

Povaha súčasnej filozofie a jej metódy je názov doktorandskej konferencie, ktorá sa konala dňa 26. januára 2009 sa na pôde Filozofického ústavu Slovenskej akadémie vied v rámci šiesteho ročníka cyklu *Mladá filozofia*. Okrem doktorandov zo slovenských výskumných a vzdelávacích inštitúcií sa jej zúčastnili aj doktorandi z Filozofickej fakulty Masarykovej univerzity v Brne. Nasledujúce príspevky predstavujú výber z toho, o čom sa prednášalo a diskutovalo v sekciami: *analytická filozofia, logika a metodológia vedy, otázky subjektu a subjektivita v súčasnej filozofii a interdisciplinárne presahy vo filozofii*.

Zita Bajúszová

IMPLIKÁCIA A TRI DRUHY OBSAHOVEJ SÚVISLOSTI

IGOR SEDLÁR, Katedra logiky a metodológie vied FiF UK, Bratislava

SEDLÁR I.: Implication and Three Types of Meaning Connection
FILOZOFIA 64, 2009, No 4, p. 339

The primary aim of the paper is to introduce a new notion of relevance of the antecedent of a true implication statement to its consequent, and to sketch a formalization of the new notion. The formalization is set up in the framework of the so called Logic of Strict Processes (LSP), as articulated by the author in collaboration with J. Podroužek. Their approach to the relevance is presented as a natural part of a wider specter of logics, including modal and relevance logics. The formalization is compared with consequence relations in normal modal logic and in the relevance logic R. In conclusion the author outlines the most important problems of LSP, which still remain open.

Keywords: Implication – Logic – Meaning connection – Process – Relevance

Cieľom príspevku je predstaviť nové chápanie obsahovej súvislosti antecedenta a konzekventa v pravdivých implikačných výrokoch určitého druhu, načrtnúť formálne zachytenie tohto chápania obsahovej súvislosti, založené na tzv. logike striktných procesov, a porovnať tento spôsob modelovania obsahovej súvislosti so známejšími spôsobmi, tvoriacimi jadro modálnych a relevantných logík. Príspevok končí poukázaním na otvorené problémy.

1. Implikácia a obsahová súvislosť v modálnych a relevantných logikách. Pokusy formulovať logické systémy s implikačnou spojkou, ktorej vlastnosti sú v súlade s pravdivosťnými podmienkami výrokov formy „Ak A , tak B “, sú mimoriadne dôležitou súčasťou logiky 20. storočia, a to nielen pre svoju intelektuálnu zaujímavosť, ale aj v dôsledku aplikácií, ktoré z tejto práce vzišli.¹ Všetko sa začalo Lewisovou kritikou určitých vlastností materiálnej implikačnej spojky.²

¹ Stačí spomenúť napr. aplikácie multimodálnych logík v umelej inteligencii.

² Pozri napr. ([3]; [4]; [5]; [6]).

Stručne načrtnime pointu Lewisovej kritiky. Podľa klasickej výrokovej logiky platí, že výrok formy „Ak A , tak B “ je pravdivý vtt. výrok A je nepravdivý alebo výrok B pravdivý. Podľa toho môžeme napríklad tvrdiť, že výrok

(1) „Ak bol B. Obama zvolený za 44. prezidenta USA, tak Bratislava je hlavným mestom SR“

je pravdivý, pretože Bratislava je skutočne hlavným mestom SR.

Podľa Lewisa však o pravdivostných hodnotách výrokov formy „Ak A , tak B “ nemôžeme oprávnené rozhodovať iba na základe informácií o pravdivostných hodnotách výrokov A , B . Medzi výrokmi A , B musí existovať určitá obsahová súvislosť, ako je to napríklad vo výroku

(2) „Ak je dnes pondelok, tak zajtra bude utorok“.

Kľúčová otázka teraz znie: Ako explikovať rozdiel medzi výrokom **(1)** a výrokom **(2)**, teda ako chápať požadovanú obsahovú súvislosť? C. I. Lewis prijíma princíp

(S) Výroky A , B spolu obsahovo súvisia požadovaným spôsobom vtt. nie je možné, aby bol výrok A pravdivý a výrok B nepravdivý.

Výrok **(2)** princípu **(S)** vyhovuje, zatiaľ čo výrok **(1)** mu nevyhovuje. Lewis formuloval hneď niekoľko systémov, ktorých implikačná spojka je schopná princípu **(S)** zohľadniť.³

Lewisovo riešenie so sebou však prináša nové problémy. Ak by sme predpokladali, že striktné implikačné výroky majú také isté pravdivostné podmienky ako výroky formy „Ak A , tak B “, museli by sme prijať napríklad to, že výrok

(3) „Ak je dnes v Bratislave zima, tak $1 + 1 = 2$ “

je pravdivý. V modálnych logikách totiž platí, že nevyhnutne pravdivá formula je striktné implikovaná akoukoľvek formulou.

Vyhnuť sa tomuto dôsledku si predsavzali tvorcovia tzv. relevantných logík. Odlišnosť relevantných logík od logík striktné implikácie je do veľkej miery dôsledkom odlišného chápania požadovanej obsahovej súvislosti medzi antecedentom a konzekventom v pravdivých implikačných výrokoch. Tu je princíp, o ktorý sa relevantné logiky opierajú:

(R) Výroky A , B spolu obsahovo súvisia požadovaným spôsobom vtt. existuje také zdôvodnenie B , pri ktorom sa v konečnom dôsledku odvolávame iba na A a predpoklad A pri odvodení B reálne použijeme.

Čo tu znamená „reálne použiť“? Azda najjednoduchšie to môžeme ilustrovať na dvoch

³ Pozri dodatok k [6].

jednoduchých dôkazoch v systéme prirodzenej dedukcie pre klasickú výrokovú logiku:⁴

(A)		(B)	
1. p	PP	1. p	PP
2. r	PP	2. r	PP
3. $p \vee q$	1, (Z \vee)	3. $p \vee q$	1, (Z \vee)
4. $p \rightarrow (p \vee q)$	3, (Z \rightarrow)	4. $r \rightarrow (p \vee q)$	3, (Z \rightarrow)

V dôkaze **(A)** je zavedenie implikácie v kroku 4. v súlade s princípom **(R)**, pretože konzekvent implikácie, čiže formulu $(p \vee q)$ sme dokázali na základe reálneho použitia predpokladu p a iba na základe reálneho použitia tohto predpokladu (všimnime si zdôvodnenie 3. kroku). Na druhej strane, v dôkaze **(B)** nie je zavedenie implikácie vo 4. kroku v súlade s princípom **(R)**, pretože predpoklad r sme v odvodení formuly $(p \vee q)$ reálne nepoužili; tento predpoklad totiž v zdôvodnení 3. kroku nefiguruje.⁵

Je jasné, že výrok **(3)** princípu **(R)** nevyhovuje.

2. Metaimplikácia v logike striktných procesov. Videli sme, že podobu logík neštandardných implikácií do veľkej miery určuje konkrétne predteoretické chápanie požadovanej obsahovej súvislosti medzi výrokmi. Takto sú logiky striktnej implikácie založené na princípe **(S)** a relevantné logiky na princípe **(R)**.⁶ Možno o obsahovej súvislosti výrokov v implikácii uvažovať aj inak?

V tejto časti načrtujeme logický systém postavený na nasledujúcom princípe:

(P) Výroky A, B spolu obsahovo súvisia požadovaným spôsobom vtt. v rámci každého prípustného overenia výroku A overíme výrok B .

Overenia sa tu chápu ako procedúry, resp. postupnosti krokov. Ako príklad implikačného výroku spĺňajúceho princíp **(P)** uveďme:

(4) „Ak je a deliteľné číslom 6, tak je a deliteľné číslom 2“.

O prípustných spôsoboch overenia výroku „ a je deliteľné číslom 6“ uvažujme v kontexte známeho algoritmu, s ktorým sme sa oboznámili na základnej škole: Keď chceme zistiť, či je nejaké číslo deliteľné číslom 6, musíme zistiť, či je deliteľné číslami 2 a 3. Keď tento algoritmus aplikujeme na konkrétny prípad, zistíme či je dané číslo deliteľné dvoma, a potom zistíme, či je deliteľné tromi, alebo naopak. Všimnime si, že oba možné spôsoby aplikácie tohto algoritmu na konkrétny prípad s pozitívnym výsledkom zahŕňajú pozitívne overenie tvrdenia, že dané číslo je deliteľné dvoma.

⁴ K základom tohto systému pozri ([12], 130 – 160).

⁵ Pre obmedzený rozsah článku sa relevantným logikám nemôžeme venovať detailnejšie. Zaujímavé informácie o nich čitateľ nájde napr. v ([1]; [2]; [7]; [8]; [11]).

⁶ Výlučne na princípe **(R)** ja založená iba logika **R**. Ostatné relevantné logiky sú založené na kombinácii tohto princípu s rôznymi dodatočnými požiadavkami.

Teraz si všimnime výrok

(5) „Ak je každé číslo deliteľné číslom 6 párne, tak π je iracionálne“.

Tento výrok princípu (P) nevyhovuje, pretože spomenutý algoritmus nám na overenie antecedentu stačí, no tento algoritmus sa neodvoláva na iracionalitu π . To znamená, že antecedent môžeme overiť aj bez toho, aby sme v rámci daného overenia overovali aj konzekvent. Tento výrok však vyhovuje princípu (S), keďže predpokladáme, že výrok „ π je iracionálne“ je nevyhnutne pravdivý.

Je jasné, že ak chceme túto predstavu o obsahovej súvislosti v pravdivých implikačných výrokoch určitého druhu formulovať v rámci nejakého logického systému, musí to byť systém, v ktorom je jasne explikovaná myšlienka procedúr asociovaných s výrokmi. Konkrétnejšie, ku každej formule jazyka daného systému musí byť priradená množina procedúr, pričom definujeme reláciu, v ktorej je dvojica formúl práve vtedy, keď pre všetky procedúry priradené prvej formule platí, že existuje procedúra priradená druhej formule, ktorá je časťou procedúry priradenej prvej formule. Práve to je základnou črtou logiky striktných procesov.

Venujme sa teraz logike striktných procesov trochu detailnejšie.⁷ Opíšeme procesnú sémantiku pre pozitívny fragment výrokovologickeho jazyka J^+ . Majme množinu $At_{J^+} = \{p, q, r, \dots\}$ atomárnych výrokových formúl. Množina formúl jazyka J^+ $Form_{J^+}$ je najmenšia množina konečných výrazov obsahujúca všetky prvky množiny At , uzatvorená vzhľadom na binárne výrokové operátory $\wedge, \vee, \rightarrow, >$.⁸ Majme množinu $AP = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ atomárnych krokov a množinu ciest $Trans = P(\bigcup_{i=1}^{i=n} (AP^{(i)}))$, pričom n je konečné. $Trans$ je teda množina množín usporiadaných konečných n -tíc atomárnych krokov. Majme ďalej množinu procesov $Proc = \{\langle a_1, \dots, a_m \rangle \mid \{\langle a_1, \dots, a_m \rangle\} \in Trans\}$. Funkcia I_M určujúca model M je totálna funkcia z $Form_{J^+}$ do $Trans$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:

- i) $I_M(p_i) = \{x\}$, pričom $x \in Proc$ a ak $I_M(p_k) = I_M(p_l)$, tak $k = l$,
- ii) $I_M(\varphi \wedge \psi) = \{\langle a_j, \dots, a_k, a_l, \dots, a_m \rangle \mid \langle a_j, \dots, a_k \rangle \in I_M(\varphi) \text{ a } \langle a_l, \dots, a_m \rangle \in I_M(\psi)\}$
- iii) $I_M(\varphi \vee \psi) = I_M(\varphi) \cup I_M(\psi)$.

I_M teda priraduje každej atomárnej formule jednoprvkovú množinu, ktorú tvorí usporiadaná n -tica atomárnych krokov, pričom požadujeme, aby rozdielnym atomárnym formulám boli priradené rozdielne n -tice. Množina procesov priradená konjunkcii formúl φ, ψ vznikne aplikáciou známeho procesného operátora concatenation na n -tice priradené formulám φ a ψ . Množina procesov priradená disjunkcii formúl φ, ψ vznikne zjednotením množín priradených formulám φ a ψ .

Na určenie hodnoty I_M s ohľadom na $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi > \psi)$ treba najskôr definovať niekoľko pomocných pojmov. Nech $\langle \varphi \rangle_i$ je nejaký prvok z $I_M(\varphi)$. Majme usporiadanú n -ticu A a usporiadanú m -ticu B . A_i nech je i -ty člen A (podobne pre B). B je časťou A ($B \sqsubset A$)

⁷ Nasledujúci text je až po koniec časti 2. zachytením výsledkov spoločnej práce autora s J. Podroužkom a objaví sa v špeciálnom článku o logike striktných procesov. Pozri ([9]; [10]).

⁸ Uvažujeme teda o jazyku s dvoma druhmi implikácie: $\rightarrow, >$.

vtt. existuje také $j \geq 0$, že pre všetky B_i platí: $B_i = A_{(i+j)}$. Relácia \sqsubset je čiastočným usporiadaním na množine *Proc*.

Teraz môžeme prísť k definícii I_M na $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi > \psi)$:

- iv) $I_M(\varphi \rightarrow \psi) = \{\langle \psi \rangle_j \mid \exists \langle \varphi \rangle_i : \langle \psi \rangle_j \sqsubset \langle \varphi \rangle_i\}$,
- v) $I_M(\varphi > \psi) = \{\langle \varphi \rangle_i \mid \exists \langle \psi \rangle_j : \langle \psi \rangle_j \sqsubset \langle \varphi \rangle_i\}$.

Sémantickú hodnotu $(\varphi \rightarrow \psi)$ tvorí podmnožina sémantickej hodnoty konzekventa, a to práve podmnožina, do ktorej patria procesy obsiahnuté v nejakom procese zo sémantickej hodnoty antecedenta. Sémantickú hodnotu $(\varphi > \psi)$ tvorí podmnožina sémantickej hodnoty antecedenta, do ktorej patria práve tie procesy, v ktorých je obsiahnutý nejaký proces z konzekventa.

Teraz môžeme definovať reláciu metaimplikácie v M :

(Def \gg) $\varphi \gg_M \psi$ vtt. $\forall \langle \varphi \rangle_i \exists \langle \psi \rangle_j : \langle \psi \rangle_j \sqsubset \langle \varphi \rangle_i$.

Formula φ metaimplikuje formulu ψ v M vtt. každý proces zo sémantickej hodnoty φ obsahuje nejaký proces zo sémantickej hodnoty ψ . Voľne povedané, vždy, keď prebehne nejaký proces asociovaný s φ , prebehne v rámci neho nejaký proces asociovaný s ψ . Metaimplikáciu môžeme neformálne charakterizovať nasledovne: Vždy, keď overíme φ (v rámci overenia φ), overíme aj ψ . Relácia metaimplikácie v M je formálnym zachtením princípu **(P)**.

3. Metaimplikácia a relácie dôsledku v modálnych a relevantných logikách. Vidíme, že metaimplikácia je metajazyková binárna relácia medzi usporiadanou dvojicou formúl a modelom. Táto relácia môže pripomínať klasickú reláciu vyplývania, avšak jej fixácia na daný model naznačuje, že definícia metaimplikácie slúži ako prvý krok na ceste k definícii špeciálnej neštandardnej objektovojazykovej implikačnej spojky, vyjadrujúcej istý druh obsahovej súvislosti medzi antecedentom a konzekventom. Táto definícia je však zatiaľ jedným z otvorených problémov.

Ak teda chceme porovnať našu formalizáciu princípu **(P)** s formalizáciami princípov **(S)** a **(R)**, máme zatiaľ jedinou možnosť: porovnať vlastnosti metaimplikácie s vlastnosťami sémantickej relácie dôsledku v známých logikách neštandardných implikácií. Nateraz sa sústreďime na normálne modálne logiky a na relevantnú logiku **R**. Všimnime si, ako sa metaimplikácia správa v spoločnosti formúl obsahujúcich jednu z našich objektovojazykových implikačných spojok, a porovnajme to s podobnými prípadmi v známejších systémoch.

Najprv porovnajme metaimplikáciu s reláciou globálneho dôsledku v normálnych modálnych logikách. Ak L je normálna modálna logika, je jasné, že platí:

$$(6) \alpha \vDash_L^G (\beta \prec \beta).$$

Na druhej strane, podobné metatvrdenie v logike striktných procesov neplatí vo všetkých modeloch. Platí totiž:

(7) $\psi \gg_M (\varphi \rightarrow \varphi)$ vtt. $\psi \gg_M \varphi$;

(8) $\psi \gg_M (\varphi > \varphi)$ vtt. $\psi \gg_M \varphi$.

Dôkaz (7): $\psi \gg_M (\varphi \rightarrow \varphi)$ vtt. $\forall \langle \psi \rangle_i \exists x \in \{ \langle \varphi \rangle_j \mid \exists \langle \varphi \rangle_k : \langle \varphi \rangle_j \sqsubset \langle \varphi \rangle_k \} : x \sqsubset \langle \psi \rangle_i$
vtt. $\forall \langle \psi \rangle_i \exists \langle \varphi \rangle_j : \langle \varphi \rangle_j \sqsubset \langle \psi \rangle_i$ (pretože $\{ \langle \varphi \rangle_j \mid \exists \langle \varphi \rangle_k : \langle \varphi \rangle_j \sqsubset \langle \varphi \rangle_k \} = I_M(\varphi)$)
vtt. $\psi \gg_M \varphi$.

Dôkaz vety (8) je podobný.

Vidíme teda, že varianty metatvrdenia (6) platia iba v modeloch, v ktorých ψ metaimplikuje φ , (nie vo všetkých modeloch).

Teraz porovnáme metaimplikáciu s reláciou dôsledku v relevantnej logike **R**. Spýtajme sa, či pre všetky relevantné modely platí:

(9) Ak $\psi \models_{MR} (\varphi \rightarrow \varphi)$, tak $\psi \models_{MR} \varphi$.

Táto otázka je ekvivalentná s otázkou, či platí:

(10) Pre ľubovoľný model **MR** ak $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ je pravdivé v 0, tak $\psi \rightarrow \varphi$ je pravdivé v 0.

Dá sa ukázať, že tvrdenie (10), a teda ani tvrdenie (9) neplatia.⁹ Zosilnené varianty tvrdenia (9) však v LSP platia: sú nimi tvrdenia (7) a (8).

4. Záver. Cieľom príspevku bolo načrtnúť základné princípy modelovania obsahovej súvislosti v pravdivých implikačných výrokoch typu (4) v rámci tzv. logiky striktných procesov a porovnať tento prístup so známejšími logikami s podobnou motiváciou.

Hlavným otvoreným problémom zostáva definovanie objektovojazykovej implikačnej spojky *imp*, pre ktorú by platilo:

(11) $\varphi \gg_M \psi$ vtt. $M \models (\varphi \text{ imp } \psi)$.

Inými slovami, problémom je „preniesť“ metaimplikáciu z úrovne metajazyka na úroveň objektového jazyka. Dá sa ukázať, že implikačné spojky \rightarrow a $>$ túto vlastnosť nemôžu mať.¹⁰ Tento problém so sebou prináša otázku: Ako v logike striktných procesov definovať platnosť formuly v modeli, čiže reláciu $M \models \varphi$. Ďalším otvoreným problémom je definícia metaimplikácie ako relácie medzi množinou formúl a formulou, čiže rozšírenie pôvodnej definície metaimplikácie. Posledným spomedzi závažnejších otvorených problémov je definovanie sémantickej hodnoty negovaných formúl: Ak poznáme sémantickú hodnotu φ , aká bude sémantická hodnota $\neg\varphi$? Vyrošenie týchto problémov nám umožní priamočiarejšie porovnanie predkladaného systému so známejšími systémami neštandardných implikácií.¹¹

⁹ Pre obmedzený priestor nemôžeme uviesť úplné zdôvodnenia.

¹⁰ Práve preto sú porovnania uvedené v 3. časti iba predbežné.

¹¹ K návrhom riešení týchto problémov pozri [9].

LITERATÚRA

- [1] ANDERSON, A. R. – BELNAP, N. D.: *Entailment*. Princeton: UP 1975.
- [2] ANDERSON, A. R. – BELNAP, N. D. – DUNN, J. M.: *Entailment, vol. II*. Princeton: UP 1992.
- [3] LEWIS, C. I. : Implication and the Algebra of Logic. In: *Mind*, New Series, Vol. 21, No. 84 (Oct., 1912), pp. 522 – 531.
- [4] LEWIS, C. I.: Interesting Theorems in Symbolic Logic. In: *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, Vol. 10, No. 9 (Apr. 24, 1913), pp. 239 – 242.
- [5] LEWIS, C. I.: The Issues Concerning Material Implication. In: *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, Vol. 14, No. 13 (Jun. 21, 1917), pp. 350 – 356.
- [6] LEWIS, C. I. – LANGFORD, C. H.: *Symbolic Logic*. Dover Publications 1932.
- [7] MARES, E.: Relevance Logic. In: *A Companion to Philosophical Logic* (ed. D. Jacquette). Blackwell Publishers 2002, pp. 609 – 627.
- [8] MARES, E.: *Relevant Logic. A philosophical interpretation*. Cambridge: UP 2004.
- [9] PODROUŽEK, J.: Dynamická logika striktných procesov (rukopis).
- [10] PODROUŽEK J. – SEDLÁR, I.: Náčrt logiky striktných procesov (rukopis).
- [11] RESTALL, G.: Relevant and Substructural Logics. In: *Handbook of the History of Logic, vol. 7* (ed. D. M. Gabbay, J. Woods). North Holland 2006, pp. 289 – 398.
- [12] ZOUHAR, M.: *Základy logiky pre spoločenskovedné a humanitné odbory*. Bratislava: Veda 2008.

Článok vznikol v rámci riešenia vedeckého projektu podporeného Grantom UK 2008/84 *Procesná sémantika a jej aplikácie*. Za pripomienky ďakujem J. Podroužkovi, J. Szomolányimu a M. Zouharovi.

Mgr. Igor Sedlár
Katedra logiky a metodológie vied FiF UK
Šafárikovo nám. 6
818 01 Bratislava 1
SR
e-mail: sedlar@fphil.uniba.sk