prevzatá z [10]) zachytáva historickú postupnosť jednotlivých matematických teórií.



Historický kontext umožní spýtať sa v každej z troch častí Maddyovej argumentácie, ***kedy sa zrodila teória***, pre ktorú platí príslušný argument, a ***kedy sa zrodili prostriedky***, pomocou ktorých vedie svoju argumentáciu. Určenie týchto časových horizontov odhalí napätie skryté v jadre argumentácie. Na jednej strane sa teórie staré mnoho storočí zdôvodňujú prostriedkami, ktoré bolo možné sformulovať iba nedávno. Na druhej strane sa argumenty, platné celé tisícročia používajú na zdôvodnenie realistického nároku teórie, ktorá má iba sto rokov. Keď to, čo Maddyová chápala ako realistický výklad rôznych častí teórie množín (elementárnej, strednej a vyššej), vyložíme ako zdôvodnenie ***historicky rozdielnych vrstiev matematiky***, podarí sa jej argumenty preformulovať tak, aby odolali kritike.

3.1 Historizácia argumentu založeného na nepostrádateľnosti. Začnime Quinovým-Putnamovým argumentom založeným na nepostrádateľnosti. Keď sa na tento argument pozrieme z historickej perspektívy, uvidíme, že realistický nárok disciplín, ako je matematická analýza, sa odvodzuje z úspechov novovekej vedy. Avšak matematická analýza musela existovať už predtým, než na jej základe vznikla novoveká veda, a tá sa musela zrodiť skôr, než sa dostavili jej úspechy, ktorými Quine a Putnam zdôvodňujú realistický nárok tejto matematickej disciplíny. Keby Quinov duch mohol navštíviť Cavalieriho, Fermata, Wallisa, Barrowa, Newtona a Leibniza (ktorí boli presvedčení o realistickom statuse matematickej analýzy, ktorú spoločným úsilím vytvorili), mohol by im povedať niečo v tomto duchu: *„Milí kolegovia, vy si myslíte, že to, čo skúmate, skutočne existuje. Obávam sa, že vaše presvedčenie je úplne nepodložené. Ale nič si z toho nerobte a pracujte usilovne ďalej. Príde deň, keď na základe vašich výskumov vznikne moderná veda, ktorá bude predstavovať najspoľahlivejšiu formu poznania, akú budeme mať my, vaši potomkovia, k dispozícii. Po určitom čase táto veda zaznamená úspechy, ktoré podnietia zhruba o tristo rokov mňa a môjho kolegu Putnama, aby sme sformulovali správny argument podopierajúci vaše naivné a nepodložené presvedčenie o reálnej existencii toho, čo skúmate. Nebuďte sklamaní. Je to bežné, že matematici nerozumejú zmyslu toho, čo robia. Našťastie existujeme my, postanalytickí filozofi. Nezaujate a bez ilúzií dokážeme rozhodnúť, čo z toho, v čoho existenciu vy naivne veríte, aj skutočne existuje.*“

Túto pasáž som vložil do textu preto, lebo odráža jednu zvláštnu črtu analytickej filozofie: Jej snahu argumentovať mimo historického kontextu. Keď chceme nájsť adekvátnejšiu podobu argumentu založeného na nepostrádateľnosti, musíme ho zasadiť do historických súvislostí. Ak tak učiníme, nebude ťažké si uvedomiť, že nepostrádateľnosť matematiky pre novovekú vedu je dvojakého druhu. Jednak ide o ***formulačnú nepostrádateľnosť***, čo je podoba, v akej svoj argument formulujú Quine a Putnam: *Matematika je pri formulácii tvrdení súčasnej vedy nepostrádateľná, a tak musíme brať vážne ontologické záväzky tých matematických teórií, ktoré veda používa pri formulovaní svojich poznatkov*. Proti tejto forme argumentu sú námietky kritikov, medzi nimi aj Maddyovej, plne oprávnené. Ani samotní vedci neberú vážne ontologické záväzky matematických teórií, ktoré používajú pri formulácii svojich teórií. Preto filozof, ktorý sa z týchto záväzkov snaží vytvoriť argument v prospech matematického realizmu, sa pohybuje na tenkom ľade.[6]

[6] Jadro problému Quinovho-Putnamovho argumentu založeného na nepostrádateľnosti je v Quinovom chápaní vedy. Podľa Quina je veda pokračovaním bežného poznania makroskopických predmetov. Podľa mňa je tento pohľad chybný. Bagatelizuje intelektuálny výkon tvorcov novovekej vedy, akými boli Kopernik, Galileo, Kepler, Descartes či Newton. Pokračovaním bežnej skúsenosti je aristotelovská veda s nehybnou Zemou, s terminačným pojatím pohybu, so substančnou ontológiou, s internalistickým pojatím síl, s konečným univerzom vyplneným látkou. V každom z týchto aspektov sa Aristoteles pridŕža bežnej skúsenosti: Zeme, pohybujúcej sa závratnou rýchlosťou 30 kilometrov za sekundu (v porovnaní s tým sú autá Formuly 1 trápne pomalé), zotrvačného pojatia pohybu, formálnej ontológie, interakčného pojatia síl, nekonečného univerza umiestneného v prázdnom priestore – tým všetkým sa veda radikálne rozchádza s bežnou skúsenosťou. Veda ide proti bežnej skúsenosti. A na opustenie skúsenostného sveta potrebuje matematiku. Matematiku veda potrebuje ani nie tak kvôli presnosti (aj keď presnosť je dôležitá), ako kvôli kontraintuitívnosti svojich princípov. Matematika je zatiaľ jediný nástroj, ktorý umožňuje pracovať s faktmi, ktoré protirečia bežnej skúsenosti a na tejto skúsenosti založenej intuícii.

Ale okrem formulačnej nepostrádateľnosti existuje aj ***konštitučná nepostrádateľnosť***, podľa ktorej bola matematická analýza nepostrádateľná pre zrod vedy. Matematika je potrebná nielen na to, aby veda mohla formulovať svoje tvrdenia, ale aj na to, aby vôbec mohla existovať. Parafrázujúc Wittgensteina možno povedať, že zázračné nie je to, *aká* veda je, ale to, že vôbec *je*. Matematika je nepostrádateľná nielen pre to, aby veda bola taká, aká je (teda aby svoje tvrdenia formulovala v jazyku matematiky), ale aj preto, aby vôbec nejaká veda mohla existovať. Quine chápe vedu ako pokračovanie prirodzenej skúsenosti s materiálnymi predmetmi nášho okolia. Veda sa od bežného poznania líši iba tým, že pri formulácii svojich tvrdení používa presnejší jazyk matematiky a že svoje tvrdenia experimentálne testuje. Quine tak z vedeckej revolúcie akceptuje iba jej prvú, galileovskú vrstvu. Galileo vyslovil slávne slová o knihe prírody napísanej jazykom matematiky, teda úlohu matematiky chápal tak ako Quine a Putnam v ich argumente. Novoveká veda však nie je pokračovaním galileovského projektu. Galileovská veda nebola schopná opísať interakcie. Novoveká veda začala vtedy, keď sa Descartovi (a v nepomerne dokonalejšej podobe Newtonovi) podarilo opísať pôsobenie. Pôsobenie sa nedá objaviť empiricky, a preto sa o ontologickom statuse síl dlho viedla diskusia. Ale nech už sa v tejto diskusii postavíme na ktorúkoľvek stranu, faktom zostáva, že matematika je nepostrádateľná práve pri opise pôsobenia. O empirickom priestore si môžeme myslieť čokoľvek (môžeme napríklad pochybovať o jeho spojitosti, ako to robí Feynman), ale „*pravý, skutočný, matematický*“ priestor a čas sú pre fyziku nepostrádateľné, lebo iba diferenciálna štruktúra tohto priestoru a času umožňuje spájať diferenciály síl, posunutí a rýchlostí tak, aby spoločne vytvorili pohyb ako výsledok pôsobenia. To, čo Newton nazýva absolútnym, skutočným a matematickým časom a priestorom, je práve táto diferenciálna štruktúra, ktorá je pre fyziku nepostrádateľná.

Maddyovej argumenty, ktoré sme uviedli v časti 2.5, sa týkajú empirického, relatívneho, zdanlivého času a priestoru, o ktorých aj sám Newton tvrdí, že je možné, že neexistujú. Je možné, že všetky prírodné procesy (obehy planét, kmitanie kremíkových kryštálov či rozpad atómových jadier) sa zrýchľujú či spomaľujú a že vo vesmíre neexistuje žiaden proces, pomocou ktorého by bolo možné merať čas. Rovnako je možné, že všetky telesá vo vesmíre sa pohybujú so zrýchlením a nie je možné vymedziť inerciálnu sústavu. Preto Quine, Putnam, Maddyová z roku 1990 [12] a všetci, čo hľadajú oporu matematického realizmu v empirickom, relatívnom, zdanlivom čase a priestore, stavajú (dokonca aj podľa Newtona) na pochybných základoch. Ale napriek nesprávnosti formulačnej verzie argumentu založeného na nepostrádateľnosti je matematika pre fyziku nepostrádateľná. Samozrejme, nepostrádateľná diferenciálna štruktúra môže byť v teórii posunutá ľubovoľne hlboko. Za Newtonových čias mala fyzika iba dve úrovne opisu: opis javov a opis pôsobenia (t. j. úrovne, na ktoré sa viaže formulačná resp. konštitutívna verzia argumentu založeného na nepostrádateľnosti). Od tých čias sa však zrodila celá kaskáda čoraz hlbších a hlbších úrovní opisu (detaily možno nájsť v [8]). Keď sa opis pôsobenia prenesie na tú najhlbšiu úroveň, všetky vyššie úrovne sa môžu premeniť na empirické. Ale faktom zostáva, že v každej fyzikálnej teórii musí existovať základná úroveň opisu, ktorá je skúsenostnému testovaniu neprístupná. Je to úroveň, na ktorej funguje pohybová rovnica. Pri vytvorení tejto úrovne matematika vždy bola a bude nepostrádateľná.

Maddyová si dvojaký – empiricko-kritický a fundamentálno-dogmatický – typ rétoriky všimla aj u Feynmana ([13], 155). Keďže však vedu chápe v naturalisticky sploštenej podobe ako galileovskú (a teda čiste empirickú), nedokázala túto Feynmanovu ambiguitu vysvetliť a použiť na obranu tézy o realizme. Dve dikcie Feynmanovho textu zodpovedajú dvom vrstvám jazyka fyziky: deskriptívnej a konštitutívnej. Keď nahradíme argument založený na *formulačnej* nepostrádateľnosti argumentom založeným na *konštitutívnej* nepostrádateľnosti, dajú sa ontologické záväzky vyššej matematiky udržať.

3.2 Korekcia Maddyovej argumentu založeného na perceptuálnej evidentnosti. Keď sa z historického hľadiska pozrieme na Maddyovej argument založený na perceptuálnej evidentnosti, zistíme, že jeho chyba je v porovnaní s Quinovým-Putnamovým argumentom založeným na nepostrádateľnosti opačná. Kým Quine a Putnam úspechom *mladej* vedy obhajovali *staršiu* matematiku, Maddyová naopak argumentom, ktorý platil už v praveku, zdôvodňuje tvrdenia teórie množín, čo je teória, ktorá sa zrodila koncom 19. storočia. Tu preto netreba meniť Maddyovej *argument*, ale treba nájsť *teóriu*, ktorej realistické nároky jej argumentácia podopiera. Podľa mňa ***argument založený na perceptuálnej evidentnosti*** nepodopiera realistické nároky teórie množín (tá v praveku neexistovala), ale ***počtov*** (či elementárnej aritmetiky). Týmto smerom ustupuje aj Maddyová, keď naďalej trvá na perceptuálnej prístupnosti aritmetických tvrdení.[7]

Takto pomocou argumentu založeného na perceptuálnej evidentnosti možno podoprieť ontologické nároky prvých dvoch nástrojov reprezentácie: *elementárnej aritmetiky* a *syntetickej geometrie* [10]. Spolu s argumentom založeným na konštitutívnej nepostrádateľnosti (ktorý umožňuje podoprieť ontologické nároky *algebry*, *analytickej geometrie* a *diferenciálneho a integrálneho počtu*) tak máme realisticky vyloženú matematiku až po začiatok 19. storočia, keď sa začína (u Bolzana, Cauchyho, Dirichleta a Riemanna) rodiť teória funkcií reálnej premennej (v [10] uvedená ako iteratívna geometria).

3.3 Rozšírenie Maddyovej gödelovského argumentu založeného na užitočnosti. Ako tretí musíme historizovať argument založený na užitočnosti. Tento argument vychádza z matematickej praxe a nevyžaduje ani tak korekciu, ako skôr rozšírenie z teórie množín na ďalšie matematické teórie. Gödel tento argument sformuloval pre teóriu množín, lebo v tejto oblasti pracoval a snažil sa opísať princípy svojej práce. To, čo našiel, však platí všeobecne a možno to použiť na zdôvodnenie vyšších partií ľubovoľnej matematickej teórie od algebry či teórie funkcií reálnej premennej až po teóriu množín a teóriu algoritmov. Gödelov argument hovorí, že keď určitá matematická propozícia nie je evi-

[7] Skúsenostná báza, z ktorej vyrastá teória množín, má inú povahu ako skúsenosti s malými súbormi predmetov. Táto skúsenosť sa rodí v rámci teórie funkcií reálnej premennej (s ktorou pracovali Bolzano, Cantor aj Dedekind), kde sa pri konštrukcii určitých objektov nekonečne mnohokrát opakuje určitý iteratívny proces, až kým v limite vytvorí požadovaný objekt. Spočiatku sa iteratívne procesy používali v kontextoch, kde viedli k intendovaným objektom, a preto nevzbudzovali pozornosť. Zhruba od 30. rokov 19. storočia sa však začali hromadiť skúsenosti s tým, že iteratívny proces vedie ku kontraintuitívnym výsledkom. V snahe porozumieť iteratívnemu procesu matematici pristúpili k spredmetneniu jednotlivých krokov iteratívneho procesu. A tu niekde treba hľadať skúsenostné pozadie teórie množín.

dentná (a teda nemožno použiť argument založený na perceptuálnej evidentnosti) a nie je ani nepostrádateľná pre vedeckú prax, ešte stále môžeme odvodiť jej pravdivosť z jej užitočnosti pre matematickú prax.

Matematika však nie je monolit stojaci na jedinom reprezentačnom nástroji (či už logike, ako si to predstavoval Russell, alebo teórii množín, ako si to predstavuje Maddyová). Práve naopak, matematika sa vyznačuje pluralitou nástrojov. Užitočnosť matematiky môže mať rôzne podoby. Aby som ich mohol ilustrovať, zoberiem analytickú geometriu, teda štvrtý reprezentačný nástroj v dejinách matematiky. Propozície a princípy analytickej geometrie môžu mať päť rôznych typov užitočnosti:

a) ***Užitočnosť v predchádzajúcom jazyku rovnakého druhu*:** Pre analytickú geometriu je predchádzajúcim ikonickým jazykom syntetická geometria. Analytická geometria prináša klasifikáciu kriviek podľa stupňa polynómu, pomocou ktorého príslušnú krivku generuje. Túto klasifikáciu môžeme použiť na objasnenie vlastností kriviek, ako sú konchoida či cissoida, ktoré boli objavené už v antike v rámci syntetickej geometrie. Keď tieto krivky opíšeme analyticky, umožní to určiť rad ich vlastností, ktoré antickí geometri hľadali pomocou zložitých postupov syntetickej geometrie. Takto môže neskorší reprezentačný nástroj poskytnúť vhľad a porozumenie javom, ktoré boli objavené pomocou predošlého reprezentačného nástroja.

b) ***Užitočnosť v predchádzajúcom jazyku opačného druhu*:** Pre analytickú geometriu je predchádzajúcim symbolickým jazykom algebra. Analytická geometria priniesla vizualizáciu polynomických foriem, čím umožnila odpovedať na otázky, ktoré boli z čisto algebraického hľadiska nepochopiteľné. V určitých algebraických rovniciach sa pri riešení objavovali výrazy obsahujúce odmocniny zo záporných čísel. Pre matematikov 16. storočia to bol nepochopiteľný fakt. Analytická geometria umožnila túto skutočnosť vysvetliť. Rovnice vyjadrujú priesečníky kriviek a krachovanie algebraických postupov preto zodpovedá situácii, keď sa tieto krivky nepretínajú.

c) ***Užitočnosť v samotnej teórii*:** Existujú princípy, ktoré síce nie sú evidentné, ale majú dôležité aplikácie v samotnej teórii, ktorej sa týkajú. Elegancia dôkazov využívajúcich princípy duality je argumentom v prospech ich pravdivosti.

d) ***Užitočnosť v nasledujúcom jazyku opačného druhu*:** Pre analytickú geometriu je nasledujúcim symbolickým jazykom diferenciálny a integrálny počet. Problémy, ktoré sa prostriedkami daného reprezentačného nástroja dajú prirodzene sformulovať, niekedy vyžadujú v záujme ich riešenia rozšírenie jazykového rámca, ba dokonca vytvorenie nového reprezentačného nástroja. V prípade analytickej geometrie sa prirodzene vynára problém dotyčníc (úloha nájsť dotyčnicu k danej krivke v danom bode), problém rektifikácie (úloha nájsť dĺžku oblúka danej krivky) a problém kvadratúr (úloha určiť obsah oblasti ohraničenej krivkami). Riešenie týchto problémov sa však vymyká analytickej geometrii, čo podnietilo Newtona a Leibniza vytvoriť, nadväzujúc na Cavalieriho, Barrowa, Wallisa a iných, diferenciálny a integrálny počet. Užitočnosť a plodnosť uvedených problémov a na ich základe vytvoreného diferenciálneho a integrálneho počtu je argumentom v prospech reálnosti objektov, ktorých sa týkajú.

e) ***Užitočnosť v nasledujúcom jazyku rovnakého druhu*:** Pre analytickú geometriu je nasledujúcim ikonickým jazykom iteratívna geometria (často označovaná ako fraktálna geometria, aj keď termín iteratívna geometria je širší). Niekedy sa stáva, že reprezentačný nástroj pri konfrontácii s objektmi, ktoré pochádzajú z nasledujúcej oblasti opačného druhu, zlyháva. V snahe pochopiť príčiny zlyhania sa rodia zárodky nového reprezentačného nástroja rovnakého druhu. V prípade analytickej geometrie to bola diskusia vedená v rámci diferenciálneho a integrálneho počtu o kmitaní struny medzi Eulerom a d'Alembertom. Euler vyslovil tézu, že môžu existovať krivky, ktoré sa nedajú zapísať ako súčet sínusov a kosínusov (t. j. stojatých kmitov struny). Táto diskusia viedla cez Fouriera ďalej k prácam Dirichleta, Riemanna, Borela, Lebesguea, Baira a ďalších a napokon k zrodu nového reprezentačného nástroja (tzv. iteratívnej geometrie).

3.4 Náčrt novej formulácie matematického realizmu. Keď každý z Maddyovej argumentov zasadíme do historického kontextu, máme trojicu argumentov, ktoré umožňujú viesť argumentáciu v prospech matematického realizmu. Svojimi koreňmi siaha matematika k ***evidencii*** a argument založený na perceptuálnej evidentnosti umožňuje obhájiť realistický nárok teórií elementárnej matematiky. Matematika sa však nezastavuje pri tom, čo je evidentné, ale vytvára nástroje symbolickej a ikonickej reprezentácie (konštrukcie pomocou kružidla a pravítka, číselné sústavy), pomocou ktorých overuje propozície, ktoré už nie sú evidentné (podobne, ako veda siaha v analogických situáciách po experimente). Niektoré z týchto zložitejších propozícií sa môžu stať *nepostrádateľnými* pre (mimomatematickú) prax, napríklad pre štátnu správu (v starom Egypte a Babylone), staviteľstvo (v antickom Grécku a Ríme), navigáciu (v stredovekej Arábii) či vedu (v novovekej Európe). Pri stavaní kilometer dlhého tunela cez horu Kastro na ostrove Samos, kopaného z dvoch strán tak, že sa uprostred hory oba konce spoja, je geometria nepostrádateľná. Takto aj komplexné propozície môžu získať realistický status, lebo sú nepostrádateľné pri konštituovaní určitej praxe.

Matematika sa však nezastavuje ani na tomto mieste; a ako ukazuje Archimedov spis *O počte zŕn piesku*, nezastavuje sa na ňom už dobrých 2000 rokov. V tomto spise Archimedes ukazuje, že aritmetika dokáže vytvoriť číslo, ktoré je väčšie ako počet zŕn piesku na celej Zemi (získal ho vydelením objemu Zeme objemom piesočného zrnka). Tak veľké číslo (a vo všeobecnosti komplexné výrazy, vytvorené pomocou nástroja symbolickej reprezentácie) už nie sú nepostrádateľné pre nijakú mimomatematickú prax, lebo prekračujú jej medze. Matematika (a nielen počty, ako ukazuje Archimedes) dokáže prekročiť medze každej mimomatematickej praxe. A tu prichádza Gödelov argument založený na ***užitočnosti***. Matematické propozície, ktoré nie sú evidentné a ktoré prekračujú medze mimomatematickej praxe, si stále môžu činiť nárok na realistický status, ak sa ukážu ako užitočné pre prax samotnej matematiky.

4. Odpovede na kritiku matematického realizmu. V tejto časti sa pokúsim odpovedať na kritické námietky proti matematickému realizmu v tom poradí, v akom boli uvedené v druhej časti state.

4.1 Odpoveď na argumenty Shaughana Lavina. Keď sme Maddyovej teóriu zasadili do historického kontextu, vidíme, že Lavinove námietky sú plne opodstatnené. Skúsenosti s malými súbormi predmetov nezakladajú teóriu množín, ale elementárnu aritmetiku. Preto Lavine správne namieta, že tieto skúsenosti (a neurálny detektor s nimi spojený) nemôžu a ani nemusia rozlišovať medzi množinami a triedami. Niet ani dôvodu na to, aby od nich viedla cesta k vyššej teórii množín či k transfinitným množinám.

Na druhej strane si treba uvedomiť, že Lavinov argument vyvracia iba Maddyovej stotožnenie skúseností s malými súbormi predmetov s množinovou skúsenosťou. Podľa výkladu vývinu matematiky, na ktorom je založená táto stať, skúsenosti s malými súbormi zakladajú jazyk elementárnej aritmetiky, a nie teórie množín. Elementárnu aritmetiku oddeľuje od jazyka teórie množín šesť reprezentačných nástrojov. Každý z týchto nástrojov prináša vlastný druh symbolickej skúsenosti a na tejto skúsenosti založenú intuíciu. Tak namiesto potreby prepojiť skúsenosti s malými súbormi predmetov s vyššou teóriou množín, pred ktorou stojí Maddyová, musíme vyložiť sedem transformácií jazyka matematiky, ku ktorým v dejinách matematiky reálne došlo, až dospejeme k realistickému zakotveniu vyšších partií teórie množín. Jazyk elementárnej aritmetiky a jazyk syntetickej geometrie stále môžeme ontologicky zakotviť v predmetnej skúsenosti zhruba tak, ako to urobila Maddyová (mylne stotožniac elementárnu aritmetiku s teóriou množín). Ďalšie jazyky počínajúc algebrou, analytickou geometriou až po predikátový počet a teóriu množín získajú realistické zakotvenie sprostredkovane, cez predošlé jazyky, pričom proces sprostredkovávania je vyjadrený diagramom na začiatku tretej časti našej state. Keď dostatočne pochopíme transformácie jazyka matematiky, bude možné prepojiť transfinitnú teóriu množín s realitou. Na rozdiel od Maddyovej netvrdím, že s množinami máme bezprostrednú skúsenosť. Skúsenostná báza *teórie množín* pramení z logickej analýzy základov teórie *funkcií reálnej premennej*; táto teória skúsenostne vyrastá zo štúdia kriviek *analytickej geometrie* opísaných jazykom *diferenciálneho a integrálneho počtu*. Analytická geometria sa sprostredkovane, prostredníctvom jazyka *algebry* vzťahuje na geometrické formy nášho skúsenostného sveta.

4.2 Odpoveď na argumenty Marka Balaguera. Kým Lavinove námietky mierili na reálny problém Maddyovej výkladu, Balaguerove námietky sú divné. Tvrdiť, že abstraktné objekty existujú mimo času a priestoru, je absurdné. Čas a priestor sú predsa matematické konštrukty, teda abstraktné objekty. Predstava, že reálny svet existuje v čase a priestore, je dôsledkom nekritického stotožnenia žitého sveta so svetom fyziky. Časopriestor je abstraktná matematická entita a všetko, čo sa v ňom nachádza, sú abstraktné objekty. Svet fyziky sa v tomto ohľade nijako nelíši od sveta matematiky. Na Maddyovej umiestňovaní množín do časopriestoru nie je nič divné. Problém je len s bezprostrednosťou, s akou toto umiestňovanie spája. Transfinitné množiny nemožno vložiť do časopriestoru priamo, ale vyžaduje to sedem sprostredkujúcich medzistupňov.

4.3 Odpoveď na argumenty Adriana Riskina. Riskin poukázal na závažný nedostatok Maddyovej prístupu k realizmu. Ukázal, že jedným z jej motívov bol množinový fundacionalizmus, ktorý skresľuje celkový obraz. Keď sa fundacionalizmu zriekneme, môžeme sa ešte stále usilovať o vytvorenie realistického výkladu matematiky. Jeho ambície budeme (poučení Riskinom) formulovať skromnejšie než Maddyová. Myslím však, že občas je zmysluplné sledovať aj skromné ciele. Nemusí každý riešiť „*najvýznamnejší otvorený problém v histórii matematiky*“.

4.4 Odpoveď na argumenty Emily Carsonovej. Carsonová vo svojej kritike (správne) upozorňuje na Maddyovej neoprávnené stotožnenie skúsenosti s malými súbormi predmetov so skúsenostnou bázou teórie množín, ako aj na absenciu prepojenia medzi malými súbormi a nekonečnými množinami. Obidve tieto námietky sme už zodpovedali.

4.5 Odpoveď na argumenty Penelope Maddyovej z [13]. S Maddyovej korekciou psychologickej teórie percepcie malých súborov v tom zmysle, že tieto percepcie otvárajú prístup k numerickým faktom, a nie k množinám, možno iba súhlasiť. Ale napriek tomu možno na tejto teórii založiť realistický výklad elementárnej aritmetiky. Súhlasiť možno aj s kritikou Quinovho-Putnamovho argumentu založeného na nepostrádateľnosti. Dotýka sa však iba jeho formulačnej verzie, a tak v konštitutívnej verzii možno argument založený na nepostrádateľnosti naďalej používať. Preto si myslím, že Maddyovej opustenie matematického realizmu bolo predčasné a nezdôvodnené. Samozrejme, musíme sa vzdať snahy rozhodovať z filozofického „nadhľadu" otvorené otázky súčasnej matematiky. Ale ak sa vzdáme tohto fundacionalistického motívu, môžeme sa ešte stále pokúsiť vybudovať realistický výklad matematiky. Treba však prijať matematiku v jej plnej historickej komplexnosti a nesnažiť sa presekávať skratky od aritmetickej skúsenosti k vyšším partiám teórie množín.

5. Záver. Pozícia, ku ktorej sme dospeli, rehabilituje značnú časť Maddyovej teórie. Nie je však schopná splniť očakávania, ktoré Maddyová s matematickým realizmom spájala. Jej cieľom bolo poskytnúť vodidlo pri výbere z rady alternatívnych princípov, ktoré existujú v súčasnej teórii množín ako kandidáti na nové axiómy. Podľa obrazu matematiky, ktorý sme získali, je teória množín jedným z reprezentačných nástrojov matematiky, ktorý sa v ničom zásadne nelíši od ostatných nástrojov. Časť matematiky existuje nezávisle od nej. Teória veľkých kardinálov sa dnes nachádza tam, kde sa aritmetika veľkých čísel nachádzala za čias Archimeda, keď sa pre niektoré obzvlášť veľké čísla podarilo nájsť realistickú interpretáciu (v podobe počtu zŕn piesku na Zemi), pre iné však akákoľvek interpretácia chýbala. Neskôr diferenciálny a integrálny počet tieto problémy vyriešil, lebo pri limitných prechodoch potrebujeme ľubovoľne veľké čísla, a tak sa hranica, po ktorú majú čísla reálnu interpretáciu, vzdialila do nekonečna. Pre teóriu množín však dnes podobný, o štyri reprezentácie mladší jazyk (akým je pre aritmetiku jazyk diferenciálneho a integrálneho počtu) nie je k dispozícii, a preto hranica, po ktorú majú termy jazyka teórie množín reálnu interpretáciu, prebieha vo vnútri množinového univerza. Historická skúsenosť naznačuje, že táto hranica sa bude posúvať, ale jej presný posun sa nedá predpovedať. Zdá sa, že tu nepomôže špekulácia (čo je aj záver Maddyovej knihy *Naturalism in Mathematics*). Ale kvôli tomuto zisteniu nie je nevyhnutné opúšťať matematický realizmus, stačí ho zasadiť do historického kontextu. Čím je určitý matematický jazyk mladší, tým menej jeho termov má interpretáciu ako mimo matematiky (v zmysle argumentu založeného na nepostrádateľnosti), tak aj v ostatných oblastiach matematiky (v zmysle argumentu založeného na užitočnosti). Otázku, ktorý z princípov teórie množín získa realistický status a bude prijatý ako axióma, môže rozhodnúť iba budúcnosť.

LITERATÚRA

[1] BALAGUER, M.: Against (Maddian) naturalized platonism. In: *Philosophia Mathematica*, 2, 1994, pp. 97 – 108.
[2] BENACERRAF, P. – PUTNAM, H. (ed.): *Philosophy of Mathematics*, 2^{nd} edition. Cambridge UP: Cambridge 1983.
[3] Carson, E. (1996): On realism in set theory. In: *Philosophia Mathematica*, 4, 1996, pp. 3 – 17.
[4] GÖDEL, K. (1947): What is Cantor's continuum problem. In: ([2], 470 – 483).
[5] KVASZ, L.: Galileovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. In: *Filosofický časopis*, 48, 2000, s. 373 – 399.
[6] KVASZ, L.: Descartovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. In: *Filosofický časopis*, 49, 2001, s. 213 – 240.
[7] KVASZ, L.: Newtonovská fyzika vo svetle Husserlovej fenomenológie. In: *Filosofický časopis*, 52, 2004, s. 411 – 440.
[8] KVASZ, L.: Epistemologické otázky fyziky: od antinómií čistého rozumu k expresívnym medziam jazyka. In: *Organon F*, 2004/4, s. 362 – 381.
[9] KVASZ, L.: Epistemologické otázky modernej fyziky. In: *Organon F*, 2005/1, s. 40 – 61.
[10] KVASZ, L.: Matematika a skúsenosť. In: *Organon F*, 2009/2, s. 146 – 182.
[11] LAVINE, S.: Review of Maddy (1990). In: *Journal of Philosophy*, 89, 1992, pp. 321 – 326.
[12] MADDY, P.: *Realism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press 1990.
[13] MADDY, P.: *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press 1997.
[14] MOSTOWSKI, A.: Recent results in set theory in problems. In: I. Lakatos (ed.) *The philosophy of mathematics*. Amsterdam: North-Holland 1967, pp. 82 – 96.
[15] PARSONS, CH.: Mathematical Intuition. In: *Proceedings of the Aristotelian Society*, 80, 1980, pp. 145 – 168.
[16] PEREGRIN, J.: Kvaszova filosofie matematiky mezi platonizmem a naturalizmem. In: *Organon F*, 17, 2010, s. 71 – 80.
[17] PUTNAM, H. (1975): What is Mathematical Truth. In: *Mathematics, Matter and Method*. Cambridge: Cambridge UP, 1979, pp. 60 – 78.
[18] QUINE, W. (1948): On what there is. Slovenský preklad in: *Z logického hľadiska*. Bratislava: Kalligram 2005, s. 13 – 35.
[19] RISKIN, A.: On the most open questions in the history of mathematics: a discussion of Maddy. In: *Philosophia Mathematica*, 2, 1994, pp. 109 – 121.

Poďakovanie

Text vznikol v rámci riešenia výskumného grantu č. 443 2008 0007 *On what there is: Varieties of realism and their influence on science-religion dialog* na Filozofickej fakulte Katolíckej Univerzity v Ružomberku.

This work has been funded by *On What There Is: Varieties of Realism and Their Influence on Science-Religion Dialog*, sponsored by the Metanexus Institute on Religion and Science, with the generous support of the John Templeton Foundation.

prof. Dr. Ladislav Kvasz
Katedra filozofie FF KU
Hrabovská cesta 1
034 01 Ružomberok
SR
e-mail: ladislav.kvasz@ff.ku.sk